



Variétés affines

Pierre Mathonet

Présentation provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 7 mars 2013

Définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition

Soit \mathcal{A} un espace affine. Une variété affine de \mathcal{A} est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1 \right\}$ est une variété affine ;
- Dans \mathcal{A} , si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine \mathcal{A} , $\{P\}$ et \mathcal{A} sont des variétés affines.

Proposition (Exemple fondamental)

Si A est un point de \mathcal{A} et si F un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de \mathcal{A} .

Caractérisation

Proposition

Soit \mathcal{V} une variété affine de \mathcal{A} et P un point de \mathcal{V} .

① L'ensemble

$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

② On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.

③ On a $\mathcal{V} = P + V_P$.

④ De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

⑤ Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans \mathcal{V} .

Définition

Si \mathcal{V} est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{V} . On le note $\vec{\mathcal{V}}$.

Un peu de nomenclature

Définition

- Un espace affine \mathcal{A} est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n . On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine \mathcal{V} de \mathcal{A} est la dimension de $\vec{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geq 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n - 1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition (Droite déterminée par deux points)

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B , on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\vec{d} = \langle \vec{AB} \rangle = \{ \lambda \vec{AB} : \lambda \in \mathbb{R} \}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB , alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de \vec{d} est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\vec{d} = \langle u \rangle$.

Proposition (Plan déterminé par trois points)

Soit \mathcal{A} un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geq 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- Il existe un unique plan π qui contient A, B et C , on le note ABC ;
- On a $\vec{\pi} = \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \{ \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$;
- Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C .

Enveloppes affines

Définition

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de P_1, \dots, P_r est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$.

- L'enveloppe affine $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;
- Elle est incluse dans toute variété affine contenant P_1, \dots, P_r .

Proposition

On a $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \overrightarrow{\langle P_1 P_2, \dots, P_1 P_r \rangle}$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \overrightarrow{\langle P_1 P_2, \dots, P_1 P_r \rangle}.$$

Indépendance affine

Définition

Des points P_1, \dots, P_r d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition

Les points P_1, \dots, P_r sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont linéairement indépendants.