Bases, composantes

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 13 Février 2014

Définition et exemple fondamental

Définition 4.1

Une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Exemple 4.2 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples supplémentaires

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (1,0,1)^\sim$, $u_2 = (0,1,1)^\sim$ et $(0,0,1)^\sim$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, ou une base $\mathcal{B}' = (u_2, u_1, u_3)$.

Exemple 3 : Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$, les fonctions P_0, P_1, P_2 définies par

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

forment une base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ ou une base $\mathcal{B}' = (P_2, P_1, P_0)$.

Exemple 4 : Dans l'espace vectoriel $(]0, +\infty[^2, \oplus, \odot)$, les vecteurs

$$u_1 \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$$

forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 4.3

Une partie $\mathcal{B}$ une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 4.3

Une partie $\mathcal{B}$ une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 4.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base contenant un nombre fini d'éléments (disons n) et toutes les bases de E contiennent n éléments.

Propriétés

Proposition 4.3

Une partie $\mathcal{B}$ une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 4.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base contenant un nombre fini d'éléments (disons n) et toutes les bases de E contiennent n éléments.

Définition 4.5

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, le nombre d'éléments d'une base quelconque est appelé *la dimension* de E, et noté $\dim(E)$, ou $\dim E$.

1. $\mathbb{R}^n$ est de dimension n ;
2. $(]0,+\infty[^2,\oplus,\odot)$ est de dimension 2 ;
3. $\mathcal{P}_2$ est de dimension 3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés supplémentaires

Proposition 4.6

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. *Toute partie génératrice contenant exactement n éléments est une base ;*
2. *Toute partie libre contenant exactement n éléments est une base ;*
3. *Toute partie génératrice contient une base ;*
4. *Toute partie libre est incluse dans une base.*

Propriétés supplémentaires

Proposition 4.6

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. *Toute partie génératrice contenant exactement n éléments est une base ;*
2. *Toute partie libre contenant exactement n éléments est une base ;*
3. *Toute partie génératrice contient une base ;*
4. *Toute partie libre est incluse dans une base.*

Conséquences :

1. $u_1 = (1,2)^{\sim}$ et $u_2 = (3,4)^{\sim}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ *parce qu'*ils sont lineairement indépendants.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés supplémentaires

Proposition 4.6

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. *Toute partie génératrice contenant exactement n éléments est une base ;*
2. *Toute partie libre contenant exactement n éléments est une base ;*
3. *Toute partie génératrice contient une base ;*
4. *Toute partie libre est incluse dans une base.*

Conséquences :

1. $u_1 = (1,2)^\sim$ et $u_2 = (3,4)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ *parce qu*'ils sont lineairement indépendants.
2. $v_1 = (1,0,0)^\sim$, $v_2 = (0,1,0)^\sim$ et $v_3 = (1,2,3)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car ils sont linéairement indépendants.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.7

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *On a* $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$ *;*
2. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$*, alors* $F = E$*.*

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.7

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *On a* $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$ *;*
2. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$*, alors* $F = E$.

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$. Une famille libre de vecteurs de F contient donc au plus n vecteurs.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.7

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *On a* $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$ *;*
2. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$*, alors* $F = E$*.*

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$. Une famille libre de vecteurs de F contient donc au plus n vecteurs.

(c) On peut donc construire pas à pas une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de F, libre et maximale pour l'inclusion.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.7

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *On a* $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$ *;*
2. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$, *alors* $F = E$.

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$. Une famille libre de vecteurs de F contient donc au plus n vecteurs.

(c) On peut donc construire pas à pas une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de F, libre et maximale pour l'inclusion.

(d) Alors $p \leqslant n$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 4.7

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *On a* $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$ *;*
2. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$*, alors* $F = E$*.*

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$. Une famille libre de vecteurs de F contient donc au plus n vecteurs.

(c) On peut donc construire pas à pas une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de F, libre et maximale pour l'inclusion.

(d) Alors $p \leqslant n$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

(e) Si $p = n$, c'est aussi une base de E.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Composantes

Dans ce qui suit, on suppose que E est un e.v. de dimension finie n.

Définition 4.8

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uple $(x_1, \ldots, x_n)^\sim \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Ce n-uple est appelé *vecteur de composantes* de x dans la base $\mathcal{B}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Composantes

Dans ce qui suit, on suppose que E est un e.v. de dimension finie n.

Définition 4.8

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uple $(x_1, \ldots, x_n)^\sim \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. Ce n-uple est appelé *vecteur de composantes* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Notations : $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ ou $\Phi_{\mathcal{B}}(x) = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Composantes

Dans ce qui suit, on suppose que E est un e.v. de dimension finie n.

Définition 4.8

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uple $(x_1, \ldots, x_n)^\sim \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Ce n-uple est appelé *vecteur de composantes* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Notations : $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ ou $\Phi_\mathcal{B}(x) = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$.

Proposition 4.9

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E l'application $\Phi_\mathcal{B}$ est une bijection. C'est de plus une application linéaire. En d'autres termes, elle satisfait les conditions suivantes :

1. *pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Phi_\mathcal{B}(\lambda u) = \lambda \Phi_\mathcal{B}(u)$,*
2. *pour tous $u, v \in E$, on a $\Phi_\mathcal{B}(u + v) = \Phi_\mathcal{B}(u) + \Phi_\mathcal{B}(v)$.*

En particulier, les composantes d'une combinaison linéaire de vecteurs sont obtenues en formant la combinaison linéaire correspondante des vecteurs de composantes, dans $\mathbb{R}^n$.

Produit matriciel

Nous avons besoin de quelques éléments de calcul matriciel.
Commençons par le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Produit matriciel

Nous avons besoin de quelques éléments de calcul matriciel.
Commençons par le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition 4.10

Le produit d'une matrice ligne $A = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}_n^1$ et d'une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_1^n$ est le nombre AB donné par

$$AB = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = 2 + 3e,$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Produit matriciel

Nous avons besoin de quelques éléments de calcul matriciel.
Commençons par le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition 4.10

Le produit d'une matrice ligne $A = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^1_n$ et d'une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_1$ est le nombre AB donné par

$$AB = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = 2 + 3e, \quad \begin{pmatrix} 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ 6 \end{pmatrix} = \pi + 6e.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Produits matriciels quelconques

Nous avons défini le produit d'une ligne par une colonne contenant le même nombre d'éléments. Cela se généralise facilement. Toute matrice peut être vue comme un empilement de lignes ou une juxtaposition de colonnes.

Définition 4.11

Soit $A \in \mathbb{R}^p_n$ et $B \in \mathbb{R}^n_q$. On écrit $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$ où $L_1, \ldots, L_p$ sont des lignes et $B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_q \end{pmatrix}$ où $C_1, \ldots, C_q$ sont des colonnes. Alors $AB \in \mathbb{R}^p_q$ est définie par

$$(AB)_{i,j} = L_i C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques exemples

Calculer les produits suivants.

$$1)\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ \pi & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & \pi & 2\\ a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \quad 5)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & \pi & 2\\ a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad 6)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Propriétés

Proposition 4.12

Le produit matriciel a les propriétés suivantes :

1. *Il est bilinéaire :*
   - *on a* $(A+B)C = AC + BC$ *pour tous* $A, B \in \mathbb{R}^p_n$ *et* $C \in \mathbb{R}^n_q$;
   - *on a* $A(B+C) = AB + AC$ *pour tous* $A \in \mathbb{R}^p_n$ *et* $B, C \in \mathbb{R}^n_q$;
   - *on a* $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ *pour tous* $A \in \mathbb{R}^p_n$, $B \in \mathbb{R}^n_q$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. *Il est associatif : on a*

$$(AB)C = A(BC)$$

   pour tous $A \in \mathbb{R}^p_n$, $B \in \mathbb{R}^n_q$ *et* $C \in \mathbb{R}^q_r$.

3. *Il n'est en général pas commutatif : les produits* AB *et* BA *ne sont simultanément définis et ne donnent des matrices de même type que si* A, B *sont carrées et de même type. Même dans ce cas, ils ne sont en général pas égaux.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas des matrices carrées

Dans le cas des matrices carrées de type (n, n), il existe une matrice particulière, appélée matrice identité et notée I_n ou Id_n qui satisfait les conditions $AI_n = I_nA = A$ pour tout $A \in \mathbb{R}^n_n$.

Le cas des matrices carrées

Dans le cas des matrices carrées de type (n, n), il existe une matrice particulière, appélée matrice identité et notée I_n ou Id_n qui satisfait les conditions $AI_n = I_nA = A$ pour tout $A \in \mathbb{R}^n_n$.
La matrice I_n est définie par

$$(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $i, j \leqslant n$.

Proposition 4.13

La matrice identité est l'unique matrice $A \in \mathbb{R}^n_n$ qui satisfait

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Matrices inversibles et inverses

Définition 4.14

Soit A une matrice carrée de type (n, n). On dit que A est *inversible* si il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^n_n$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas, on montre que l'inverse de A est unique et on le note A^{-1}.

Remarque : si B est l'inverse de A, alors A est l'inverse de B.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Changements de base

Soient deux bases différentes $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ de E. On cherche les liens entre les composantes de $x \in E$ dans les deux bases.

Proposition 4.15

Les composantes $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)^\sim$ d'un même élement x de E dans des bases $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

où $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont des matrices à n lignes et n colonnes. Les colonnes de $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ sont les composantes des éléments de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Enfin, les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont inverses l'une de l'autre.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.