Equations de sous-espaces vectoriels

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 26 Février 2014

Données et but du jeu

Les données :

1. Un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}_0$;
2. Un sous-espace vectoriel F de dimension $p \leqslant n$;
3. Une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E

Les buts du jeu :

1. Obtenir une description constructive de F, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un vecteur u est dans F (équations cartésiennes).

Panorama :

1. On exprime F comme une enveloppe linéaire ;
2. On utilise la définition de l'enveloppe linéaire (qui fait apparaître les paramètres) : équations paramétriques vectorielles ;
3. On exprime tout cela en composantes dans une base : équations paramétriques cartésiennes ;
4. On élimine les paramètres : équations cartésiennes ;
5. On peut naviguer entre ces "états des équations".

Equations paramétriques

- On a $F = \rangle u_1, \dots, u_r \langle$, si $\{u_1, \dots, u_r\}$ est une partie génératrice de F ;
- De préférence on cherche à avoir $r = \dim F$.
- Pour $x \in E$ quelconque, on a alors $x \in F$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} : x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r} \tag{7.1}$$

- On passe aux composantes dans $\mathcal{B}$ (en utilisant la linéarité) :

Proposition 7.1

Si les composantes de f_i dans $\mathcal{B}$ sont $(u_{1,i}, \dots, u_{n,i})^{\sim}$ $(i \leqslant r)$, alors $x : (x_1, \dots, x_n)^{\sim}$ est dans F si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,r} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,r} \end{array} \right.} \tag{7.2}$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1, 2)^{\sim}$. On a

$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$

Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2)^{\sim}$, alors $x \in F$ si, et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & 2\lambda. \end{array} \right.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1, 2, 3)^{\sim}$. On a alors

$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$

Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2, x_3)^{\sim}$, alors $x \in F$ si, et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & 3\lambda. \end{array} \right.$$

3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1,2,0)^\sim$. Alors $x : (x_1 x_2, x_3)^\sim \in F$ ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= 2\lambda \\ x_3 &= 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \rangle u, v \langle$ où $u = (1,2,3)^\sim$ et $v = (2,4,6)^\sim$. Si $x = (x_1, x_2, x_3)^\sim$, alors $x \in F$ ssi

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 &= \lambda + 2\mu \\ x_2 &= 2\lambda + 4\mu \\ x_3 &= 3\lambda + 6\mu. \end{cases} \tag{7.4}$$

On constate que tout s'exprime en fonction du paramètre $\nu = \lambda + 2\mu$. A quoi est-ce dû ? Quelle est la dimension de F ?

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \rangle u, v \langle$ où $u = (1,2,0)^\sim$ et $v = (1,0,1)^\sim$. Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2, x_3)^\sim$, alors x appartient à F si, et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 &= \lambda + \mu \\ x_2 &= 2\lambda \\ x_3 &= \mu. \end{cases}$$

Quelle est la dimension de F ?

6. Dans $E = \mathcal{P}_3$, soit $F = \rangle u, v \langle$ où $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x^3 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$p \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : p(x) = \lambda u(x) + \mu v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dans la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, un polynôme p de composantes (x_1, x_2, x_3, x_4) est dans F si, et seulement si,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= \mu \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= 2\mu. \end{cases}$$

Et pour les matrices ?

Q : Comment trouver une équation de l'ensemble "engendré par" les matrices ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

R : Une matrice $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\rangle u, v \langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : m = \lambda u + \mu v.$$

On traduit ces équations (dans la base habituelle des matrices). La matrice m appartient à $\rangle u, v \langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} a &= \lambda - \mu \\ b &= 2\lambda - \mu \\ c &= 2\lambda \\ d &= \sqrt{2}\mu \end{cases}$$

Quelques exercices

Donner des équations paramétriques (cartésiennes) et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants (dans $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique) :

$$V_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \qquad V_2 = \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle,$$

$$V_3 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \qquad V_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \langle$$

$$V_5 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \qquad V_6 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \langle$$

$$V_7 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0 \} \quad V_8 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0 \}.$$

Equations cartésiennes

Question : dans l'exemple 5, le vecteur x ayant pour composantes $(7,8,3)^\sim$, est-il dans F ? En est-il de même pour $y : (15,22,6)$?

Définition 7.2

Des équations cartésiennes du sous-espace vectoriel F dans la base $\mathcal{B}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les composantes d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ pour qu'il soit dans F.

- On trouve de telles équations en *éliminant les paramètres* dans les équations paramétriques ;
- Elles sont présentées sous forme de systèmes linéaires homogènes ;
- Comme les équations paramétriques, elles ne sont pas uniques ;
- Elles dépendent de la base choisie.

Un exemple, à la main

Pour l'exemple 5, soit $x : (x_1, x_2, x_3)^\sim$, s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \mu \end{cases}, \tag{7.5}$$

alors on a nécessairement

$$\lambda = \frac{x_2}{2}, \quad \text{et} \quad \mu = x_3.$$

L'équation restante dans (7.5) donne une *condition de compatibilité*

$$x_1 = \frac{x_2}{2} + x_3, \quad \text{ou} \quad \boxed{2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0}$$

Inversement, si $(x_1, x_2, x_3)^\sim$ satisfait cette dernière équation, alors on peut *choisir* $\lambda = \frac{x_2}{2}$ et $\mu = x_3$ et ce choix permet alors de satisfaire toutes les conditions de (7.5).
On peut alors déterminer si $y : (4, -2, 2)$ est dans F, ou $(3, -2, 2)$...

Equations cartésiennes : méthode générale

Eliminer les paramètres d'une équation paramétrique, c'est exprimer la compatibilité d'un système linéaire.

Proposition 7.3

Soit un espace vectoriel $F = \rangle u_1, \ldots, u_r \langle$. Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors un vecteur x de composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans F si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_r) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_r | X). \tag{7.6}$$

Preuve :

- écrire les équations paramétriques sous forme matricielle ;
- utiliser les rangs pour exprimer la compatibilité du système.

Rem : Il n'est pas nécessaire que $r = p = \dim F$, mais on peut le supposer, et c'est plus simple.

Le cas des matrices

$$\text{Si} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

alors une matrice $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\rangle u, v \langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} a = \lambda - \mu \\ b = 2\lambda - \mu \\ c = 2\lambda \\ d = \sqrt{2}\mu \end{cases}$$

Cette condition est équivalente à

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & c \\ 0 & \sqrt{2} & d \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} c = 2(b-a) \\ d = \sqrt{2}(b - 2a) \end{cases}$$

Exemples et exercices

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, donner des équations cartésiennes des sous-espaces vectoriels suivants :

$$V_1 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \langle \qquad V_2 = \rangle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \langle,$$

$$V_3 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix} \langle \qquad V_4 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\3\end{pmatrix} \langle$$

$$V_5 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \langle \qquad V_6 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \langle$$

Nombre d'équations et dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

Proposition 7.4

Le sous-espace vectoriel F admet des équations cartésiennes formées d'un système de $n-p$ équations linéaires indépendantes.

Preuve :

- On écrit $F = \rangle f_1, \ldots, f_p \langle$ ($f_1, \ldots, f_p$ indépendants) ;
- On écrit la condition (7.6) en utilisant les déterminants bordés ;
- On constate que cela donne $n-p$ équations indépendantes.

Conséquences :

- Pour une droite vectorielle en dimension 2, on a $2-1=1$ équation ;
- Pour une droite vectorielle en dimension 3, on a $3-1=2$ équations ;
- Pour un plan en dimension 3, on a $3-2=1$ équation ;
- Pour un hyperplan en dimension n, on a $n-(n-1)=1$ équation...

Réciproque

Soient E un espace vectoriel de dim. n et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

Proposition 7.5

L'ensemble des vecteurs x de E dont les composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{B}$ satisfont un système d'équations linéaires homogènes ($AX = 0$) de rang r est un sous-espace vectoriel de dimension $n-r$ de E.

Preuve : Le passage aux composantes étant linéaire, c'est un résultat sur les systèmes linéaires, que nous avons admis.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^4$, muni d'une base $\mathcal{B}$, l'équation
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
décrit un sous-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez-en une base.
2. Dans $\mathbb{R}^5$, le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_5 &= 0 \\ 2x_4 - x_5 &= 0 \end{cases}$$
détermine un sous-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez-en une base.

Cas particuliers : droites et hyperplans

Donnons quelques définitions officielles.

Définition 7.6

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

1. une droite (vectorielle) est un sous-espace vectoriel de dimension 1 ;
2. un plan (vectoriel) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (si $n \geqslant 2$) ;
3. un hyperplan (vectoriel) est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Soient E un espace vect. de dim. n, $\mathcal{B}$ une base, d une droite et $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in d \setminus \{0\}$.
Alors on a $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim \in d$ si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 &= \lambda u_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n &= \lambda u_n. \end{cases} \tag{7.7}$$

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$, alors on élimine facilement le paramètre :

$$\boxed{d \equiv \frac{x_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n}{u_n}.}$$

- Si $u_i = 0$ ($i \leqslant n$), on revient à (7.7), et on trouve

$$\boxed{d \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{u_1} = \cdots \widehat{i} \cdots = \frac{x_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{array} \right.}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Exercice :

- Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, écrire des équations cartésiennes de

$$d_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle,\ d_2 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle,\ d_3 = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \langle,\ d_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \langle.$$

Hyperplans

Dans le cas des hyperplans, il n'y a qu'une équation simple à obtenir. On se donne un esp. vectoriel E de dimension n et une base $\mathcal{B}$.

Proposition 7.7

Soit un hyperplan vectoriel $F = \rangle f_1, \ldots, f_{n-1} \langle$. Si les composantes de f_i dans $\mathcal{B}$ sont $F_i = (f_{1,i}, \ldots, f_{n,i})^{\sim}$, alors un vecteur x de composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans F si, et seulement si,

$$\boxed{\det(F_1, \ldots, F_{n-1}, X) = 0.} \tag{7.8}$$

Exercices :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne de la droite

$$d_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle,\ d_2 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle,\ d_3 = \rangle \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \langle.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne du plan

$$\pi_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle,\ \pi_2 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle,\ \pi_3 = \rangle \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

3. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne de l'hyperplan

$$\pi_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle,\ \pi_5 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle.$$

Faisceaux de plans en dimension 3

Les résultats suivants seront utiles pour les exercices simples.

Proposition 7.8

Dans un espace vectoriel E de dimension 3, deux plans vectoriels distincts se coupent suivant une droite vectorielle.

Proposition 7.9

Dans un espace vectoriel E de dimension 3, si une droite vectorielle d admet pour équation(s) dans une base $\mathcal{B}$ le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & = & 0, \end{array} \right.$$

alors un plan π contient d ssi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ t.q.

$$\pi \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0.$$

L'ensemble des plans contenant une droite d est appelé faisceau de plans d'axe d.