Université de Liège

Bases

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 14 Février 2013

Bases

Définition

Une base d'un espace vectoriel E est une famille ordonnée de vecteurs qui est libre et génératrice. Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une base ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple (Base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples supplémentaires

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (1,0)^\sim$ et $u_2 = (1,1)^\sim$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (1,0,1)^\sim$, $u_2 = (0,1,1)^\sim$ et $(0,0,1)^\sim$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, ou une base $\mathcal{B}' = (u_2, u_1, u_3)$.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, les fonctions P_0, P_1, P_2 définies par
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
forment une base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ ou une base $\mathcal{B}' = (P_2, P_1, P_0)$.
4. Dans l'espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction P_n par
$$P_n(x) = x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
La famille $(P_n : n \in \mathbb{N})$ est alors une base de $\mathcal{P}$.
5. Dans l'espace vectoriel $(]0, +\infty[^2, \oplus, \odot)$, les vecteurs
$$u_1 \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$$
forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition

Une partie $\mathcal{B}$ une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E continnennent le même nombre d'éléments.

Définition

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, le nombre d'éléments d'une base quelconque est appelé *la dimension* de E, et noté $\dim(E)$, ou $\dim E$.

Exemples :

1. $\mathbb{R}^n$ est de dimension n ;
2. $(]0,+\infty[^2, \oplus, \odot)$ est de dimension 2 ;
3. $\mathcal{P}_2$ est de dimension 3.

Propriétés supplémentaires

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. *Toute partie génératrice contenant exactement n éléments est une base ;*
2. *Toute partie libre contenant exactement n éléments est une base ;*
3. *Toute partie génératrice contient une base ;*
4. *Toute partie libre est incluse dans une base.*

Conséquences :

1. $u_1 = (1, 2)^\sim$ et $u_2 = (3, 4)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ *parce qu'*ils sont lineairement indépendants.
2. $v_1 = (1, 0, 0)^\sim$, $v_2 = (0, 1, 0)^\sim$ et $v_3 = (1, 2, 3)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car ils sont linéairement indépendants.