Variétés affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 7 mars 2013

Définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine. Une variété affine de $\mathcal{A}$ est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1\}$ est une variété affine ;
- Dans $\mathcal{A}$, si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine $\mathcal{A}$, $\{P\}$ et $\mathcal{A}$ sont des variétés affines.

Proposition (Exemple fondamental)

Si A est un point de $\mathcal{A}$ et si F un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de $\mathcal{A}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Caractérisation

Proposition

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{V}$.

1. *L'ensemble*
$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. *On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.*
3. *On a $\mathcal{V} = P + V_P$.*
4. *De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.*
5. *Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans $\mathcal{V}$.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Caractérisation

Proposition

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{V}$.

1. *L'ensemble*
$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. *On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.*
3. *On a $\mathcal{V} = P + V_P$.*
4. *De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.*
5. *Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans $\mathcal{V}$.*

Définition

Si $\mathcal{V}$ est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{V}$. On le note $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un peu de nomenclature

Définition

- Un espace affine $\mathcal{A}$ est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n. On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ est la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n - 1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- *Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;*
- *Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle\overrightarrow{AB}\langle = \{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;*
- *La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;*
- *Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- *Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;*
- *Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle \overrightarrow{AB} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;*
- *La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;*
- *Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.*

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u \langle$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- *Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;*
- *Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle\overrightarrow{AB}\langle = \{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;*
- *La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;*
- *Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.*

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u\langle$.

Proposition (Plan déterminé par trois points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geqslant 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- *Il existe un unique plan π qui contient A, B et C, on le note ABC ;*
- *On a $\overrightarrow{\pi} = \rangle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\langle = \{\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;*
- *Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Enveloppes affines

Définition

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de $P_1, \ldots, P_r$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$.

- *L'enveloppe affine $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;*
- *Elle est incluse dans toute variété affine contenant $P_1, \ldots, P_r$.*

Proposition

On a $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Indépendance affine

Définition

Des points $P_1, \ldots, P_r$ d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition

Les points $P_1, \ldots, P_r$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont linéairement indépendants.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.