



Espaces vectoriels II

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 7 Février 2013

Contenu

- L'espace vectoriel des matrices ;
- Espaces vectoriels : propriétés directes ;
- Combinaisons linéaires ;
- Sous-espaces vectoriels ;
 - ① Définitions ;
 - ② Exemples.

L'espace vectoriel \mathbb{R}_q^p .

Définition

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors \mathbb{R}_q^p est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^2, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3, C = (1 \quad 2 \quad 3) \in \mathbb{R}_3^1.$$

Définition

L'élément i, j de la matrice A , noté $(A)_{i,j}$, est le nombre situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne de A .

$$(A)_{1,3} = 3, \quad (B)_{3,2} = \sqrt{3}, \quad (B)_{2,3} = e, \dots$$

L'espace vectoriel \mathbb{R}_q^p .

- Une matrice quelconque A de \mathbb{R}_q^p a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies "élément à élément" : on a

$$(A + B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda(A)_{i,j}$$

pour tous $A, B \in \mathbb{R}_q^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les matrices n'ayant qu'une seule ligne sont appelées matrices lignes ou vecteurs lignes, et celles n'ayant qu'une colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes.

Propriétés directes

Proposition

Soit E un espace vectoriel.

- 1 L'élément neutre pour l'addition est unique ;
- 2 Tout vecteur $u \in E$ admet un unique opposé ;
- 3 Pour tout $u \in E$, on a $0 \cdot u = 0^1$;
- 4 Pour tout $u \in E$, on a $-u = (-1) \cdot u^1$;
- 5 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot 0 = 0$;
- 6 Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ satisfont $\lambda \cdot u = 0$, alors on a $u = 0$ ou $\lambda = 0$.

- 1 routine ;
- 2 routine ;
- 3 le truc est $u = 1 \cdot u = (1 + 0) \cdot u$;
- 4 $(-1) \cdot u$ a la bonne propriété ;
- 5 le truc est $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u + 0)$ pour $u \in E$;
- 6 si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est bien défini.

1. Les zéros de part et d'autre de l'égalité n'ont pas le même sens, de même que les signes -

Remarques et notations

Remarques :

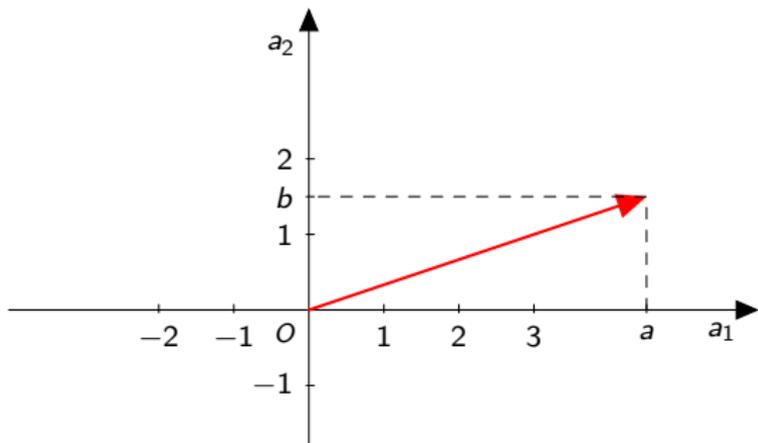
- 1 Ce sont les propriétés principales de l'addition et de la multiplication scalaire. Toutes les autres doivent et peuvent être démontrées de la même façon à partir des conditions intervenant dans la définition, ou à partir de ce que nous avons déjà démontré.
- 2 Dans la suite, nous ne noterons plus la multiplication du vecteur u par le réel λ par $\lambda \cdot u$, mais simplement par λu .
- 3 Nous n'aurons pas de notation particulière pour les vecteurs.

Notations :

- 1 La soustraction $u - v$ est définie par $u + (-v)$;
- 2 La division d'un vecteur u par un réel a non nul est définie par $\frac{u}{a} = \frac{1}{a}u$.

Une représentation intuitive et commode

Dans l'enseignement secondaire, on trace deux droites perpendiculaires et orientées a_1 et a_2 , qui se coupent en O . On porte sur ces droites les mêmes unités. Le couple $(a, b)^\sim$ est alors représenté par le point A obtenu en portant la valeur a sur le premier axe et la valeur b sur le second : on peut représenter l'élément $(a, b)^\sim$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 par une flèche de O à A



Attention : ces objets ne sont pas encore définis dans le cours !!! Il s'agit donc d'une représentation pour guider l'intuition.

Combinaisons linéaires

Soit E un espace vectoriel, $u_1, \dots, u_p \in E$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

Définition

Le vecteur défini par

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs u_1, \dots, u_p , avec les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Exemple :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1,$$

on a directement

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 2u_1 + 3u_2 - u_3 = \dots$$

Remarque : on a aussi $2u_1 + 3u_2 - u_3 = 9u_2 + 3u_3$.

Quelques exemples

- ① Dans \mathbb{R}^3 , si $u_1 = (1, 2, 3)^\sim$, $u_2 = (-1, 0, 1)^\sim$ et $u_3 = (4, 2, 1)^\sim$, alors on a

$$3u_1 - u_2 + u_3 = \dots$$

- ② Dans $(]0, +\infty[^2, \oplus, \odot)$, si $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors on a

$$3 \odot u_1 \oplus 2 \odot u_2 = \dots$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide V de E qui contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Autrement dit, un sous-ensemble V non vide de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{N}_0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \\ u_1, \dots, u_p \in V \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in V.$$

Proposition

Une partie non vide V d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, pour tous $u, v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu et $u + v$ appartiennent à V .

Exemples avec des équations

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel standard. Alors

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E . De même l'ensemble

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exemples paramétriques et utilité

Exemple

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$. Alors,

$$V_3 = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E . De même, si u et v sont dans E , alors

$$V_4 = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition

Si $(E, +, 0, \cdot)$ est un espace vectoriel et si V est un sous-espace vectoriel de E , alors $(V, +, 0, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Attention, la réciproque est fautive : si E est un espace vectoriel, et si V est un sous-ensemble de E qui admet une structure d'espace vectoriel, cela n'implique pas que V est un sous-espace vectoriel de E .