



## Chapitre II : Espaces affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique  
Faculté des Sciences

Liège, le 28 février/6 mars 2013

# Définition générale

## Définition

Un espace affine  $\mathcal{A}$  modelé sur un espace vectoriel  $E$  est un ensemble dont les éléments sont appelés points, muni d'une opération de translation

$$t : \mathcal{A} \times E \rightarrow \mathcal{A} : (A, U) \mapsto t(A, u) = A + u,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- ① On a  $(A + u) + v = A + (u + v)$  pour tous  $A \in \mathcal{A}$  et tous  $u, v \in E$  ;
- ② Pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ , il existe un unique  $u \in E$  tel que  $B = A + u$ .

## Un exemple exotique et un exemple classique

- Définissons  $E$  et  $\mathcal{A}$  comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a + b + c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a + b + c = 3\}.$$

On définit la translation du point  $F$  de  $\mathcal{A}$  par rapport au vecteur  $f$  de  $E$  comme étant l'addition des fonctions  $f$  et  $F$ .

- ① Pour tous  $F \in \mathcal{A}$  et  $f \in E$ , on a  $F + f \in \mathcal{A}$ , puisque par définition on a  $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$ ;
  - ② Pour tous  $F \in \mathcal{A}$  et  $f, g \in E$ , on a  $(F + f) + g = F + (f + g)$ , puisque l'addition des fonctions est associative ;
  - ③ Pour tous  $F, G \in \mathcal{A}$ , alors nécessairement  $f = G - F$  est un élément de  $E$ , et c'est l'unique élément  $f \in E$  tel que  $G = F + f$ .
- Si  $E$  est un espace vectoriel,  $\mathcal{A} = E$  est un espace affine modelé sur  $E$ .

# Premières conséquences

## Proposition

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine.

- 1 Si  $u, v \in E$  satisfont  $P + u = P + v$  pour un  $P \in \mathcal{A}$ , alors  $u = v$  ;
- 2 On a  $P + 0 = P$  pour tout  $P \in \mathcal{A}$  ;
- 3 Si  $P + u = Q + u$  pour  $P, Q \in \mathcal{A}$  et  $u \in E$ , alors  $P = Q$  ;
- 4 L'expression  $P + u_1 + \dots + u_r$ ,  $P \in \mathcal{A}$ ,  $u_1, \dots, u_r \in E$  est bien définie : elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.

## Définition

Soient  $A, B$  deux points de  $\mathcal{A}$ . On note  $\overrightarrow{AB}$  l'unique élément de  $E$  satisfaisant  $A + \overrightarrow{AB} = B$ .

# Une relation célèbre et des notations

## Proposition (Relation de Chasles)

Pour tous points  $P, Q, R$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ . En particulier, on a  $\overrightarrow{PP} = 0$  pour tout  $P \in \mathcal{A}$  et  $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$  pour tous  $P, Q \in \mathcal{A}$ .

- ① L'espace vectoriel définissant un espace affine  $\mathcal{A}$  est aussi noté  $\vec{\mathcal{A}}$ .
- ② On parlera aussi d'un espace affine  $\mathcal{A}$ , sans mentionner  $E$  ;
- ③ On notera dans la mesure du possible les éléments de  $\mathcal{A}$  par des lettres capitales.

## Définition

Quatre points  $ABCD$  définissent un parallélogramme si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

# Vecteurs liés

## Definition

Soit  $O$  un point de  $\mathcal{A}$ . On appelle vecteur lié en  $O$  tout couple  $(O, P)$  où  $P$  est un point de  $\mathcal{A}$ .

## Proposition

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine modelé sur  $E$ . L'ensemble des vecteurs liés en  $O$  est en bijection avec  $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

Preuve : Soit  $f$  l'application qui à  $(O, P)$  fait correspondre  $\overrightarrow{OP}$ .

## Proposition

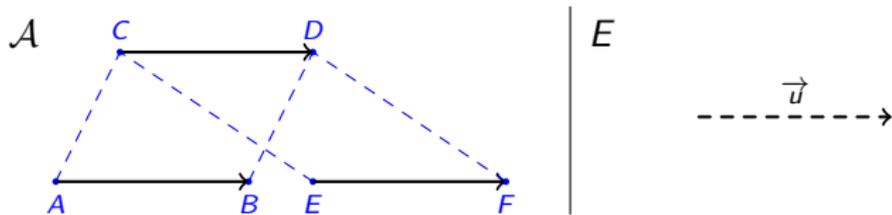
L'ensemble des vecteurs liés en  $O$  peut être muni d'une (seule) structure d'espace vectoriel, qui fait de  $f$  une bijection linéaire. Elle est définie par

- $(O, P) + (O, Q) = (O, O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$  ;
- $\lambda(O, P) = (O, O + \lambda\overrightarrow{OP})$ ,

pour tous  $P, Q \in \mathcal{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur  $u \in E$  la translation qu'il définit sur  $\mathcal{A}$ .



### Définition

Des vecteurs  $(A, B)$  et  $(C, D)$  liés en  $A$  et en  $C$  sont équipollents si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . On note alors  $(A, B) \uparrow (C, D)$ .

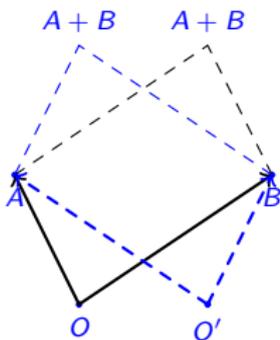
### Définition

Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié  $(A, B)$  est l'ensemble de tous les vecteurs liés  $(C, D)$  équipollents à  $(A, B)$ . Nous l'avons déjà noté  $\overrightarrow{AB}$ .

L'ensemble des vecteurs libres est en bijection avec  $E$ .

## Combinaisons affines

- Question : dans  $\vec{\mathcal{A}}$ , on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-on faire des combinaisons de points ?
- Soient  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Comment définir  $\lambda A + \mu B$  ?



La définition  $A + B = O + \vec{OA} + \vec{OB}$  n'est donc pas intrinsèque : elle dépend de  $O$ .

De manière générale  $\lambda A + \mu B = O + \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$  et

$\lambda A + \mu B = O' + \lambda \vec{O'A} + \mu \vec{O'B}$  ne donneront pas le même résultat.

## Tout est-il perdu ?

### Lemme

On a  $O + \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = O' + \lambda \overrightarrow{O'A} + \mu \overrightarrow{O'B}$  si, et seulement si,  $O = O'$  ou  $\lambda + \mu = 1$ .

Les objets géométriques que l'on peut obtenir à l'aide de cette construction sont les combinaisons

$$P = O + (1 - \mu) \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

C'est normal : on a alors

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = A + \mu \overrightarrow{AB}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

### Proposition

Pour  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , le point

$$P = O + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \quad (1)$$

est indépendant du point  $O$ .

# Définition

## Définition

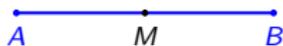
Le point  $P$  défini par la relation (1) est la *combinaison affine* (ou le barycentre) des points  $P_1, \dots, P_n$  de coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On la note

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n.$$

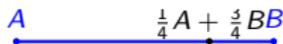
- Le segment  $[A, B]$  est l'ensemble

$$\{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

- Le milieu du segment  $[A, B]$  est le point  $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ .



- On a  $(1 - \lambda)A + \lambda B = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ , et donc  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .
- Quand les coefficients  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont positifs, on peut interpréter la combinaison affine  $(1 - \lambda)A + \lambda B$  comme le centre de masse des points  $A$  et  $B$ , avec les masses respectives  $1 - \lambda$  et  $\lambda$ .



## Une autre construction

- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est aussi un objet géométrique.
- On a  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  donc  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , quel que soit  $O \in \mathcal{A}$ .

### Proposition

Pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , le vecteur

$$u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \in \vec{\mathcal{A}} \quad (2)$$

est indépendant du choix du point  $O \in \mathcal{A}$ .

### Définition

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  satisfont  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , alors le vecteur  $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$  (pour tout  $O \in \mathcal{A}$ ) est noté  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ .

On a donc  $\overrightarrow{AB} = B - A$  pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ .

# Règles de calcul I

## Lemme

Si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ①  $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  ;
- ② Pour tout  $O \in \mathcal{A}$  on a  $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$  ;
- ③ Il existe  $O \in \mathcal{A}$  tel que  $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$ .

## Lemme

Si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ①  $u = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  ;
- ② Pour tout  $O \in \mathcal{A}$  on a  $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$  ;
- ③ Il existe  $O \in \mathcal{A}$  tel que  $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$ .

## Résultats sur les barycentres

La combinaison affine  $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$  est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

### Proposition

Si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , alors on a  $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$  si, et seulement si,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$ .

Exemple :  $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$  est équivalent à  $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = 0$ .

### Proposition

Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , si  $P_1, \dots, P_n$  sont des points de  $\mathcal{A}$ , et si  $m < n$  est tel que  $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \notin \{0, 1\}$ , alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \alpha B_1 + (1 - \alpha) B_2,$$

où  $B_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i$  et  $B_2 = \sum_{i=m+1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha} P_i$ .

## Conséquence : calcul pratique

- ① *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
- ② *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
- ③ On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.
- ④ Exemple : un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.