



Variétés affines

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 5 mars 2014

Définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition 9.1

Soit \mathcal{A} un espace affine. Une variété affine de \mathcal{A} est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1 \right\}$ est une variété affine ;
- Dans \mathcal{A} , si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine \mathcal{A} , $\{P\}$ et \mathcal{A} sont des variétés affines.

Proposition 9.2 (Exemple fondamental)

Si A est un point de \mathcal{A} et si F un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de \mathcal{A} .

Caractérisation

Proposition 9.3

Soit \mathcal{V} une variété affine de \mathcal{A} et P un point de \mathcal{V} .

- 1 L'ensemble

$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

- 2 On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.
- 3 On a $\mathcal{V} = P + V_P$.
- 4 De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.
- 5 Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans \mathcal{V} .

Preuve : Faire un dessin.

- 1 Utiliser la caractérisation des s.e.v ;
- 2 Traduire la définition de V_P ;
- 3 Deux inclusions ;
- 4 Supposer qu'il y en a deux et montrer qu'ils sont égaux ;
- 5 Comparer V_P et $V_{P'}$, pour P et P' dans \mathcal{V} .

Quelques définitions

Définition 9.4

Si \mathcal{V} est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de \mathcal{V} . On le note $\vec{\mathcal{V}}$.

Définition 9.5

- Un espace affine \mathcal{A} est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n . On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine \mathcal{V} de \mathcal{A} est la dimension de $\vec{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geq 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n - 1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 9.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B , on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB , alors $AB = PQ$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 9.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B , on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB , alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de \vec{d} est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\vec{d} = \langle u \rangle$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 9.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B , on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\vec{d} = \langle \vec{AB} \rangle = \{ \lambda \vec{AB} : \lambda \in \mathbb{R} \}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB , alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de \vec{d} est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\vec{d} = \langle u \rangle$.

Proposition 9.7 (Plan déterminé par trois points)

Soit \mathcal{A} un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geq 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- Il existe un unique plan π qui contient A, B et C , on le note ABC ;
- On a $\vec{\pi} = \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \{ \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$;
- Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C .



Enveloppes affines

C'est la généralisation des théorèmes précédents.

Définition 9.8

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de P_1, \dots, P_r est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition 9.9

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$.

- L'enveloppe affine $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;
- Elle est incluse dans toute variété affine contenant P_1, \dots, P_r .

Proposition 9.10

On a $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \rangle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_r} \langle$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \rangle \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_r} \langle.$$



Indépendance affine

Définition 9.11

Des points P_1, \dots, P_r d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition 9.12

Les points P_1, \dots, P_r sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont linéairement indépendants.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

Proposition 9.13

L'intersection de deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 9.14

Deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

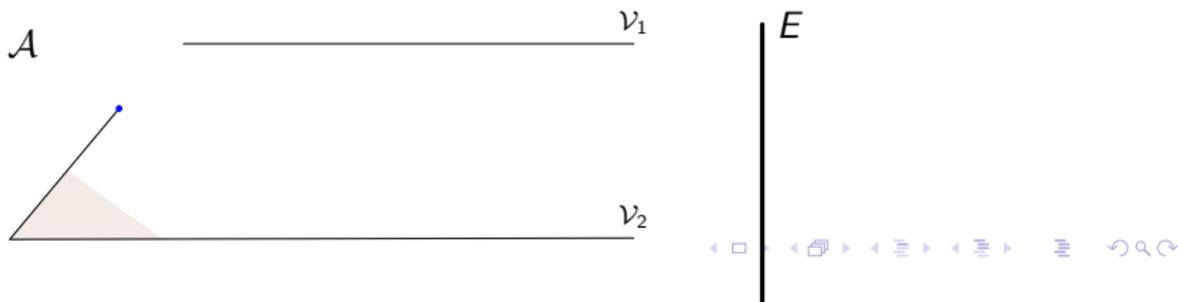
Proposition 9.13

L'intersection de deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 9.14

Deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

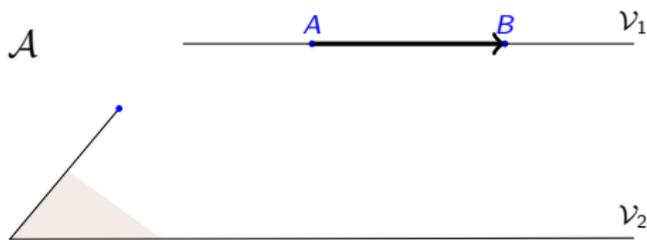
Proposition 9.13

L'intersection de deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 9.14

Deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

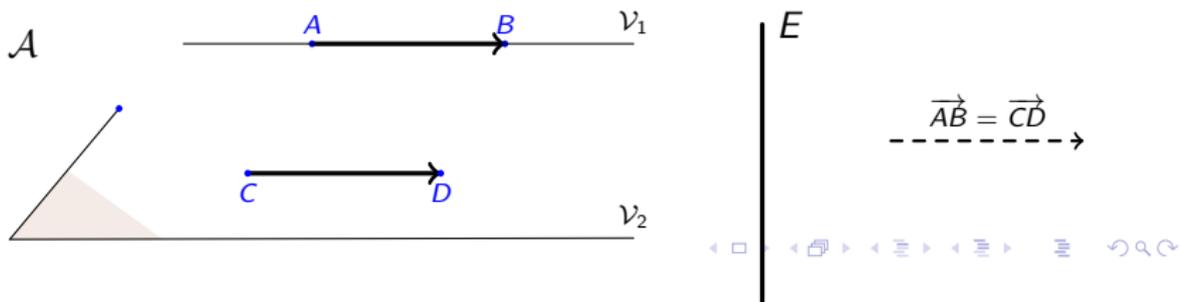
Proposition 9.13

L'intersection de deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 9.14

Deux variétés affines \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Propriétés

Proposition 9.15

- 1 Si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ et $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ ou $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$;
- 2 Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, alors $\mathcal{V}_1 // \mathcal{V}_2$ si, et seulement si $\vec{\mathcal{V}}_1 = \vec{\mathcal{V}}_2$;
- 3 Dans ce dernier cas, si de plus $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$, alors $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$;
- 4 Soient \mathcal{V} une variété affine et $A \in \mathcal{A}$. Il existe une unique variété affine \mathcal{V}_A telle que
 - $A \in \mathcal{V}_A$;
 - $\mathcal{V}_A // \mathcal{V}$;
 - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 9.16

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension 2. Deux droites de \mathcal{A} sont soit parallèles soit sécantes.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 9.16

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension 2. Deux droites de \mathcal{A} sont soit parallèles soit sécantes.

Définition 9.17

Dans un espace affine \mathcal{A} de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 9.16

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension 2. Deux droites de \mathcal{A} sont soit parallèles soit sécantes.

Définition 9.17

Dans un espace affine \mathcal{A} de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 9.16

Soit \mathcal{A} un espace affine de dimension 2. Deux droites de \mathcal{A} sont soit parallèles soit sécantes.

Définition 9.17

Dans un espace affine \mathcal{A} de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Proposition 9.18

Soit $\dim \mathcal{A} = 3$. Soient 2 droites $d_1 = A+\rangle u\langle$, $d_2 = A+\rangle v\langle$.

- *Si la famille (u, v) est linéairement dépendante, alors $d_1 \parallel d_2$;*
- *Si (u, v) est linéairement indépendante et $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement dépendante, alors d_1 et d_2 sont sécantes.*
- *Si la famille $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement indépendante, alors d_1 et d_2 sont gauches.*

Positions relatives de droites et plans en dimension 3

Soit un espace affine \mathcal{A} de dimension 3.

Proposition 9.19

Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Proposition 9.20

Soit d une droite et π un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit d et π sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.

Exercices

- 1 Dans \mathbb{R}^2 , la droite déterminée par $A = (1, 2)^\sim$, et $B = (3, 4)^\sim$ et celle déterminée par $C = (4, 5)^\sim$ et $D = (7, 10)^\sim$ sont-elles parallèles ?
- 2 Même question dans \mathbb{R}^2 pour $A = (1, 2)^\sim$, $B = (3, 4)^\sim$, $C = (4, 5)^\sim$, $D = (10, 11)^\sim$.
- 3 Exprimer qu'un point $(x, y)^\sim$ de \mathbb{R}^2 appartient à la droite définie par les points $A = (1, 3)^\sim$ et $B = (1, 4)^\sim$.
- 4 Dans \mathbb{R}^3 , on considère la droite AB où $A = (1, 2, 3)$ et $B = (-1, 1, 3)$. Que vaut le vecteur \overrightarrow{AB} ? Décrire le segment $[A, B]$. Décrire la droite AB . Cette droite est-elle parallèle au plan affine d'équation $x = 1$?
- 5 Dans l'espace \mathbb{R}_2^2 vu comme un espace vectoriel, décrire la droite affine AB si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$