Déterminants, rangs, systèmes linéaires

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 19 Février 2014

Sous matrices

Une définition intuitive : on sélectionne certaines lignes et certaines colonnes d'une matrice (ou on en supprime d'autres) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{\pi} \\ \cancel{4} & \cancel{e} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{pmatrix}$$

On note entre parenthèses les lignes et les colonnes qui sont sélectionnées dans A, donc

$$A_{(1,3;1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

De même :

$$A_{(1;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \end{pmatrix}.$$

Un cas particulier

Définition 5.1

Soit $A \in \mathbb{R}^m_n$ une matrice. On note $A_{\hat{i},\hat{j}}$ la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j dans A.

Par exemple, si

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$B_{\hat{1},\hat{3}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Déterminants

On définit l'application "déterminant" sur l'ensemble de toutes les matrices carrées, par récurrence :

Définition 5.2

Si $A \in \mathbb{R}_1^1 = \mathbb{R}$, alors $\det(A) = A$. Si $A \in \mathbb{R}_{n+1}^{n+1}$, alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j}(-1)^{j+1} \det(A_{\hat{1},\hat{j}}).$$

Définition 5.3

1. Soit $A \in \mathbb{R}_n^m$ une matrice. Un *mineur d'ordre p* de A est le déterminant d'une sous-matrice de A à p lignes et p colonnes ;
2. Si $A \in \mathbb{R}_m^m$, le *mineur de l'élément* $a_{i,j}$ est $\det(A_{\hat{i},\hat{j}})$;
3. Si $A \in \mathbb{R}_m^m$, le *cofacteur de l'élément* $a_{i,j}$ est $\mathcal{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{\hat{i},\hat{j}})$;

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition 5.4

La matrice des cofacteurs : si A est une matrice carrée

$$(\mathrm{cof}(A))_{i,j} = (\mathcal{A})_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{\hat{i},\hat{j}}).$$

On peut écrire la définition du déterminant :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \mathcal{A}_{1,j}.$$

C'est la *règle des cofacteurs* (sur la première ligne).

Le cas des matrices de taille 1,2,3 et 4

1. Matrices de taille 1 : pour $a \in \mathbb{R}^1_1$, on a $\det(a) = a$;
2. Matrices de taille 2 :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Représentation graphique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

3. Pour une matrice à trois lignes et trois colonnes, on a

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13}$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

On a une représentation graphique : c'est la règle attribuée à Sarrus (Pierre Sarrus (1798-1861)).

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

- Attention : cela ne vaut que pour les matrices carrées de taille 3.
- Dans beaucoup de cas, il vaut mieux utiliser la règle des cofacteurs.

4.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13} + a_{14}\mathcal{A}_{14}$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - a_{14}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Propriétés I

Proposition 5.5

1. *Le déterminant est une application multilinéaire sur les colonnes des matrices : on a pour tous $C_1, \ldots, C_n, C_i' \in \mathbb{R}^n$, tout réel λ et tout $i \leqslant n$*
   1. $\det(C_1 \ldots C_i + C_i' \ldots C_n) = \det(C_1 \ldots C_i \ldots C_n) + \det(C_1 \ldots C_i' \ldots C_n)$,
   2. $\det(C_1 \ldots \lambda C_i \ldots C_n) = \lambda \det(C_1 \ldots C_i \ldots C_n)$.
2. *Le déterminant est antisymétrique sur les colonnes : une matrice A et une matrice A' obtenue en permutant deux colonnes de A ont des déterminants opposés.*
3. *Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.*
4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'application déterminant est l'unique application définie sur $\mathbb{R}^n_n$ à valeurs réelles et satisfaisant ces trois propriétés.*

Propriétés II

Proposition 5.6

1. *Pour tout* $A \in \mathbb{R}_n^n$, *on a pour tout* $i \leqslant n$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathcal{A}_{i,j}.$$

2. *Pour tout* $j \leqslant n$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathcal{A}_{i,j}.$$

   Ce sont des règles des cofacteurs pour les lignes et les colonnes.

3. *On a aussi* $\det(A) = \det(A^{\sim})$ *et* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *pour toute matrice* $B \in \mathbb{R}_n^n$.

4. *L'application déterminant est multilinéaire sur les lignes.*

Exercice : vérifier toutes ces propriétés sur des matrices carrées de taille 3.

Exercices

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad 3) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 7 & y \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5) \begin{pmatrix} x & y & z \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 6) \begin{pmatrix} 7 & -1 & x \\ 2 & 5 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad 8) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x \\ 2 & 5 & 7 & y \\ 3 & 0 & 3 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \qquad 9) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 2 & 5 & 0 & y \\ 3 & 0 & 3 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Utilité majeure du déterminant

Proposition 5.7

Les éléments $C_1, \ldots, C_n$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement dépendants si, et seulement si on a $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$.

Utilité :

1. Démontrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier la dépendance linéaire de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^3$.

Rangs de matrices

Définition 5.8

Soit $A \in \mathbb{R}^n_p$. Le *rang* de A est le nombre maximal de colonnes de A linéairement indépendantes (dans $\mathbb{R}^n$). On le note $\mathrm{rg}(A)$ ou $\rho(A)$.

Proposition 5.9

Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{R}^n_p$ est l'ordre du plus grand mineur non nul de A. C'est aussi le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A.

Le rang permet donc de "compter de manière intelligente" les colonnes d'une matrice, ou ses lignes. Exemples :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix} = 1,\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix} = 2,\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} = 2.$$

Systèmes linéaires : définitions

Un *système d'équations linéaires à p équations et n inconnues* (que nous notons $x_1, \dots, x_n$) est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1+ & \cdots & +a_{pn}x_n & = & b_p, \end{array}\right.$$

où les coefficients $a_{11}, \dots, a_{pn}, b_1, \dots, b_p$ sont réels. On note un tel système (S) pour faire court.

- Une *solution* d'un système (S) d'équations est un n-uple $(x_1, \dots, x_n)^\sim$ de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait *simultanément* toutes les équations de (S).
- Le système (S) est dit *compatible* s'il admet au moins une solution.
- Il est dit *incompatible* dans le cas contraire.
- Les nombres $b_1, \dots, b_p$ constituent les *termes indépendants*.
- Le système (S) est *homogène* si $b_1 = \cdots = b_p = 0$.
- A tout système (S), on peut associer un système homogène en remplaçant $b_1, \dots, b_p$ par 0.

Systèmes linéaires : formes alternatives

- Forme "vectorielle" dans $\mathbb{R}^p$: on exprime les p équations comme une seule équation dans $\mathbb{R}^p$: Le système (S) s'écrit aussi

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

- Forme matricielle : le système s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{b},$$

ou encore $AX = b$.

- La matrice A est appelée matrice du système et le vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ terme indépendant.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

L'ensemble d'équations

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues. Il peut être mis sous forme matricielle en

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système compatible puisque le triplet $(5/7, 3/7, 0)$ est une solution de (S).
Ce système n'est pas homogène puisque son terme indépendant est $(1, 0)^{\sim}$, mais le système homogène associé à (S) est

$$(S_0) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Systèmes équivalents

Définition 5.10

Un système linéaire qui admet une solution unique est dit *déterminé*. S'il admet plusieurs solutions, il est dit *indéterminé*. Deux systèmes linéaires à n inconnues (S) et (S') sont dits *équivalents* s'ils ont les mêmes ensembles de solutions. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Exemples : on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De même :

$$(S_1) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S_2) : \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le nombre d'équations n'est pas important, mais bien le nombre d'équations utiles.

Premiers résultats

Définition 5.11

Si $A \in \mathbb{R}^p_n$ et $B \in \mathbb{R}^p_m$, on note $(A|B)$ la matrice dont les colonnes sont celles de A suivies de celles de B.

Le nombre maximal d'équations utiles (indépendantes) dans le système linéaire $AX = b$ est donc $\mathrm{rg}(A|b)$. Ce nombre, avec $\mathrm{rg}(A)$ gouverne la compatibilité de ce système.

Proposition 5.12

Un système linéaire à p équations et n inconnues qui s'écrit $Ax = b$ est compatible si, et seulement si, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.
Un système homogène à p équations et n inconnues $AX = 0$ est toujours compatible. L'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$.

Exercice démontrer que $\{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ est un sous-espace vectoriel, en utilisant les propriétés du produit matriciel.

Exercices

1. Le système d'équations à trois inconnues
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$
est compatible. L'ensemble des solutions du système homogène associé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

2. Le système d'équations à deux inconnues x et y
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 5y & = & 4 \\ 6x + \lambda y & = & 10 \end{array}\right.$$
est compatible pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{10\}$. Il est incompatible pour $\lambda = 10$. L'ensemble des solutions du système homogène associé est un sous-espace vectoriel de dimension 0 si $\lambda \neq 10$ et de dimension 1 si $\lambda = 10$.

3. Si $(u_1, u_2)^\sim \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors le système d'équations
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 x & = & a \\ u_2 x & = & b \end{array}\right.$$
est compatible si, et seulement si, on a $\det \begin{pmatrix} u_1 & a \\ u_2 & b \end{pmatrix} = 0$.

4. Si $(u_1, u_2, u_3)^\sim$ et $(v_1, v_2, v_3)^\sim$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$, alors le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1x + v_1y & = & a \\ u_2x + v_2y & = & b \\ u_3x + v_3y & = & c \end{array}\right.$$

est compatible si, et seulement si,on a

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a \\ u_2 & v_2 & b \\ u_3 & v_3 & c \end{pmatrix} = 0.$$

5. L'ensemble des solutions du système d'équations à 3 inconnues

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Exprimer les solutions comme combinaisons linéaires de deux vecteurs.

6. L'ensemble des solutions du système d'équations à 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2. Exprimer l'ensemble des solutions comme une enveloppe linéaire.

Systèmes généraux et résolution

Proposition 5.13

Soient (S) : $AX = b$ un système linéaire de p équations à n inconnues, compatible, et X_0 une solution (particulière) de ce système. Pour toute solution Y du système homogène associé (S_0) : $AX = 0$, $X_0 + Y$ est une solution de (S). Réciproquement, toute solution de (S) est de cette forme. L'ensemble des solutions de (S) s'écrit donc

$$\{X_0 + Y : AY = 0\}.$$

La résolution de tels systèmes peut se faire à l'aide de la méthode du pivot de Gauss ou par substitution : on exprime une inconnue en fonction des autres dans une des équations, et on substitue la valeur trouvée dans toutes les autres. On transforme ainsi un système en un système équivalent, mais plus simple.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Calcul pratique du rang : déterminants bordés

Le calcul systématique du rang nécessite l'évaluation de beaucoup de déterminants. Pour rappel :

Proposition 5.14

Une matrice est de rang r si :

1. *Elle admet un mineur d'ordre r non nul ;*
2. *Tous les mineurs d'ordre strictement supérieur à r sont nuls.*

Définition 5.15

Soit $A \in \mathbb{R}^n_p$ et B une sous-matrice de A de type (r, r). Une sous-matrice B' de A borde B si B' est de type $(r+1, r+1)$ et si B est une sous-matrice de B'.

En d'autres termes B' borde B si B' est obtenue en sélectionnant dans A toutes les rangées de B, et une colonne et une ligne de plus.
Cette définition se transpose directement en termes de mineurs.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un exemple

Exemples : si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & e & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2,7 & 0,5 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -3 & \sqrt{2} & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = A_{1,2;1,3} = \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alors les sous-matrices qui bordent B sont

$$A_{(1,2,3;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & e & 3 \\ -1 & 3 & 2,7 \end{pmatrix}, A_{(1,2,3;1,3,4)} = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2,7 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$A_{(1,2,4;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & e & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, A_{(1,2,4;1,3,4)} = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

et finalement $A_{(1,2,5;1,2,3)}$, $A_{(1,2,5;1,3,4)}$. Il n'y en a donc que 6, contre 40 sous-matrices d'ordre 3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Calcul du rang

Proposition 5.16

Soit $A \in \mathbb{R}_n^p$. Le rang de A est r si, et seulement si,

1. *la matrice A admet un mineur d'ordre r non nul ;*
2. *tous les mineurs d'ordre $r+1$ qui bordent ce mineur sont nuls.*

Utilités :

1. Réduire fortement le nombre de déterminants à calculer pour calculer le rang ;
2. Compter le nombre utiles de conditions pour que le rang soit r. Ce sera utile pour les équations de sous-espaces vectoriels.

A utiliser en plus : le rang de A est inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes de A. Il ne peut pas diminuer si on ajoute une colonne à la matrice (ou une ligne).

Exercices

Calculer les rangs des matrices suivantes.

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 14 & -5 \end{pmatrix} \quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exprimer les égalités suivantes pour les nombres x, y, z, t.

$$4)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 7 & x \\ 12 & y \end{pmatrix} = 1 \qquad 5)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix} = 2 \qquad 6)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 7 & -1 & x \\ 2 & 5 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2$$

$$7)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} = 2 \quad 8)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x \\ 2 & 5 & 7 & y \\ 3 & 0 & 3 & z \\ 1 & 1 & 2 & t \end{pmatrix} = 2 \quad 9)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 2 & 5 & 0 & y \\ 3 & 0 & 3 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} = 3.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.