Espaces vectoriels

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, février 2017

Contenu du cours

Contenu :

1. Espaces vectoriels (les “flèches”)
2. Espaces affines (les “points”)
3. Espaces vectoriels euclidiens (produit scalaire, norme, produit vectoriel)
4. Espaces affines euclidiens (Pythagore et compagnie,...)
5. Théorie des courbes (mouvements,...)
6. Un peu de théorie des surfaces (Sphères, cylindres,...)

Point de vue :

1. On part de la définition “intuitive” en dimension 2 ou 3
2. On pose une définition formelle qui la généralise
3. Cela implique souvent d’aller “à l’envers” par rapport à la démarche du secondaire.

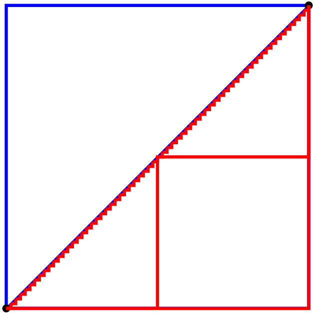
Spécificités :

1. C’est un cours de mathématiques. On se base sur la *logique*
2. On démontre les propriétés
3. C’est assez abstrait.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Pourquoi ne pas se fier à sa vue ?

Considérons un carré de côté 1. Quelle est la longueur de la diagonale ?



On voit bien que $2 = \sqrt{2}$!

Résumé de la preuve :

- Quand le nombre de changements de direction tend vers l'infini, le pacman parcourt la diagonale du carré, donc $\sqrt{2}cm$.
- Mais à chaque étape, avec n "angles", le pacman parcourt $d_n = 2cm$.
- On voit donc que $\lim_{n\to+\infty} d_n = \sqrt{2}$.
- On sait que $\lim_{n\to+\infty} d_n = 2$.
- Comme la limite d'une suite convergente est unique, on conclut donc que $2 = \sqrt{2}$! Donc $2 = 4$, $1 = 2 = 0$ etc...

Morale générale : on ne peut pas donc toujours croire ce que l'on voit !

Intérêt : on peut considérer des situations générales

1. Quel est l'angle entre les "tableaux" (matrices)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Comment trouver une équation de l'ensemble "engendré par" ces matrices ?
3. Peut-on décrire une droite déterminée par ces matrices ?
4. Les fonctions cos et sin, définies sur $[0, 2\pi]$, sont-elles orthogonales ?
5. Les points

$$A : x^3 - 3x + 2, \quad B : 4x^3 - 2x + 6, \quad C : x + 1 \quad D : -3x^3 - 3$$

forment-ils un parallélogramme ?

Comment étudier le cours ?

1. Lire les engagements pédagogiques (MyUlg).
2. Lire le cours ou les “slides” à l’avance (3-4 pages), pour voir de quoi on va parler.
3. Etudier les définitions (obligatoirement pour le cours suivant), puis les énoncés, puis les démonstrations.
   Attention : ne pas se contenter de lire. Noter les liens que l’on a faits, faire un résumé de ce qui se passe. Essayer de les réécrire en conditions d’interrogation.
4. Se procurer la liste des questions de l’examen oral ainsi que des examens écrits des années précédentes.
5. Poser des questions (avant, pendant, ou après le cours).
6. Faire les exercices proposés. Relire ses solutions en cherchant les fautes.
7. Ne pas s’y prendre au dernier moment.
8. Généralement tous les mots comptent, voir à ce propos Kaamelott, UNAGI II sur youtube.

Les espaces vectoriels

Définition 1.2.1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E non vide muni des opérations d'addition $+$ et de multiplication scalaire $\cdot$ t.q.

1. L'addition est interne : on a $+ : E \times E \to E : (u, v) \mapsto u + v$, et la multiplication scalaire satisfait $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$;
2. $+$ est associative : on a $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$;
3. $+$ admet un élément neutre $0 \in E$ t.q. $0 + u = u + 0 = u$ pour tout $u \in E$;
4. Tout élément $u \in E$ admet un opposé $-u$ pour l'addition, satisfaisant $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
5. $+$ est commutative : on a $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$;
6. On a $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour tous $u \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. On a $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$.
8. La multiplication distribue l'addition des vecteurs : on a $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ pour tous $u, v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$;
9. La multiplication distribue l'addition des réels : on a $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in E$;

L'exemple le plus simple (Exemple 1.2.2)

On considère

$$\mathbb{R}^2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}$$

muni des opérations

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et

$$r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $r \in \mathbb{R}$.
Démontrer que c'est un espace vectoriel.

Exemples exotiques (Exemple 1.2.4)

Démontrer que les structures suivantes sont des espaces vectoriels.

1. L'ensemble $E =]0, +\infty[^2$ muni des opérations d'addition $\boxplus$ et de multiplication $\odot$ définies par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in]0, +\infty[, \tag{1.1}$$

   et

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}, \quad \forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

   est un espace vectoriel.

2. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication scalaire par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) & = & \lambda f(x) \end{array} \right., \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

   pour toutes fonctions f et g et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples exotiques II

3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $P \in \mathcal{P}$ si, et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$P(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Les coefficients $c_0, \ldots, c_n$ sont uniques. La somme de ces fonctions et la multiplication scalaires sont définies par (1.3). Alors $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel.

4. L'ensemble $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations définies par (1.3), est un espace vectoriel.

5. L'ensemble $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, muni encore des mêmes opérations, est un espace vectoriel.

6. L'ensemble $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\}$, muni des opérations (1.3), est un espace vectoriel ; l'ensemble $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 3\}$, muni des opérations (1.3), n'en est pas un.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemple fondamental : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (1.2.5)

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est fait des n-uplets de nombres que l'on note verticalement

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour gagner de la place, on notera cet élément $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$. L'opération $\sim$ est la transposition que l'on reverra au cours de calcul matriciel.
L'addition et la multiplication scalaires sont définies de la manière la plus simple qui soit. On définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $\lambda, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
Cet ensemble muni de ces opérations est un espace vectoriel.
Si on n'indique pas les opérations, ce sera toujours celles-ci qui seront utilisées.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

Exemple 1.2.6

Une *matrice* de type (p, q) est un tableau rectangulaire de nombre réels, ayant p lignes et q colonnes de nombres. On dit aussi simplement une matrice à p lignes et q colonnes. Alors $\mathbb{R}^p_q$ est l'ensemble de toutes ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & e \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^1_3.$$

Définition

L'élément i, j de la matrice A, noté $(A)_{i,j}$, est le nombre situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

$$(A)_{1,3} = 3, \quad (B)_{3,2} = \sqrt{3}, \quad (B)_{2,3} = e, \ldots$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p_q$.

- Une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^p_q$ a donc la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix},$$

  On a alors $(A)_{i,j} = a_{i,j}$. On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

- La somme et la multiplication scalaire des matrices sont définies "élément à élément" : on a

$$(A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}, \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j}$$

  pour tous $A, B \in \mathbb{R}^p_q$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les matrices n'ayant qu'une seule ligne sont appelées matrices lignes ou vecteurs lignes, et celles n'ayant qu'une colonne sont appelées matrices colonnes ou vecteurs colonnes.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Premières propriétés

Proposition 1.2.3

Soit E un espace vectoriel.

1. L'élément neutre pour l'addition est unique ;
2. Tout vecteur $u \in E$ admet un unique opposé ;
3. Pour tout $u \in E$, on a $0 \cdot u = 0$ [1] ;
4. Pour tout $u \in E$, on a $-u = (-1) \cdot u$ [1] ;
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot 0 = 0$;
6. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ satisfont $\lambda \cdot u = 0$, alors on a $u = 0$ ou $\lambda = 0$.

1. routine ;
2. routine ;
3. le truc est $u = 1 \cdot u = (1 + 0) \cdot u$;
4. $(-1) \cdot u$ a la bonne propriété ;
5. le truc est $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (u + 0)$ pour $u \in E$;
6. si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est bien défini.

1. Les zéros et les signes - de part et d'autre de l'égalité n'ont pas le même sens.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Remarques et notations

Remarques :

1. Ce sont les propriétés principales de l'addition et de la multiplication scalaire. Toutes les autres doivent et peuvent être démontrées de la même façon à partir des conditions intervenant dans la définition, ou à partir de ce que nous avons déjà démontré.
2. Dans la suite, nous ne noterons plus la multiplication du vecteur u par le réel λ par $\lambda \cdot u$, mais simplement par λu.
3. Nous n'aurons pas de notation particulière pour les vecteurs. Attention à mes notations *locales*.

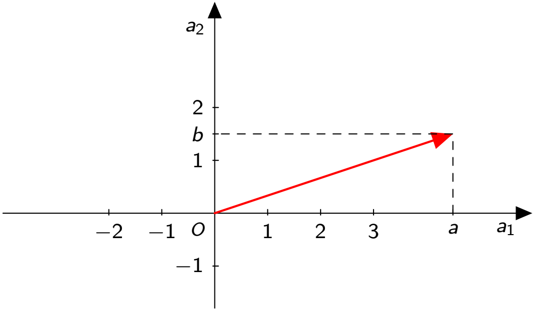
Notations :

1. La soustraction $u - v$ est définie par $u + (-v)$;
2. La division d'un vecteur u par un réel a non nul est définie par $\frac{u}{a} = \frac{1}{a}u$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une représentation intuitive et commode

Dans l'enseignement secondaire, on trace deux droites perpendiculaires et orientées a_1 et a_2, qui se coupent en O. On porte sur ces droites les mêmes unités. Le couple $(a,b)^\sim$ est alors représenté par le point A obtenu en portant la valeur a sur le premier axe et la valeur b sur le second : on peut représenter l'élément $(a,b)^\sim$ de *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ par une flèche de O à A



Attention : ces objets ne sont pas encore définis dans le cours ! ! ! Il s'agit donc d'une représentation pour guider l'intuition.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Combinaisons linéaires

Soit E un espace vectoriel, $u_1, \dots, u_p \in E$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

Définition 1.2.7

Le vecteur défini par

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_p$, avec les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Exemple :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1,$$

on a directement

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 2u_1 + 3u_2 - u_3 = \dots$$

Remarque : on a aussi $2u_1 + 3u_2 - u_3 = 9u_2 + 3u_3$.

Quelques exemples (Exemple 1.2.8)

1. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u_1 = (1, 2, 3)^\sim$, $u_2 = (-1, 0, 1)^\sim$ et $u_3 = (4, 2, 1)^\sim$, alors on a
$$3u_1 - u_2 + u_3 = \ldots$$
2. Dans $(]0, +\infty[^2, \boxplus, \odot)$, si $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors on a
$$3 \odot u_1 \boxplus 2 \odot u_2 = \ldots$$

Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.1

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide V de E qui contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Autrement dit, un sous-ensemble V non vide de E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{c} p \in \mathbb{N}_0 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \\ u_1, \ldots, u_p \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \in V.$$

Proposition 1.3.2

Une partie non vide V d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, pour tous $u, v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu et $u + v$ appartiennent à V.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples avec des équations

Exemple 1.3.3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel standard. Alors

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de E. De même l'ensemble

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ x_1 - 5x_2 & = & 0 \end{array} \right. \}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Qu'en est-il de

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \} ?$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples paramétriques

Exemple 1.3.4

Soit E un espace vectoriel et $u \in E$. Alors,

$$V_3 = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. De même, si u et v sont dans E, alors

$$V_4 = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Utilité

Proposition 1.3.7

Si $(E, +, 0, \cdot)$ est un espace vectoriel et si V est un sous-espace vectoriel de E, alors $(V, +, 0, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Attention, la réciproque est fausse : si E est un espace vectoriel, et si V est un sous-ensemble de E qui admet une structure d'espace vectoriel, cela n'implique pas que V est un sous-espace vectoriel de E.
Exemple : $]0, +\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Intersections de sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.8

Si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, l'intersection de V_1 et V_2 est l'ensemble

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in E : x \in V_1 \quad \text{et} \quad x \in V_2\}.$$

Proposition 1.3.9

Soient V_1 et V_2 des sous-espaces vectoriels de E. Alors $V_1 \cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercices :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'intersection des sous-espaces vectoriels

$$V_1 = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0\}$$

3. Faire de même avec les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ suivants

$$V_1 = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{\mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

4. Trouver l'intersection des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$V_1 = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

5. Faire de même avec

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} \text{ et}$$

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4x + y - z = 0\}.$$

Enveloppes linéaires

Fait : si V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, $V_1 \cup V_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel (en général).

Définition 1.3.10

Soit E un espace vectoriel et A une partie non vide de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, ou l'enveloppe linéaire de A est l'ensemble

$$\rangle A \langle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p : p \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, a_1, \ldots a_p \in A\}.$$

Proposition 1.3.11

Pour toute partie A non vide de E, $\rangle A \langle$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient A et est inclus dans tout sous-espace vectoriel V contenant A. C'est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.

Donc, $\rangle A \langle$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A.

Exercice : Soient $u, v \in E$, déterminer $\rangle \{u\} \langle$ et $\rangle \{u, v\} \langle$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.12

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de V_1 et V_2, notée $V_1 + V_2$ est l'ensemble

$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in V_1, \quad u_2 \in V_2\}.$$

Proposition 1.3.13

Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de E. On a de plus $V_1 + V_2 = \rangle V_1 \cup V_2 \langle$.

Notation : si $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$, on note $\rangle A \langle$ par $\rangle u_1, \ldots, u_p \langle$ et on a

$$\rangle u_1, \ldots, u_n \langle = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque : on a $\rangle u \langle + \rangle v \langle = \rangle u, v \langle$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples et sommes directes

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser les éléments de $\rangle u, v\langle$ si $u = (1, 2, -3)^\sim$ et $v = (-1, 0, 1)^\sim$.
Exemple 2 : Dans l'espace $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré au plus 2, caractériser les éléments de $\rangle P, Q\langle$ si P et Q sont définies par $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3.14

On dit que la somme des sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 est directe si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. On note alors cette somme $V_1 \oplus V_2$.

Proposition 1.3.15

Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. La somme de V_1 et V_2 est directe si, et seulement si, tout vecteur u de $V_1 + V_2$ se décompose *de manière unique* en $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in V_1$ et $u_2 \in V_2$.

Parties génératrices

Définition 1.4.1

Un ensemble de vecteurs $G \subset E$ est une *partie génératrice de* E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de G.

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^2$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\}$, est une partie génératrice.

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}^3$, $G = \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ est une partie génératrice.

Exemple 4 : Dans $\mathbb{R}^3$, $NG = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ n'est pas génératrice.

Exemple 5 : Dans $\mathcal{P}_2$, $G = \{P, Q, R\}$ où $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = x - 1$ $R(x) = 2$, pour tout x, est une partie génératrice.

Exercice : trouver d'autres parties génératrices de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Espaces de dimension finie

- Si $G = \{u_1, \ldots, u_p\}$ est une partie génératrice de E, on ordonne ses éléments pour avoir une *famille* $(u_1, \ldots, u_p)$.
- A tout vecteur u s'écrivant

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p,$$

on associe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)^\sim \in \mathbb{R}^p$.

Définition 1.4.3

Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une partie génératrice contenant un nombre fini d'éléments.

Contre-exemple : L'espace vectoriel des fonctions polynomiales n'est pas de dimension finie.

Familles libres I

Reprenons l'exemple 2 ci-dessus : On a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & x+2y+5z \\ b & = & 2y+4z, \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a-b-z \\ y & = & \frac{b-4z}{2}. \end{array} \right.$$

On a donc, quel que soit z :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{b}{2}-2z)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

On a donc plusieurs triplets possibles pour chaque $(a,b)^{\sim}$. C'est dû à la relation :

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs considérés sont *linéairement dépendants*.

Familles libres II

Reprenons maintenant l'exemple 1 ci-dessus : on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & x + 2y \\ b & = & y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a - 2b \\ y & = & b \end{array} \right.$$

- Il n'y a donc pas de combinaison linéaire nulle de ces vecteurs avec des coefficients non tous nuls.
- Aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre.

Ces vecteurs sont *linéairement indépendants*.

Familles libres : définitions

Définition 1.4.7

Une famille (non vide) de vecteurs $D \subset E$ est linéairement dépendante s'il existe une combinaison linéaire nulle de vecteurs de D dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Dans ces cas, on dit aussi que les éléments de D sont *linéairement dépendants*.

Proposition 1.4.8

Une famille de vecteurs $D \subset E$ est linéairement dépendante si, et seulement si, l'un des vecteurs de D est combinaison linéaire des autres.

Définition 1.4.7 bis

Une famille L de E qui n'est pas linéairement dépendante est dite *libre* ou *linéairement indépendante*. Les éléments de L sont alors dits *linéairement indépendants*.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Proposition 1.4.9

Une famille L de vecteurs est linéairement indépendante si, et seulement si, toute combinaison linéaire nulle d'éléments de L est nécessairement faite avec des coefficients nuls.

Proposition 1.4.9 (bis)

Une famille L est linéairement indépendante si, et seulement si, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, et tous $u_1, \ldots, u_n \in L$, l'égalité

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

a lieu seulement si on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Proposition 1.4.9 (ter)

La famille finie $L = (u_1, \ldots, u_n)$ est linéairement indépendante si, et seulement si,

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Quelques propriétés

Proposition 1.4.10

1. Toute famille de vecteurs qui contient le vecteur nul 0 est lin. dép.
2. Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est lin. dép., alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est lin. dép.
3. Si $(u_1, \ldots, u_r)$ $(r \geqslant 2)$ est lin. ind., alors $(u_1, \ldots, u_{r-1})$ l'est aussi.
4. Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est lin. ind., alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est linéairement dépendante si, et seulement si, y est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$.
5. Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est gén., alors pour tout $y \in E$, $(u_1, \ldots, u_r, y)$ est gén..
6. Si $(u_1, \ldots, u_r)$ est génératrice, et si u_i $(i \leqslant r)$ est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_r$, alors $(u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_r)$ est génératrice.

Théorème de Steinitz [2]

Dans tout espace vectoriel E et pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, $p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont toujours linéairement dépendantes.

2. Ernst Steinitz (1871-1928)

Lien avec le problème de départ

Proposition

Une famille de vecteurs L est linéairement indépendante si tout élément de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire des éléments de L.

Bases : définition et exemple fondamental

Définition 1.4.12

Une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Exemple 1.4.13 : Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples supplémentaires Exemple 1.4.14

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)^\sim$, $u_2 = (0, 1, 1)^\sim$ et $(0, 0, 1)^\sim$ forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, ou une base $\mathcal{B}' = (u_2, u_1, u_3)$.

Exemple 3 : Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$, les fonctions P_0, P_1, P_2 définies par

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

forment une base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ ou une base $\mathcal{B}' = (P_2, P_1, P_0)$.

Exemple 4 : Dans l'espace vectoriel $(]0, +\infty[^2, \oplus, \odot)$, les vecteurs

$$u_1 \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}$$

forment une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.

Propriétés

Proposition 1.4.15

Une partie $\mathcal{B}$ une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 1.4.16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il existe une base contenant un nombre fini d'éléments (disons n) et toutes les bases de E contiennent n éléments.

Définition 1.4.17

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, le nombre d'éléments d'une base quelconque est appelé *la dimension* de E, et noté $\dim(E)$, ou $\dim E$.

1. $\mathbb{R}^n$ est de dimension n ;
2. $(]0,+\infty[^2,\oplus,\odot)$ est de dimension 2 ;
3. $\mathcal{P}_2$ est de dimension 3.

Propriétés supplémentaires

Proposition 1.4.18

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. toute partie génératrice contient au moins n éléments,
2. toute partie libre contient au plus n éléments ;
3. toute partie génératrice contenant exactement n éléments est une base ;
4. toute partie libre contenant exactement n éléments est une base ;
5. Toute partie génératrice contient une base ;
6. Toute partie libre est incluse dans une base.

Conséquences :

1. $u_1 = (1,2)^\sim$ et $u_2 = (3,4)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ *parce qu'*ils sont lineairement indépendants.
2. $v_1 = (1,0,0)^\sim$, $v_2 = (0,1,0)^\sim$ et $v_3 = (1,2,3)^\sim$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car ils sont linéairement indépendants.

Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition 1.4.19

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E ($F \neq \{0\}$). Alors

1. On a $\dim(F) \leqslant n = \dim(E)$;
2. Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

(a) Si E ou F est égal à $\{0\}$, il n'y a rien à démontrer.

(b) Sinon, soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Tout élément de F est combinaison lin. des éléments de $\mathcal{B}$. Une famille libre de vecteurs de F contient donc au plus n vecteurs.

(c) On peut donc construire pas à pas une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de F, libre et maximale pour l'inclusion.

(d) Alors $p \leqslant n$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

(e) Si $p = n$, c'est aussi une base de E.

Composantes

Dans ce qui suit, on suppose que E est un e.v. de dimension finie n.

Définition 1.5.1

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uple $(x_1, \ldots, x_n)^\sim \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$. Ce n-uple est appelé *vecteur de composantes* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Notations : $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ ou $\mathcal{C}_\mathcal{B}(x) = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$.

Proposition 1.5.3

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E l'application $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ est une *bijection*. C'est de plus une *application linéaire* :

1. pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{C}_\mathcal{B}(\lambda u) = \lambda \mathcal{C}_\mathcal{B}(u)$,
2. pour tous $u, v \in E$, on a $\mathcal{C}_\mathcal{B}(u + v) = \mathcal{C}_\mathcal{B}(u) + \mathcal{C}_\mathcal{B}(v)$.

En particulier, les composantes d'une combinaison linéaire de vecteurs sont obtenues en formant la combinaison linéaire correspondante des vecteurs de composantes, dans $\mathbb{R}^n$.

Produit matriciel

Nous avons besoin de quelques éléments de calcul matriciel.
Commençons par le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition

Le produit d'une matrice ligne $A = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^1_n$ et d'une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_1$ est le nombre AB donné par

$$AB = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = 2 + 3e, \quad \begin{pmatrix} 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ 6 \end{pmatrix} = \pi + 6e.$$

Produits matriciels quelconques

Nous avons défini le produit d'une ligne par une colonne contenant le même nombre d'éléments. Cela se généralise facilement. Toute matrice peut être vue comme un empilement de lignes ou une juxtaposition de colonnes.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^p_n$ et $B \in \mathbb{R}^n_q$. On écrit $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$ où $L_1, \ldots, L_p$ sont des lignes et $B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_q \end{pmatrix}$ où $C_1, \ldots, C_q$ sont des colonnes. Alors $AB \in \mathbb{R}^p_q$ est définie par

$$(AB)_{i,j} = L_i C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Quelques exemples

Calculer les produits suivants.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ \pi & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \pi & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés

Proposition

Le produit matriciel a les propriétés suivantes :

1. Il est bilinéaire :
   - on a $(A+B)C = AC + BC$ pour tous $A, B \in \mathbb{R}^p_n$ et $C \in \mathbb{R}^n_q$;
   - on a $A(B+C) = AB + AC$ pour tous $A \in \mathbb{R}^p_n$ et $B, C \in \mathbb{R}^n_q$;
   - on a $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ pour tous $A \in \mathbb{R}^p_n$, $B \in \mathbb{R}^n_q$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Il est associatif : on a
$$(AB)C = A(BC)$$
pour tous $A \in \mathbb{R}^p_n$, $B \in \mathbb{R}^n_q$ et $C \in \mathbb{R}^q_r$.
3. Il n'est en général pas commutatif : les produits AB et BA ne sont simultanément définis et ne donnent des matrices de même type que si A, B sont carrées et de même type. Même dans ce cas, ils ne sont en général pas égaux.

Le cas des matrices carrées

Dans le cas des matrices carrées de type (n, n), il existe une matrice particulière, appélée matrice identité et notée I_n ou Id_n qui satisfait les conditions $AI_n = I_nA = A$ pour tout $A \in \mathbb{R}^n_n$.
La matrice I_n est définie par

$$(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $i, j \leqslant n$.

Proposition

La matrice identité est l'unique matrice $A \in \mathbb{R}^n_n$ qui satisfait

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Matrices inversibles et inverses

Définition

Soit A une matrice carrée de type (n, n). On dit que A est *inversible* si il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^n_n$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas, on montre que l'inverse de A est unique et on le note A^{-1}.

Remarque : si B est l'inverse de A, alors A est l'inverse de B.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Changements de base

Soient deux bases différentes $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ de E. On cherche les liens entre les composantes de $x \in E$ dans les deux bases.

Proposition 1.5.5

Les composantes $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)^\sim$ d'un même élement x de E dans des bases $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

où $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont des matrices à n lignes et n colonnes. Les colonnes de $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ sont les composantes des éléments de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Enfin, les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont inverses l'une de l'autre.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Déterminants

On définit l'application "déterminant" sur l'ensemble de toutes les matrices carrées, par récurrence :

Définition 6.1.2

Si $a \in \mathbb{R}^1_1 = \mathbb{R}$, alors $\det(a) = a$. Si $A \in \mathbb{R}^{n+1}_{n+1}$, alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j}(-1)^{j+1} \det(A_{\hat{1},\hat{j}}).$$

Définition 6.1.3

1. Soit $A \in \mathbb{R}^m_n$ une matrice. Un *mineur d'ordre p* de A est le déterminant d'une sous-matrice de A à p lignes et p colonnes ;
2. Si $A \in \mathbb{R}^m_m$, le *mineur de l'élément* $a_{i,j}$ est $\det(A_{\hat{i},\hat{j}})$;
3. Si $A \in \mathbb{R}^m_m$, le *cofacteur de l'élément* $a_{i,j}$ est $\mathcal{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{\hat{i},\hat{j}})$;

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés I

Proposition 6.1.4

1. Le déterminant est une application multilinéaire sur les colonnes des matrices : on a pour tous $C_1, \dots, C_n, C_i' \in \mathbb{R}^n$, tout réel λ et tout $i \leqslant n$
   1. $\det(C_1 \dots C_i + C_i' \dots C_n) = \det(C_1 \dots C_i \dots C_n) + \det(C_1 \dots C_i' \dots C_n)$,
   2. $\det(C_1 \dots \lambda C_i \dots C_n) = \lambda \det(C_1 \dots C_i \dots C_n)$.
2. Le déterminant est antisymétrique sur les colonnes : en permutant deux colonnes d'une matrice A on change le signe de son déterminant.
3. Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, l'application déterminant est l'unique application définie sur $\mathbb{R}^n_n$ à valeurs réelles et satisfaisant ces trois propriétés.

Deux propriétés supplémentaires

1. On a aussi $\det(A) = \det(A^\sim)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^n_n$.
2. L'application déterminant est multilinéaire sur les lignes.

Exercices

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\qquad 2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad 3)\begin{pmatrix}1 & x\\ 7 & y\end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}7 & 0\\ 12 & 0\end{pmatrix}\quad 5)\begin{pmatrix}x & y & z\\ 7 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\quad 6)\begin{pmatrix}7 & -1 & x\\ 2 & 5 & y\\ 1 & 0 & z\end{pmatrix}$$

$$7)\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad 8)\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & x\\ 2 & 5 & 7 & y\\ 3 & 0 & 3 & z\\ 1 & 1 & 1 & t\end{pmatrix}\quad 9)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & x\\ 2 & 5 & 0 & y\\ 3 & 0 & 3 & z\\ 1 & 1 & 1 & t\end{pmatrix}$$

Utilité majeure du déterminant

Proposition 6.1.6

Les éléments $C_1, \ldots, C_n$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement dépendants si, et seulement si on a $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$.

Utilité :

1. Démontrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier la dépendance linéaire de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^3$.

Rangs de matrices

Définition 6.1.7

Soit $A \in \mathbb{R}^n_p$. Le *rang* de A est le nombre maximal de colonnes de A linéairement indépendantes (dans $\mathbb{R}^n$). On le note $\mathrm{rg}(A)$ ou $\rho(A)$.

Proposition 6.1.8

Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{R}^n_p$ est l'ordre du plus grand mineur non nul de A. C'est aussi le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A.

Le rang permet donc de "compter de manière intelligente" les colonnes d'une matrice, ou ses lignes.

Exemples :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix} = 1,\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix} = 2,\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} = 2.$$

Systèmes linéaires : définitions

Un *système d'équations linéaires à p équations et n inconnues* (que nous notons $x_1, \ldots, x_n$) est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + & \cdots & +a_{pn}x_n & = & b_p, \end{array}\right.$$

où les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{pn}, b_1, \ldots, b_p$ sont réels. On note un tel système (S) pour faire court.

- Une *solution* d'un système (S) d'équations est un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait *simultanément* toutes les équations de (S).
- Le système (S) est dit *compatible* s'il admet au moins une solution.
- Il est dit *incompatible* dans le cas contraire.
- Les nombres $b_1, \ldots, b_p$ constituent les *termes indépendants*.
- Le système (S) est *homogène* si $b_1 = \cdots = b_p = 0$.
- A tout système (S), on peut associer un système homogène en remplaçant $b_1, \ldots, b_p$ par 0.

Systèmes linéaires : formes alternatives

- Forme "vectorielle" dans $\mathbb{R}^p$: on exprime les p équations comme une seule équation dans $\mathbb{R}^p$: Le système (S) s'écrit aussi

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

- Forme matricielle : le système s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{b},$$

  ou encore $AX = b$.
- La matrice A est appelée matrice du système et le vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ terme indépendant.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

L'ensemble d'équations

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues. Il peut être mis sous forme matricielle en

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système compatible puisque le triplet $(5/7, 3/7, 0)$ est une solution de (S).
Ce système n'est pas homogène puisque son terme indépendant est $(1, 0)^{\sim}$, mais le système homogène associé à (S) est

$$(S_0) : \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Systèmes équivalents

Définition 6.2.3

Un système linéaire qui admet une solution unique est dit *déterminé*. S'il admet plusieurs solutions, il est dit *indéterminé*. Deux systèmes linéaires à n inconnues (S) et (S') sont dits *équivalents* s'ils ont les mêmes ensembles de solutions. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Exemples : on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De même :

$$(S_1) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S_2) : \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le nombre d'équations n'est pas important, mais bien le nombre d'équations utiles.

Premiers résultats

Définition 6.3.1

Si $A \in \mathbb{R}^p_n$ et $B \in \mathbb{R}^p_m$, on note $(A|B)$ la matrice dont les colonnes sont celles de A suivies de celles de B.

Le nombre maximal d'équations utiles (indépendantes) dans le système linéaire $AX = b$ est donc $\mathrm{rg}(A|b)$. Ce nombre, avec $\mathrm{rg}(A)$ gouverne la compatibilité de ce système.

Proposition 6.3.2

Un système linéaire à p équations et n inconnues qui s'écrit $Ax = b$ est compatible si, et seulement si, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.
Un système homogène à p équations et n inconnues $AX = 0$ est toujours compatible. L'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$.

Exercice : démontrer que $\{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ est un sous-espace vectoriel, en utilisant les propriétés du produit matriciel.

Exercices

1. Le système d'équations à trois inconnues

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

   est compatible. L'ensemble des solutions du système homogène associé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

2. Le système d'équations à deux inconnues x et y

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 5y & = & 4 \\ 6x + \lambda y & = & 10 \end{array}\right.$$

   est compatible pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{10\}$. Il est incompatible pour $\lambda = 10$. L'ensemble des solutions du système homogène associé est un sous-espace vectoriel de dimension 0 si $\lambda \neq 10$ et de dimension 1 si $\lambda = 10$.

3. Si $(u_1, u_2)^\sim \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 x & = & a \\ u_2 x & = & b \end{array}\right.$$

   est compatible si, et seulement si, on a $\det \begin{pmatrix} u_1 & a \\ u_2 & b \end{pmatrix} = 0$.

4. Si $(u_1, u_2, u_3)^\sim$ et $(v_1, v_2, v_3)^\sim$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$, alors le système d'équations
$$\begin{cases} u_1x + v_1y &= a \\ u_2x + v_2y &= b \\ u_3x + v_3y &= c \end{cases}$$
est compatible si, et seulement si,on a
$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a \\ u_2 & v_2 & b \\ u_3 & v_3 & c \end{pmatrix} = 0.$$

5. L'ensemble des solutions du système d'équations à 3 inconnues
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Exprimer les solutions comme combinaisons linéaires de deux vecteurs.

6. L'ensemble des solutions du système d'équations à 4 inconnues
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2. Exprimer l'ensemble des solutions comme une enveloppe linéaire.

Systèmes généraux et résolution

Proposition 6.3.3

Soient $(S) : AX = b$ un système linéaire de p équations à n inconnues, compatible, et X_0 une solution (particulière) de ce système. Pour toute solution Y du système homogène associé $(S_0) : AX = 0$, $X_0 + Y$ est une solution de (S). Réciproquement, toute solution de (S) est de cette forme. L'ensemble des solutions de (S) s'écrit donc

$$\{X_0 + Y : AY = 0\}.$$

La résolution de tels systèmes peut se faire à l'aide de la méthode du pivot de Gauss ou par substitution : on exprime une inconnue en fonction des autres dans une des équations, et on substitue la valeur trouvée dans toutes les autres. On transforme ainsi un système en un système équivalent, mais plus simple.

Calcul pratique du rang : déterminants bordés

Le calcul systématique du rang nécessite l'évaluation de beaucoup de déterminants. Pour rappel :

Calcul du rang

Une matrice est de rang r si :

1. Elle admet un mineur d'ordre r non nul ;
2. Tous les mineurs d'ordre strictement supérieur à r sont nuls.

Définition 6.1.10 (matrices bordées)

Soit $A \in \mathbb{R}^n_p$ et B une sous-matrice de A de type (r, r). Une sous-matrice B' de A borde B si B' est de type $(r+1, r+1)$ et si B est une sous-matrice de B'.

En d'autres termes B' borde B si B' est obtenue en sélectionnant dans A toutes les rangées de B, et une colonne et une ligne de plus.
Cette définition se transpose directement en termes de mineurs.

Un exemple

Exemples : si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi & 0 \\ 0 & e & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2,7 & 0,5 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -3 & \sqrt{2} & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = A_{1,2;1,3} = \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alors les sous-matrices qui bordent B sont

$$A_{(1,2,3;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & e & 3 \\ -1 & 3 & 2,7 \end{pmatrix}, A_{(1,2,3;1,3,4)} = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2,7 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$A_{(1,2,4;1,2,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \pi \\ 0 & e & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, A_{(1,2,4;1,3,4)} = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

et finalement $A_{(1,2,5;1,2,3)}$, $A_{(1,2,5;1,3,4)}$. Il n'y en a donc que 6, contre 40 sous-matrices d'ordre 3.

Calcul du rang

Proposition 6.1.12 (Déterminants bordés)

Soit $A \in \mathbb{R}^p_n$. Le rang de A est r si, et seulement si,

1. la matrice A admet un mineur d'ordre r non nul ;
2. tous les mineurs d'ordre $r+1$ qui bordent ce mineur sont nuls.

Utilités :

1. Réduire fortement le nombre de déterminants à calculer pour calculer le rang ;
2. Compter le nombre utiles de conditions pour que le rang soit r. Ce sera utile pour les équations de sous-espaces vectoriels.

A utiliser en plus : le rang de A est inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes de A. Il ne peut pas diminuer si on ajoute une colonne à la matrice (ou une ligne).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices

Calculer les rangs des matrices suivantes.

$$1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 3\\ 14 & -5\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 1 & 3 & 8\\ 2 & 3 & 10\\ -2 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

Exprimer les égalités suivantes pour les nombres x, y, z, t.

$$4)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}7 & x\\ 12 & y\end{pmatrix} = 1 \qquad 5)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 2 & 3 & y\\ -1 & 2 & z\end{pmatrix} = 2 \qquad 6)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}7 & -1 & x\\ 2 & 5 & y\\ 1 & 0 & z\end{pmatrix} = 2$$

$$7)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & x\\ 2 & 5 & y\\ 3 & 0 & z\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix} = 2 \quad 8)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & x\\ 2 & 5 & 7 & y\\ 3 & 0 & 3 & z\\ 1 & 1 & 2 & t\end{pmatrix} = 2 \quad 9)\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & x\\ 2 & 5 & 0 & y\\ 3 & 0 & 3 & z\\ 1 & 1 & 1 & t\end{pmatrix} = 3.$$

Equations : données et but du jeu

Les données :

1. Un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}_0$;
2. Un sous-espace vectoriel F de dimension $p \leqslant n$;
3. Une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E

Les buts du jeu :

1. Obtenir une description constructive de F, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un vecteur u est dans F (équations cartésiennes).

Panorama :

1. On exprime F comme une enveloppe linéaire ;
2. On utilise la définition de l'enveloppe linéaire (qui fait apparaître les paramètres) : équations paramétriques vectorielles ;
3. On exprime tout cela en composantes dans une base : équations paramétriques cartésiennes ;
4. On élimine les paramètres : équations cartésiennes ;
5. On peut naviguer entre ces "états des équations".

Equations paramétriques

- On a $F = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$, si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une partie génératrice de F ;
- De préférence on cherche à avoir $p = \dim F$.
- Pour $x \in E$ quelconque, on a alors $x \in F$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} : x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_p} \tag{1.5}$$

- On passe aux composantes dans $\mathcal{B}$ (en utilisant la linéarité) :

Proposition 1.6.2

Soit $F = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$. Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $(u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$ ($i \leqslant r$), alors $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans F si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_p u_{1,p} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_p u_{n,p} \end{array} \right.} \tag{1.6}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1,2)^{\sim}$. On a
$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$
Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2)^{\sim}$, alors $x \in F$ si, et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & 2\lambda. \end{array} \right.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1,2,3)^{\sim}$. On a alors
$$x \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda u.$$
Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2, x_3)^{\sim}$, alors $x \in F$ si, et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & 3\lambda. \end{array} \right.$$

3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit la droite vectorielle $F = \rangle u \langle$ où $u = (1,2,0)^\sim$. Alors $x : (x_1 x_2, x_3)^\sim \in F$ ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \rangle u, v \langle$ où $u = (1,2,3)^\sim$ et $v = (2,4,6)^\sim$. Si $x = (x_1, x_2, x_3)^\sim$, alors $x \in F$ ssi

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} x_1 & = & \lambda + 2\mu \\ x_2 & = & 2\lambda + 4\mu \\ x_3 & = & 3\lambda + 6\mu. \end{cases} \tag{1.8}$$

On constate que tout s'exprime en fonction du paramètre $\nu = \lambda + 2\mu$. A quoi est-ce dû ? Quelle est la dimension de F ?

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \rangle u, v \langle$ où $u = (1,2,0)^\sim$ et $v = (1,0,1)^\sim$. Dans la base canonique, si $x = (x_1, x_2, x_3)^\sim$, alors x appartient à F si, et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda + \mu \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & \mu. \end{array} \right.$$

Quelle est la dimension de F ?

6. Dans $E = \mathcal{P}_3$, soit $F = \rangle u, v \langle$ où $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x^3 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$p \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : p(x) = \lambda u(x) + \mu v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dans la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, un polynôme p de composantes (x_1, x_2, x_3, x_4) est dans F si, et seulement si,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & \mu \\ x_3 & = & \lambda \\ x_4 & = & 2\mu. \end{array} \right.$$

Et pour les matrices ?

Q : Comment trouver une équation de l'ensemble "engendré par" les matrices ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

R : Une matrice $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\rangle u, v\langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : m = \lambda u + \mu v.$$

On traduit ces équations (dans la base habituelle des matrices). La matrice m appartient à $\rangle u, v\langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{ccl} a & = & \lambda - \mu \\ b & = & 2\lambda - \mu \\ c & = & 2\lambda \\ d & = & \sqrt{2}\mu \end{array} \right.$$

Quelques exercices

Donner des équations paramétriques (cartésiennes) et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants (dans $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique) :

$$V_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \qquad V_2 = \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle,$$

$$V_3 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \qquad V_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \langle$$

$$V_5 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \qquad V_6 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \langle$$

$$V_7 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0 \} \quad V_8 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z - x - y = 0 \}.$$

Equations cartésiennes

Question : dans l'exemple 5, le vecteur x ayant pour composantes $(7, 8, 3)^{\sim}$, est-il dans F ? En est-il de même pour y : $(15, 22, 6)$?

Définition 1.6.9

Des équations cartésiennes du sous-espace vectoriel F dans la base $\mathcal{B}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les composantes d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ pour qu'il soit dans F.

- On trouve de telles équations en *éliminant les paramètres* dans les équations paramétriques ;
- Elles sont présentées sous forme de systèmes linéaires homogènes ;
- Comme les équations paramétriques, elles ne sont pas uniques ;
- Elles dépendent de la base choisie.

Un exemple, à la main

Pour l'exemple 5, soit $x : (x_1, x_2, x_3)^{\sim}$, s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda + \mu \\ x_2 & = & 2\lambda \\ x_3 & = & \mu \end{array} \right. , \tag{1.9}$$

alors on a nécessairement

$$\lambda = \frac{x_2}{2}, \quad \text{et} \quad \mu = x_3.$$

L'équation restante dans (1.9) donne une *condition de compatibilité*

$$x_1 = \frac{x_2}{2} + x_3, \quad \text{ou} \quad \boxed{2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0}$$

Inversement, si $(x_1, x_2, x_3)^{\sim}$ satisfait cette dernière équation, alors on peut *choisir* $\lambda = \frac{x_2}{2}$ et $\mu = x_3$ et ce choix permet alors de satisfaire toutes les conditions de (1.9).
On peut alors déterminer si $y : (4, -2, 2)$ est dans F, ou $(3, -2, 2)$...

Equations cartésiennes : méthode générale

Eliminer les paramètres d'une équation paramétrique, c'est exprimer la compatibilité d'un système linéaire.

Proposition 1.6.10

Soit un espace vectoriel $F = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$. Si les composantes de u_i dans $\mathcal{B}$ sont $U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors un vecteur x de composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans F si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p | X). \tag{1.10}$$

Preuve :

- écrire les équations paramétriques sous forme matricielle ;
- utiliser les rangs pour exprimer la compatibilité du système.

Rem : Il n'est pas nécessaire que $u_1, \ldots, u_p$ soient lin. ind., mais on peut le supposer, et c'est plus simple.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas des matrices du slide 5

$$\text{Si} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

alors une matrice $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\rangle u, v \langle$ si et seulement si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \lambda - \mu \\ b & = & 2\lambda - \mu \\ c & = & 2\lambda \\ d & = & \sqrt{2}\mu \end{array} \right.$$

Cette condition est équivalente à

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & c \\ 0 & \sqrt{2} & d \end{pmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c & = & 2(b-a) \\ d & = & \sqrt{2}(b-2a) \end{array} \right.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples et exercices

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, donner des équations cartésiennes des sous-espaces vectoriels suivants :

$$V_1 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \langle \qquad V_2 = \rangle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \langle,$$

$$V_3 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix} \langle \qquad V_4 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\3\end{pmatrix} \langle$$

$$V_5 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \langle \qquad V_6 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \langle$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombre d'équations et dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

Proposition 1.6.11

Le sous-espace vectoriel F de dimension p admet des équations cartésiennes formées d'un système de $n - p$ équations linéaires indépendantes.

Preuve :

- On écrit $F = \rangle f_1, \ldots, f_p \langle$ $(f_1, \ldots, f_p$ indépendants$)$;
- On écrit la condition (1.10) en utilisant les déterminants bordés ;
- On constate que cela donne $n - p$ équations indépendantes.

Conséquences :

- Pour une droite vectorielle en dimension 2, on a $2 - 1 = 1$ équation ;
- Pour une droite vectorielle en dimension 3, on a $3 - 1 = 2$ équations ;
- Pour un plan en dimension 3, on a $3 - 2 = 1$ équation ;
- Pour un hyperplan en dimension n, on a $n - (n - 1) = 1$ équation...

Réciproque

Soient E un espace vectoriel de dim. n et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

Proposition 1.6.12

L'ensemble des vecteurs x de E dont les composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ dans $\mathcal{B}$ satisfont un système d'équations linéaires homogènes ($AX = 0$) de *rang r* est un sous-espace vectoriel de *dimension $n - r$* de E.

Preuve : Le passage aux composantes étant linéaire, c'est un résultat sur les systèmes linéaires, que nous avons admis.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^4$, muni d'une base $\mathcal{B}$, l'équation
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
décrit un sous-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez-en une base.
2. Dans $\mathbb{R}^5$, le système d'équations
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - 2x_3 + x_5 & = & 0 \\ 2x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$
détermine un sous-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez-en une base.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particuliers : droites et hyperplans

Donnons quelques définitions officielles.

Définition 1.6.13

Dans un espace vectoriel E de dimension n :

1. une droite (vectorielle) est un sous-espace vectoriel de dimension 1 ;
2. un plan (vectoriel) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (si $n \geqslant 2$) ;
3. un hyperplan (vectoriel) est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Soient E un espace vect. de dim. n, $\mathcal{B}$ une base, d une droite et $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in d \setminus \{0\}$.
Alors on a $x : (x_1, \ldots, x_n)^\sim \in d$ si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda\, u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda\, u_n. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$, alors on élimine facilement le paramètre :

$$\boxed{d \equiv \frac{x_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n}{u_n}.}$$

- Si $u_i = 0$ $(i \leqslant n)$, on revient à (1.11), et on trouve

$$\boxed{d \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{u_1} = \cdots \widehat{i} \cdots = \frac{x_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{array} \right.}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Exercice :

- Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, écrire des équations cartésiennes de

$$d_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle, \; d_2 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \langle, \; d_3 = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \langle, \; d_4 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \langle.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Hyperplans

Dans le cas des hyperplans, il n'y a qu'une équation simple à obtenir. On se donne un esp. vectoriel E de dimension n et une base $\mathcal{B}$.

Proposition 1.6.16

Soit un hyperplan vectoriel $F = \rangle f_1, \ldots, f_{n-1} \langle$. Si les composantes de f_i dans $\mathcal{B}$ sont $F_i = (f_{1,i}, \ldots, f_{n,i})^\sim$, alors un vecteur x de composantes $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans F si, et seulement si,

$$\boxed{\det(F_1, \ldots, F_{n-1}, X) = 0.} \tag{1.12}$$

Exercices :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne de la droite

$$d_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \langle,\ d_2 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle,\ d_3 = \rangle \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \langle.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne du plan

$$\pi_1 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \langle,\ \pi_2 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \langle,\ \pi_3 = \rangle \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \langle.$$

3. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, écrire une équation cartésienne de l'hyperplan

$$\pi_4 = \rangle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \langle,\ \pi_5 = \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \langle.$$

Faisceaux de plans en dimension 3

Les résultats suivants seront utiles pour les exercices simples.

Proposition 1.6.18

Dans un espace vectoriel E de dimension 3, deux plans vectoriels distincts se coupent suivant une droite vectorielle.

Proposition 1.6.19

Dans un espace vectoriel E de dimension 3, si une droite vectorielle d admet pour équation(s) dans une base $\mathcal{B}$ le système

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \end{cases}$$

alors un plan π contient d ssi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ t.q.

$$\pi \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0.$$

L'ensemble des plans contenant une droite d est appelé faisceau de plans d'axe d.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.