

## Sous-espaces vectoriels II, dépendance linéaire

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 13 Février 2013

- 3 Faire de même avec les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  suivants

$$V_1 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 4 Trouver l'intersection des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants

$$V_1 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}.$$

- 5 Faire de même avec

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\} \text{ et}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4x + y - z = 0 \right\}.$$

## Intersections de sous-espaces vectoriels

### Définition

Si  $V_1$  et  $V_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , l'intersection de  $V_1$  et  $V_2$  est l'ensemble

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in E : x \in V_1 \text{ et } x \in V_2\}.$$

### Proposition

Soient  $V_1$  et  $V_2$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $V_1 \cap V_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Exercice :

- 1 Dans  $\mathbb{R}^2$ , déterminer l'intersection des sous-espaces vectoriels

$$V_1 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0 \right\}$$

## Enveloppes linéaires

Si  $V_1$  et  $V_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $V_1 \cup V_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel (en général) : considérer par exemple  $V_1 = \{(x, 0)^\sim \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$  et  $V_2 = \{(0, y)^\sim \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ .

### Définition

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $A$  une partie non vide de  $E$ . Le sous-espace vectoriel engendré par  $A$ , ou l'enveloppe linéaire de  $A$  est l'ensemble

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_p \in A \}.$$

### Proposition

Pour toute partie  $A$  non vide de  $E$ ,  $\langle A \rangle$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Il contient  $A$  et est inclus dans tout sous-espace vectoriel  $V$  contenant  $A$ . C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

Donc,  $\langle A \rangle$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$ .

Exercice : Soient  $u, v \in E$ , déterminer  $\langle \{u\} \rangle$  et  $\langle \{u, v\} \rangle$ .

## Sommes de sous-espaces vectoriels

### Définition

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . La somme de  $V_1$  et  $V_2$ , notée  $V_1 + V_2$  est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}.$$

### Proposition

Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ , alors  $V_1 + V_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a de plus  $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ .

Notation : si  $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ , on note  $\langle A \rangle$  par  $\langle u_1, \dots, u_p \rangle$ .

Remarque : on a  $\langle u \rangle + \langle v \rangle = \langle u, v \rangle$

5

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Parties génératrices

### Définition

Un ensemble de vecteurs  $G \subset E$  est une *partie génératrice* de  $E$  si tout vecteur de  $E$  est une combinaison linéaire des éléments de  $G$ .

Exemple 1 : Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \{u, v\}$ , où  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , est une partie génératrice.

Exemple 2 : Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \{u, v, w\}$ , où  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  
 $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  est une partie génératrice.

Exemple 3 : Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $G = \{u, v, w\}$ , où  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$w = (0, 0, 1)^\sim$  est une partie génératrice.

Exercice : trouver des parties génératrices de l'espace vectoriel  $\mathcal{P}_2$  des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

7

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Sommes directes

### Définition

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  est directe si  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ . On note alors cette somme  $V_1 \oplus V_2$ .

### Proposition

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme de  $V_1$  et  $V_2$  est directe si, et seulement si, tout vecteur  $u$  de  $V_1 + V_2$  se décompose *de manière unique* en  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 \in V_1$  et  $u_2 \in V_2$ .

6

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Parties libres I

Soient les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  définis par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il existe une *dépendance linéaire* entre ces vecteurs car

$$u_3 = u_1 + 2u_2.$$

Ces vecteurs peuvent se compenser pour donner le vecteur nul puisqu'on a aussi

$$u_1 + 2u_2 - u_3 = 0.$$

Dans  $\mathbb{R}^2$ , il n'y a pas de dépendance linéaire entre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne peuvent pas "se compenser".

8

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Parties libres II

### Définition

Soit  $I$  un ensemble d'indices (non vide). Si  $|I| \neq 1$ , une famille de vecteurs  $D = (u_i : i \in I)$  est linéairement dépendante si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Si  $|I| = 1$ , alors la famille  $(u_i)$  est linéairement dépendante si  $u_i = 0$ .

Dans ces cas, on dit aussi que les éléments de la famille sont *linéairement dépendants*.

### Définition

Une famille de vecteurs  $L$  de  $E$  qui n'est pas linéairement dépendante est dite *libre* ou linéairement indépendante.

Les éléments de  $L$  sont alors dits *linéairement indépendants*.

Remarques :

- 1 ce ne sont pas les définitions classiques, mais elles me semblent plus concrètes que celles qui sont habituelles ;
- 2 Les familles permettent de tenir compte de répétitions, contrairement aux ensembles.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

9

## Un critère de dépendance

Traisons le cas d'une famille finie, qui nous occupera cette année, mais le résultat se généralise à des familles infinies. On formalise l'idée de "compensation" entre des vecteurs dépendants.

### Proposition

Une famille  $D = (u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs est linéairement dépendante si, et seulement si, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , **non tous nuls**, tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

Il y a deux sens, et chaque fois deux cas  $n > 1$  et  $n = 1$ .

10

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Un critère d'indépendance

En contraposant le critère de dépendance précédent, on obtient un critère d'indépendance.

### Proposition

Une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs est linéairement indépendante si, et seulement si, pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

a lieu **seulement si** on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

En d'autres termes, une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs est linéairement indépendante si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Remarque : l'implication dans l'autre sens est toujours vraie.

11

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

## Quelques propriétés

### Proposition

Soit  $E$  un espace vectoriel. On a les propriétés suivantes.

- 1 Toute famille de vecteurs contenant 0 est linéairement dépendante.
- 2 Si  $(u_1, \dots, u_r)$  est linéairement dépendante, alors pour tout  $y \in E$ ,  $(u_1, \dots, u_r, y)$  est linéairement dépendante.
- 3 Si  $(u_1, \dots, u_r)$  ( $r \geq 2$ ) est lin. indépendante, alors  $(u_1, \dots, u_{r-1})$  aussi.
- 4 Si  $(u_1, \dots, u_r)$  est linéairement indépendante, alors pour tout  $y \in E$ ,  $(u_1, \dots, u_r, y)$  est linéairement dépendante si, et seulement si,  $y$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_r$ .

### Théorème (Steinitz<sup>1</sup>)

Dans tout espace vectoriel  $E$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $p + 1$  combinaisons linéaires de  $p$  vecteurs sont toujours linéairement dépendantes.

1. Ernst Steinitz (1871-1928)

12

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.