Université de Liège

Chapitre II : Espaces affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 28 février/6 mars 2013

Définition générale

Définition

Un espace affine $\mathcal{A}$ modelé sur un espace vectoriel E est un ensemble dont les éléments sont appelés points, muni d'une opération de translation

$$t : \mathcal{A} \times E \to \mathcal{A} : (A, U) \mapsto t(A, u) = A + u,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. On a $(A + u) + v = A + (u + v)$ pour tous $A \in \mathcal{A}$ et tous $u, v \in E$;
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $B = A + u$.

Un exemple exotique et un exemple classique

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

  $$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

  $$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

  On définit la translation du point F de $\mathcal{A}$ par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F.

  1. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f \in E$, on a $F + f \in \mathcal{A}$, puisque par définition on a $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$;
  2. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f, g \in E$, on a $(F + f) + g = F + (f + g)$, puisque l'addition des fonctions est associative ;
  3. Pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $f = G - F$ est un élément de E, et c'est l'unique élément $f \in E$ tel que $G = F + f$.
- Si E est un espace vectoriel, $\mathcal{A} = E$ est un espace affine modelé sur E.

Premières conséquences

Proposition

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine.

1. *Si $u, v \in E$ satisfont $P + u = P + v$ pour un $P \in \mathcal{A}$, alors $u = v$;*
2. *On a $P + 0 = P$ pour tout $P \in \mathcal{A}$;*
3. *Si $P + u = Q + u$ pour $P, Q \in \mathcal{A}$ et $u \in E$, alors $P = Q$;*
4. *L'expression $P + u_1 + \cdots + u_r$, $P \in \mathcal{A}$, $u_1, \ldots, u_r \in E$ est bien définie : elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.*

Définition

Soient A, B deux points de $\mathcal{A}$. On note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E satisfaisant $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Une relation célèbre et des notations

Proposition (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de A, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

1. L'espace vectoriel définissant un espace affine $\mathcal{A}$ est aussi noté $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.
2. On parlera aussi d'un espace affine $\mathcal{A}$, sans mentionner E ;
3. On notera dans la mesure du possible les éléments de $\mathcal{A}$ par des lettres capitales.

Définition

Quatre points $ABCD$ définissent un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vecteurs liés

Definition

Soit O un point de $\mathcal{A}$. On appelle vecteur lié en O tout couple (O, P) où P est un point de $\mathcal{A}$.

Proposition

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine modelé sur E. L'ensemble des vecteurs liés en O est en bijection avec $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Preuve : Soit f l'application qui à (O, P) fait correspondre $\overrightarrow{OP}$.

Proposition

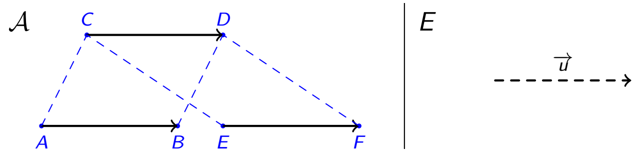
L'ensemble des vecteurs liés en O peut être muni d'une (seule) structure d'espace vectoriel, qui fait de f une bijection linéaire. Elle est définie par

- $(O, P) + (O, Q) = (O, O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$;
- $\lambda(O, P) = (O, O + \lambda\overrightarrow{OP})$,

pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur $u \in E$ la translation qu'il définit sur $\mathcal{A}$.



Définition

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

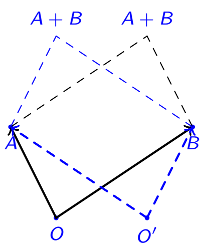
Définition

Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié (A, B) est l'ensemble de tous les vecteurs liés (C, D) équipollents à (A, B). Nous l'avons déjà noté $\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des vecteurs libres est en bijection avec E.

Combinaisons affines

- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?



La définition $A + B = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ n'est donc pas intrinsèque : elle dépend de O.
De manière générale $\lambda A + \mu B = O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ et
$\lambda A + \mu B = O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ ne donneront pas le même résultat.

Tout est-il perdu ?

Lemme

On a $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ *si, et seulement si,* $O = O'$ *ou* $\lambda + \mu = 1$.

Les objets géométriques que l'on peut obtenir à l'aide de cette construction sont les combinaisons

$$P = O + (1-\mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

C'est normal : on a alors

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = A + \mu\overrightarrow{AB}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition

Pour $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, *le point*

$$P = O + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n} \tag{1}$$

est indépendant du point O.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition

Définition

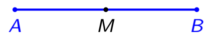
Le point P défini par la relation (1) est la *combinaison affine* (ou le barycentre) des points $P_1, \ldots, P_n$ de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On la note

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

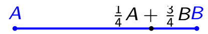
- Le segment $[A, B]$ est l'ensemble

$$\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

- Le milieu du segment $[A, B]$ est le point $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.



- On a $(1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, et donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Quand les coefficients λ et $1-\lambda$ sont positifs, on peut interpréter la combinaison affine $(1-\lambda)A + \lambda B$ comme le centre de masse des points A et B, avec les masses respectives $1-\lambda$ et λ.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une autre construction

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un objet géométrique.
- On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, quel que soit $O \in \mathcal{A}$.

Proposition

Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, *le vecteur*

$$u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n} \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \tag{2}$$

est indépendant du choix du point $O \in \mathcal{A}$.

Définition

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ satisfont $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, alors le vecteur $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$ (pour tout $O \in \mathcal{A}$) est noté $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = B - A$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Règles de calcul I

Lemme

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. *Pour tout* $O \in \mathcal{A}$ *on a* $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$;
3. *Il existe* $O \in \mathcal{A}$ *tel que* $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$.

Lemme

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $u = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. *Pour tout* $O \in \mathcal{A}$ *on a* $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$;
3. *Il existe* $O \in \mathcal{A}$ *tel que* $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résultats sur les barycentes

La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

Proposition

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors on a $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$.

Exemple : $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est équivalent à $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = 0$.

Proposition

Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, si $P_1, \ldots, P_n$ sont des points de $\mathcal{A}$, et si $m < n$ est tel que $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \notin \{0, 1\}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \alpha B_1 + (1 - \alpha) B_2,$$

où $B_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i$ et $B_1 = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha} P_i$.

Conséquence : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
2. *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
3. On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.
4. Exemple : un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.