



# Enveloppes inéaires, parties libres et génératrices

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 12 Février 2014

## Enveloppes linéaires

Fait : si  $V_1$  et  $V_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $V_1 \cup V_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

### Définition 3.1

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $A$  une partie non vide de  $E$ . Le **sous-espace vectoriel engendré** par  $A$ , ou **l'enveloppe linéaire** de  $A$  est l'ensemble

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_p \in A \}.$$

### Proposition 3.2

*Pour toute partie  $A$  non vide de  $E$ ,  $\langle A \rangle$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Il contient  $A$  et est inclus dans tout sous-espace vectoriel  $V$  contenant  $A$ . C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.*

**Donc,  $\langle A \rangle$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$ .**

Exercice : Soient  $u, v \in E$ , déterminer  $\langle \{u\} \rangle$  et  $\langle \{u, v\} \rangle$ .

## Sommes de sous-espaces vectoriels

### Définition 3.3

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . La somme de  $V_1$  et  $V_2$ , notée  $V_1 + V_2$  est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}.$$

### Proposition 3.4

Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ , alors  $V_1 + V_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a de plus  $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ .

Notation : si  $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ , on note  $\langle A \rangle$  par  $\langle u_1, \dots, u_p \rangle$  et on a

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque : on a  $\langle u \rangle + \langle v \rangle = \langle u, v \rangle$

## Exemples et sommes directes

**Exemple 1 :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , caractériser les éléments de  $\langle u, v \rangle$  si  $u = (1, 2, -3)^\sim$  et  $v = (-1, 0, 1)^\sim$ .

**Exemple 2 :** Dans l'espace  $\mathcal{P}_2$  des polynômes de degré au plus 2, caractériser les éléments de  $\langle P, Q \rangle$  si  $P$  et  $Q$  sont définies par  $P(x) = x^2$  et  $Q(x) = -1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### Définition 3.5

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  est **directe** si  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ . On note alors cette somme  $V_1 \oplus V_2$ .

### Proposition 3.6

*Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme de  $V_1$  et  $V_2$  est **directe** si, et seulement si, tout vecteur  $u$  de  $V_1 + V_2$  se décompose **de manière unique** en  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in V_1$  et  $u_2 \in V_2$ .*

## Parties génératrices

### Définition 3.7

Un ensemble de vecteurs  $G \subset E$  est une *partie génératrice de  $E$*  si tout vecteur de  $E$  est une combinaison linéaire des éléments de  $G$ .

**Exemple 1 :** Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  est une partie génératrice.

**Exemple 2 :** Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ , est une partie génératrice.

**Exemple 3 :** Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une partie génératrice.

**Exemple 4 :** Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $NG = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  n'est pas génératrice.

**Exemple 5 :** Dans  $\mathcal{P}_2$ ,  $G = \{P, Q, R\}$  où  $P(x) = x^2 + 1$ ,  $Q(x) = x - 1$ ,  $R(x) = 2$ , pour tout  $x$ , est une partie génératrice.

**Exercice :** trouver d'autres parties génératrices de l'espace vectoriel  $\mathcal{P}_2$ .

## Espaces de dimension finie

- Si  $G = \{u_1, \dots, u_p\}$  est une partie génératrice de  $E$ , on ordonne ses éléments pour avoir une *famille*  $(u_1, \dots, u_p)$ .
- A tout vecteur  $u$  s'écrivant

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p,$$

on associe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)^\sim \in \mathbb{R}^p$ .

### Définition 3.8

Un espace vectoriel  $E$  est de dimension finie s'il admet une partie génératrice contenant un nombre fini d'éléments.

**Contre-exemple :** L'espace vectoriel des fonctions polynomiales n'est pas de dimension finie.

## Familles libres I

Reprenons l'exemple 2 ci-dessus : On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 2y + 5z \\ b = 2y + 4z, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b - z \\ y = \frac{b-4z}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc, quel que soit  $z$  :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a - b - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{2} - 2z\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

On a donc plusieurs triplets possibles pour chaque  $(a, b) \sim$ . C'est dû à la relation :

$$-1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs considérés sont *linéairement dépendants*.

## Familles libres II

Reprenons maintenant l'exemple 1 ci-dessus : on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = x + 2y \\ b = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2b \\ y = b \end{cases} \end{aligned}$$

- Il n'y a donc pas de combinaison linéaire nulle de ces vecteurs avec des coefficients non tous nuls.
- Aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre.

Ces vecteurs sont *linéairement indépendants*.



## Familles libres : définitions

### Définition 3.9

Une famille (non vide) de vecteurs  $D \subset E$  est **linéairement dépendante** s'il existe une **combinaison linéaire nulle** de vecteurs de  $D$  dont les **coefficients ne sont pas tous nuls**. Dans ces cas, on dit aussi que les éléments de  $D$  sont *linéairement dépendants*.

### Proposition 3.10

*Une famille de vecteurs  $D \subset E$  est linéairement dépendante si, et seulement si, l'un des vecteurs de  $D$  est combinaison linéaire des autres.*

### Définition 3.11

Une famille  $L$  de  $E$  qui n'est pas linéairement dépendante est dite *libre* ou *linéairement indépendante*. Les éléments de  $L$  sont alors dits *linéairement indépendants*.

### Proposition 3.12

Une partie  $L \subset E$  est linéairement indépendante si, et seulement si, toute combinaison linéaire nulle d'éléments de  $D$  est nécessairement faite avec des coefficients nuls.

### Proposition 3.13

Une partie  $D \subset E$  est linéairement indépendante si, et seulement si, pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , et tous  $u_1, \dots, u_n \in D$ , l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

a lieu *seulement* si on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

### Proposition 3.14

La famille *finie*  $D = (u_1, \dots, u_n)$  est linéairement indépendante si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

## Quelques propriétés

### Proposition 3.15

Soit  $E$  un espace vectoriel. On a les propriétés suivantes.

- ① Toute famille de vecteurs contenant  $0$  est linéairement dépendante.
- ② Si  $(u_1, \dots, u_r)$  est linéairement dépendante, alors pour tout  $y \in E$ ,  $(u_1, \dots, u_r, y)$  est linéairement dépendante.
- ③ Si  $(u_1, \dots, u_r)$  ( $r \geq 2$ ) est lin. indépendante, alors  $(u_1, \dots, u_{r-1})$  aussi.
- ④ Si  $(u_1, \dots, u_r)$  est linéairement indépendante, alors pour tout  $y \in E$ ,  $(u_1, \dots, u_r, y)$  est linéairement dépendante si, et seulement si,  $y$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_r$ .

### Théorème 3.16 (Steinitz<sup>1</sup>)

Dans tout espace vectoriel  $E$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $p + 1$  combinaisons linéaires de  $p$  vecteurs sont toujours linéairement dépendantes.

1. Ernst Steinitz (1871-1928)

## Lien avec le problème de départ

### Proposition 3.17

*Une famille de vecteurs  $L$  est linéairement indépendante si tout élément de  $E$  s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire des éléments de  $L$ .*