



Espaces affines

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 27 Février 2014

Définition générale

- Le but : modéliser l'espace dans lequel on vit. Chaque élément d'espace, particulier, est appelé point.
- Les forces agissent sur les points, et les translatent.
- Visualisation : une table de billard.
- Tout doit se passer de manière raisonnable.

Définition 7.1

Un espace affine \mathcal{A} modelé sur un espace vectoriel E est un ensemble dont les éléments sont appelés points, muni d'une opération de translation

$$t : \mathcal{A} \times E \rightarrow \mathcal{A} : (A, u) \mapsto t(A, u) = A + u,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- ① On a $(A + u) + v = A + (u + v)$ pour tous $A \in \mathcal{A}$ et tous $u, v \in E$;
- ② Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $B = A + u$.

Un exemple exotique et un exemple classique

- Définissons E et \mathcal{A} comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a + b + c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : F(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a + b + c = 3\}.$$

On définit la translation du point F de \mathcal{A} par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F .

- ① Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f \in E$, on a $F + f \in \mathcal{A}$, puisque par définition on a $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$;
 - ② Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f, g \in E$, on a $(F + f) + g = F + (f + g)$, puisque l'addition des fonctions est associative ;
 - ③ Pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $f = G - F$ est un élément de E , et c'est l'unique élément $f \in E$ tel que $G = F + f$.
- Si E est un espace vectoriel, $\mathcal{A} = E$ est un espace affine modelé sur E . Les éléments de E ont donc une **double nature**. Les opérations qu'on leur applique dépendent de leur nature.

Premières conséquences

Proposition 7.2

Soit \mathcal{A} un espace affine.

- 1 Si $u, v \in E$ satisfont $P + u = P + v$ pour un $P \in \mathcal{A}$, alors $u = v$;
- 2 On a $P + 0 = P$ pour tout $P \in \mathcal{A}$;
- 3 Si $P + u = Q + u$ pour $P, Q \in \mathcal{A}$ et $u \in E$, alors $P = Q$;
- 4 L'expression $P + u_1 + \dots + u_r$, $P \in \mathcal{A}$, $u_1, \dots, u_r \in E$ est bien définie : elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.

Définition 7.3

Soient A, B deux points de \mathcal{A} . On note \overrightarrow{AB} l'unique élément de E satisfaisant $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Une relation célèbre et des notations

Proposition 7.4 (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de A , on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

- ① L'espace vectoriel définissant un espace affine \mathcal{A} est aussi noté $\vec{\mathcal{A}}$.
- ② On parlera aussi d'un espace affine \mathcal{A} , sans mentionner E ;
- ③ On notera dans la mesure du possible les éléments de \mathcal{A} par des lettres capitales.

Définition 7.5

Quatre points $ABCD$ définissent un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exemple : dans l'espace affine \mathcal{P}_3 :

$$A : x^3 - 3x + 2, \quad B : 4x^3 - 2x + 6, \quad C : x + 1 \quad D : -3x^3 - 3.$$

Vecteurs liés

Definition 1

Soit O un point de \mathcal{A} . On appelle vecteur lié en O tout couple (O, P) où P est un point de \mathcal{A} . On note \mathcal{A}_O l'ensemble de ces vecteurs liés en O .

Proposition 7.6

Soit \mathcal{A} un espace affine modelé sur E . L'ensemble des vecteurs liés en O est en bijection avec $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Preuve : Soit f l'application qui à (O, P) fait correspondre \overrightarrow{OP} .

Proposition 7.7

L'ensemble des vecteurs liés en O peut être muni d'une (seule) structure d'espace vectoriel, qui fait de f une bijection linéaire. Elle est définie par

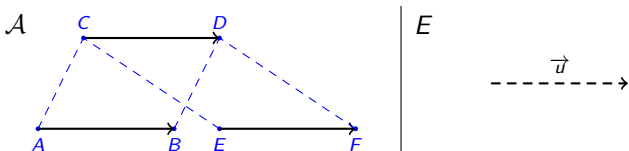
- $(O, P) + (O, Q) = (O, O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$;
- $\lambda(O, P) = (O, O + \lambda\overrightarrow{OP})$,

pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'addition suit la règle du parallélogramme.

Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur $u \in E$ la translation qu'il définit sur \mathcal{A} .



Définition 7.8

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si $\vec{AB} = \vec{CD}$. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

Définition 7.9

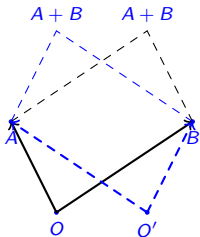
Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié (A, B) est l'ensemble de tous les vecteurs liés (C, D) équipollents à (A, B) . On le note $[(A, B)]$. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des vecteurs libres de \mathcal{A} .

L'ensemble des vecteurs libres est en bijection avec E , via

$$f' : \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow E : [(A, B)] \mapsto \vec{AB}.$$

Combinaisons affines

- Question : dans $\vec{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-on faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?



- Ma proposition, avec O
- La proposition de Raoul, avec O'

- La définition $A + B = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ n'est donc pas **intrinsèque** : elle dépend du choix d'un point supplémentaire (O ou O').
- De manière générale $O + \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ et $O' + \lambda \overrightarrow{O'A} + \mu \overrightarrow{O'B}$ ne donneront pas le même résultat.

Tout est-il perdu ?

Lemme 7.10

On a $O + \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = O' + \lambda \overrightarrow{O'A} + \mu \overrightarrow{O'B}$ si, et seulement si, $O = O'$ ou $\lambda + \mu = 1$.

Les objets géométriques que l'on peut obtenir à l'aide de cette construction sont les combinaisons

$$P = O + (1 - \mu) \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

C'est normal : on a alors

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = A + \mu \overrightarrow{AB}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition 7.11

Pour $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, le point

$$P = O + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \quad (7.1)$$

est indépendant du point O .

Définition

Définition 7.12

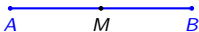
Le point P défini par la relation (7.1) est la *combinaison affine* (ou le barycentre) des points P_1, \dots, P_n de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On la note

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n.$$

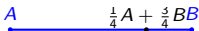
- Le segment $[A, B]$ est l'ensemble

$$\{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

- Le milieu du segment $[A, B]$ est le point $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.



- On a $(1 - \lambda)A + \lambda B = A + \lambda \overrightarrow{AB}$, et donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Quand les coefficients λ et $1 - \lambda$ sont positifs, on peut interpréter la combinaison affine $(1 - \lambda)A + \lambda B$ comme le centre de masse des points A et B , avec les masses respectives $1 - \lambda$ et λ .



Une autre construction

- Le vecteur \overrightarrow{AB} est aussi un objet géométrique.
- On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, quel que soit $O \in \mathcal{A}$.

Proposition 7.13

Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, le vecteur

$$u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \in \vec{\mathcal{A}} \quad (7.2)$$

est indépendant du choix du point $O \in \mathcal{A}$.

Définition 7.14

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ satisfont $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, alors le vecteur $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$ (pour tout $O \in \mathcal{A}$) est noté $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = B - A$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.

Règles de calcul I

Lemme 7.15

Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$;
- ② Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$;
- ③ Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$.

Lemme 7.16

Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① $u = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$;
- ② Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$;
- ③ Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$.

Deux résultats sur les barycentres

La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

Proposition 7.17

Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors on a $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$.

Exemple : $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est équivalent à $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = 0$.

Proposition 7.18

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, si P_1, \dots, P_n sont des points de \mathcal{A} , et si $m < n$ est tel que $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \notin \{0, 1\}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \alpha B_1 + (1 - \alpha) B_2,$$

où $B_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i$ et $B_2 = \sum_{i=m+1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha} P_i$.

Conséquence : calcul pratique

- ① *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
- ② *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
- ③ On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.
- ④ Exemple : un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.