Université de Liège

Variétés affines

Présentation provisoire

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 5 mars 2014

Définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition 9.1

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine. Une variété affine de $\mathcal{A}$ est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1\}$ est une variété affine ;
- Dans $\mathcal{A}$, si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine $\mathcal{A}$, $\{P\}$ et $\mathcal{A}$ sont des variétés affines.

Proposition 9.2 (Exemple fondamental)

Si A est un point de $\mathcal{A}$ et si F un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de $\mathcal{A}$.

Caractérisation

Proposition 9.3

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{V}$.

1. *L'ensemble*
$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. *On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.*
3. *On a $\mathcal{V} = P + V_P$.*
4. *De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.*
5. *Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans $\mathcal{V}$.*

Preuve : Faire un dessin.

1. Utiliser la caractérisation des s.e.v ;
2. Traduire la définition de V_P ;
3. Deux inclusions ;
4. Supposer qu'il y en a deux et montrer qu'ils sont égaux ;
5. Comparer V_P et $V_{P'}$, pour P et P' dans $\mathcal{V}$.

Quelques définitions

Définition 9.4

Si $\mathcal{V}$ est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{V}$. On le note $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Définition 9.5

- Un espace affine $\mathcal{A}$ est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n. On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ est la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n-1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 9.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- *Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;*
- *Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle \overrightarrow{AB} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;*
- *La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;*
- *Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.*

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un vecteur directeur de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u \langle$.

Proposition 9.7 (Plan déterminé par trois points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geqslant 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- *Il existe un unique plan π qui contient A, B et C, on le note ABC ;*
- *On a $\overrightarrow{\pi} = \rangle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;*
- *Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C.*

Enveloppes affines

C'est la généralisation des théorèmes précédents.

Définition 9.8

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de $P_1, \ldots, P_r$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition 9.9

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$.

- *L'enveloppe affine $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;*
- *Elle est incluse dans toute variété affine contenant $P_1, \ldots, P_r$.*

Proposition 9.10

On a $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle.$$

Indépendance affine

Définition 9.11

Des points $P_1, \ldots, P_r$ d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition 9.12

Les points $P_1, \ldots, P_r$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont linéairement indépendants.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

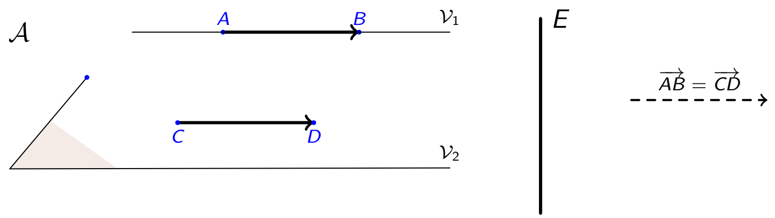
Proposition 9.13

L'intersection de deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est soit vide soit une variété affine. Dans ce cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 9.14

Deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Propriétés

Proposition 9.15

1. *Si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$ et $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ ou $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$;*
2. *Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, alors $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} = \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$;*
3. *Dans ce dernier cas, si de plus $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$, alors $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$;*
4. *Soient $\mathcal{V}$ une variété affine et $A \in \mathcal{A}$. Il existe une unique variété affine $\mathcal{V}_A$ telle que*
   - $A \in \mathcal{V}_A$;
   - $\mathcal{V}_A /\!/ \mathcal{V}$;
   - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 9.16

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes.

Définition 9.17

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Proposition 9.18

Soit $\dim \mathcal{A} = 3$. Soient 2 droites $d_1 = A + \rangle u \langle$, $d_2 = A + \rangle v \langle$.

- *Si la famille (u, v) est linéairement dépendante, alors $d_1 /\!/ d_2$;*
- *Si (u, v) est linéairement indépendante et $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement dépendante, alors d_1 et d_2 sont sécantes.*
- *Si la famille $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est linéairement indépendante, alors d_1 et d_2 sont gauches.*

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives de droites et plans en dimension 3

Soit un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3.

Proposition 9.19

Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Proposition 9.20

Soit d une droite et π un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit d et π sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la droite déterminée par $A = (1, 2)^\sim$, et $B = (3, 4)^\sim$ et celle déterminée par $C = (4, 5)^\sim$ et $D = (7, 10)^\sim$ sont-elles parallèles ?
2. Même question dans $\mathbb{R}^2$ pour $A = (1, 2)^\sim$, $B = (3, 4)^\sim$, $C = (4, 5)^\sim$, $D = (10, 11)^\sim$.
3. Exprimer qu'un point $(x, y)^\sim$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la droite définie par les points $A = (1, 3)^\sim$ et $B = (1, 4)^\sim$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la droite AB où $A = (1, 2, 3)$ et $B = (-1, 1, 3)$. Que vaut le vecteur $\overrightarrow{AB}$? Décrire le segment $[A, B]$. Décrire la droite AB. Cette droite est-elle parallèle au plan affine d'équation $x = 1$?
5. Dans l'espace $\mathbb{R}^2_2$ vu comme un espace vectoriel, décrire la droite affine AB si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.