Enveloppes inéaires, parties libres et génératrices

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 12 Février 2014

Enveloppes linéaires

Fait : si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $V_1 \cup V_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

Définition 3.1

Soit E un espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, ou l'enveloppe linéaire de A est l'ensemble

$$\rangle A \langle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \ldots a_p \in A\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Enveloppes linéaires

Fait : si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $V_1 \cup V_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

Définition 3.1

Soit E un espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, ou l'enveloppe linéaire de A est l'ensemble

$$\rangle A \langle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \ldots a_p \in A\}.$$

Proposition 3.2

Pour toute partie A non vide de E, $\rangle A \langle$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient A et est inclus dans tout sous-espace vectoriel V contenant A. C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Enveloppes linéaires

Fait : si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $V_1 \cup V_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

Définition 3.1

Soit E un espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, ou l'enveloppe linéaire de A est l'ensemble

$$\rangle A \langle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \ldots a_p \in A\}.$$

Proposition 3.2

Pour toute partie A non vide de E, $\rangle A \langle$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient A et est inclus dans tout sous-espace vectoriel V contenant A. C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

Donc, $\rangle A \langle$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.

Enveloppes linéaires

Fait : si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $V_1 \cup V_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

Définition 3.1

Soit E un espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, ou l'enveloppe linéaire de A est l'ensemble

$$\rangle A \langle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \ldots a_p \in A\}.$$

Proposition 3.2

Pour toute partie A non vide de E, $\rangle A \langle$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient A et est inclus dans tout sous-espace vectoriel V contenant A. C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

Donc, $\rangle A \langle$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.

Exercice : Soient $u, v \in E$, déterminer $\rangle \{u\} \langle$ et $\rangle \{u, v\} \langle$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 3.3

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de V_1 et V_2, notée $V_1 + V_2$ est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, \quad u_2 \in V_2\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 3.3

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de V_1 et V_2, notée $V_1 + V_2$ est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, \quad u_2 \in V_2\}.$$

Proposition 3.4

Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de E. On a de plus $V_1 + V_2 = \rangle V_1 \cup V_2 \langle$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 3.3

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de V_1 et V_2, notée $V_1 + V_2$ est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, \quad u_2 \in V_2\}.$$

Proposition 3.4

Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de E. On a de plus $V_1 + V_2 = \rangle V_1 \cup V_2 \langle$.

Notation : si $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$, on note $\rangle A \langle$ par $\rangle u_1, \ldots, u_p \langle$ et on a

$$\rangle u_1, \ldots, u_n \langle = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque : on a $\rangle u \langle + \rangle v \langle = \rangle u, v \langle$

Exemples et sommes directes

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser les éléments de $\rangle u, v \langle$ si $u = (1, 2, -3)^\sim$ et $v = (-1, 0, 1)^\sim$.

Exemple 2 : Dans l'espace $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré au plus 2, caractériser les éléments de $\rangle P, Q \langle$ si P et Q sont définies par $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples et sommes directes

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser les éléments de $\rangle u, v\langle$ si $u = (1, 2, -3)^\sim$ et $v = (-1, 0, 1)^\sim$.
Exemple 2 : Dans l'espace $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré au plus 2, caractériser les éléments de $\rangle P, Q\langle$ si P et Q sont définies par $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3.5

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 est directe si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. On note alors cette somme $V_1 \oplus V_2$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples et sommes directes

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser les éléments de $\rangle u, v\langle$ si $u = (1, 2, -3)^\sim$ et $v = (-1, 0, 1)^\sim$.
Exemple 2 : Dans l'espace $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré au plus 2, caractériser les éléments de $\rangle P, Q\langle$ si P et Q sont définies par $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3.5

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 est directe si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. On note alors cette somme $V_1 \oplus V_2$.

Proposition 3.6

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de V_1 et V_2 est directe si, et seulement si, tout vecteur u de $V_1 + V_2$ se décompose de manière unique en $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in V_1$ et $u_2 \in V_2$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parties génératrices

Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de E* si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Parties génératrices

Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de* E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parties génératrices

Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de* E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\}$, est une partie génératrice.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parties génératrices

Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de* E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\}$, est une partie génératrice.

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 4 : Dans $\mathbb{R}^3$, $NG = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ n'est pas génératrice.

Exemple 5 : Dans $\mathcal{P}_2$, $G = \{P, Q, R\}$ où $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = x - 1$ $R(x) = 2$, pour tout x, est une partie génératrice.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parties génératrices

Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de* E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\}$, est une partie génératrice.

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 4 : Dans $\mathbb{R}^3$, $NG = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ n'est pas génératrice.

Exemple 5 : Dans $\mathcal{P}_2$, $G = \{P, Q, R\}$ où $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = x - 1$ $R(x) = 2$, pour tout x, est une partie génératrice.

Exercice : trouver d'autres parties génératrices de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

Espaces de dimension finie

- Si $G = \{u_1, \ldots, u_p\}$ est une partie génératrice de E, on ordonne ses éléments pour avoir une *famille* $(u_1, \ldots, u_p)$.
- A tout vecteur u s'écrivant

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

on associe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^\sim \in \mathbb{R}^p$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Espaces de dimension finie

- Si $G = \{u_1, \ldots, u_p\}$ est une partie génératrice de E, on ordonne ses éléments pour avoir une *famille* $(u_1, \ldots, u_p)$.
- A tout vecteur u s'écrivant

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

on associe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^{\sim} \in \mathbb{R}^p$.

Définition 3.8

Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une partie génératrice contenant un nombre fini d'éléments.

Contre-exemple : L'espace vectoriel des fonctions polynomiales n'est pas de dimension finie.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Familles libres I

Reprenons l'exemple 2 ci-dessus : On a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & x + 2y + 5z \\ b & = & 2y + 4z, \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a - b - z \\ y & = & \frac{b-4z}{2}. \end{array} \right.$$

On a donc, quel que soit z :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{b}{2} - 2z) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

On a donc plusieurs triplets possibles pour chaque $(a, b)^\sim$. C'est dû à la relation :

$$-1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs considérés sont *linéairement dépendants*.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Familles libres II

Reprenons maintenant l'exemple 1 ci-dessus : on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & x + 2y \\ b & = & y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & a - 2b \\ y & = & b \end{array} \right.$$

- Il n'y a donc pas de combinaison linéaire nulle de ces vecteurs avec des coefficients non tous nuls.
- Aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre.

Ces vecteurs sont *linéairement indépendants*.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Familles libres : définitions

Définition 3.9

Une famille (non vide) de vecteurs $D \subset E$ est linéairement dépendante s'il existe une combinaison linéaire nulle de vecteurs de D dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Dans ces cas, on dit aussi que les éléments de D sont *linéairement dépendants*.

Familles libres : définitions

Définition 3.9

Une famille (non vide) de vecteurs $D \subset E$ est linéairement dépendante s'il existe une combinaison linéaire nulle de vecteurs de D dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Dans ces cas, on dit aussi que les éléments de D sont *linéairement dépendants*.

Proposition 3.10

Une famille de vecteurs $D \subset E$ est linéairement dépendante si, et seulement si, l'un des vecteurs de D est combinaison linéaire des autres.

Définition 3.11

Une famille L de E qui n'est pas linéairement dépendante est dite *libre* ou *linéairement indépendante*. Les éléments de L sont alors dits *linéairement indépendants*.

Proposition 3.12

Une partie $L \subset E$ est linéairement indépendante si, et seulement si, tout combinaison linéaire nulle d'éléments de D est nécessairement faite avec des coefficients nuls.

Proposition 3.13

Une partie $D \subset E$ est linéairement indépendante si, et seulement si, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et tous $u_1, \ldots, u_n \in D$, l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

a lieu seulement si on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Proposition 3.14

La famille finie $D = (u_1, \ldots, u_n)$ est linéairement indépendante si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Quelques propriétés

Proposition 3.15

Soit E un espace vectoriel. On a les propriétés suivantes.

1. *Toute famille de vecteurs contenant 0 est linéairement dépendante.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est linéairement dépendante, alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est linéairement dépendante.*
3. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ $(r \geqslant 2)$ est lin. indépendante, alors $(u_1, \ldots, u_{r-1})$ aussi.*
4. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est linéairement indépendante, alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est linéairement dépendante si, et seulement si, y est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$.*

---

1. Ernst Steinitz (1871-1928)

Quelques propriétés

Proposition 3.15

Soit E un espace vectoriel. On a les propriétés suivantes.

1. *Toute famille de vecteurs contenant 0 est linéairement dépendante.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est linéairement dépendante, alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est linéairement dépendante.*
3. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ ($r \geqslant 2$) est lin. indépendante, alors $(u_1, \ldots, u_{r-1})$ aussi.*
4. *Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est linéairement indépendante, alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est linéairement dépendante si, et seulement si, y est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$.*

Théorème 3.16 (Steinitz[1])

Dans tout espace vectoriel E et pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont toujours linéairement dépendantes.

1. Ernst Steinitz (1871-1928)

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Lien avec le problème de départ

Proposition 3.17

Une famille de vecteurs L est linéairement indépendante si tout élément de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire des éléments de L.