Espaces affines

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Définition générale

- Le but : modéliser l'espace dans lequel on vit. Chaque élément de l'espace, est appelé *point*.
- Les forces agissent sur les points, et les translatent.
- Visualisation : une table de billard.
- Tout doit se passer de manière raisonnable.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition générale

- Le but : modéliser l'espace dans lequel on vit. Chaque élément de l'espace, est appelé *point*.
- Les forces agissent sur les points, et les translatent.
- Visualisation : une table de billard.
- Tout doit se passer de manière raisonnable.

Définition 2.1.1 (Espaces affines)

Un espace affine $\mathcal{A}$ modelé sur un espace vectoriel E est un ensemble dont les éléments sont appelés points, muni d'une opération de translation

$$t : \mathcal{A} \times E \to \mathcal{A} : (A, u) \mapsto t(A, u) = A+u,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. On a $(A+u)+v = A+(u+v)$ pour tous $A \in \mathcal{A}$ et tous $u, v \in E$;
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $B = A + u$.

Un exemple exotique et un exemple important

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un exemple exotique et un exemple important

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

On définit la translation du point F de $\mathcal{A}$ par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F.

Un exemple exotique et un exemple important

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

On définit la translation du point F de $\mathcal{A}$ par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F.

1. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f \in E$, on a $F + f \in \mathcal{A}$, puisque par définition on a $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$;
2. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f, g \in E$, on a $(F + f) + g = F + (f + g)$, puisque l'addition des fonctions est associative ;
3. Pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $f = G - F$ est un élément de E, et c'est l'unique élément $f \in E$ tel que $G = F + f$.

Un exemple exotique et un exemple important

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

  $$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

  $$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2 + bx + c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

  On définit la translation du point F de $\mathcal{A}$ par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F.

  1. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f \in E$, on a $F + f \in \mathcal{A}$, puisque par définition on a $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$;
  2. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f, g \in E$, on a $(F + f) + g = F + (f + g)$, puisque l'addition des fonctions est associative ;
  3. Pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $f = G - F$ est un élément de E, et c'est l'unique élément $f \in E$ tel que $G = F + f$.

- Si E est un espace vectoriel, $\mathcal{A} = E$ est un espace affine modelé sur E. Les éléments de E ont donc une double nature. Les opérations qu'on leur applique dépendent de leur nature.

Premières conséquences

Proposition 2.1.4 (Simplifications)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine.

1. Si $u, v \in E$ satisfont $P + u = P + v$ pour un $P \in \mathcal{A}$, alors $u = v$;
2. On a $P + 0 = P$ pour tout $P \in \mathcal{A}$;
3. Si $P + u = Q + u$ pour $P, Q \in \mathcal{A}$ et $u \in E$, alors $P = Q$;
4. L'expression $P + u_1 + \cdots + u_r$, $P \in \mathcal{A}$, $u_1, \ldots, u_r \in E$ est bien définie : elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.

Définition 2.1.5 (Le vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Soient A, B deux points de $\mathcal{A}$. On note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E satisfaisant $A + \overrightarrow{AB} = B$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une relation célèbre et des notations

Proposition 2.1.6 (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de $\mathcal{A}$, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

Une relation célèbre et des notations

Proposition 2.1.6 (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de $\mathcal{A}$, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

1. L'espace vectoriel définissant un espace affine $\mathcal{A}$ est aussi noté $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.
2. On parlera aussi d'un espace affine $\mathcal{A}$, sans mentionner E ;
3. On notera dans la mesure du possible les éléments de $\mathcal{A}$ par des lettres capitales.

Une relation célèbre et des notations

Proposition 2.1.6 (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de $\mathcal{A}$, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

1. L'espace vectoriel définissant un espace affine $\mathcal{A}$ est aussi noté $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.
2. On parlera aussi d'un espace affine $\mathcal{A}$, sans mentionner E ;
3. On notera dans la mesure du possible les éléments de $\mathcal{A}$ par des lettres capitales.

Définition 2.1.7

Quatre points $ABCD$ définissent un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exemple : dans l'espace affine $\mathcal{P}_3$:

$$A : x^3 - 3x + 2, \quad B : 4x^3 - 2x + 6, \quad C : x + 1 \quad D : -3x^3 - 3.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Vecteurs liés

Définition 2.2.1

Soit O un point de $\mathcal{A}$. On appelle vecteur lié en O tout couple (O, P) où P est un point de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_O$ l'ensemble de ces vecteurs liés en O.

Proposition 2.2.2

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine modelé sur E. L'ensemble des vecteurs liés en O est en bijection avec $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Preuve : Soit f l'application qui à (O, P) fait correspondre $\overrightarrow{OP}$.

Vecteurs liés

Définition 2.2.1

Soit O un point de $\mathcal{A}$. On appelle vecteur lié en O tout couple (O, P) où P est un point de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_O$ l'ensemble de ces vecteurs liés en O.

Proposition 2.2.2

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine modelé sur E. L'ensemble des vecteurs liés en O est en bijection avec $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Preuve : Soit f l'application qui à (O, P) fait correspondre $\overrightarrow{OP}$.

Proposition 2.2.2 (bis)

L'ensemble des vecteurs liés en O peut être muni d'une (seule) structure d'espace vectoriel, qui fait de f une bijection linéaire. Elle est définie par

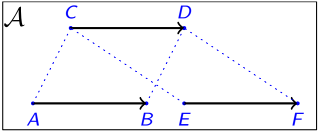
- $(O, P) \boxplus (O, Q) = (O, O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$;
- $\lambda \odot (O, P) = (O, O + \lambda\overrightarrow{OP})$,

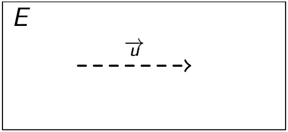
pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'addition suit la règle du parallélogramme.

Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur $u \in E$ la translation qu'il définit sur $\mathcal{A}$.





Définition 2.2.3

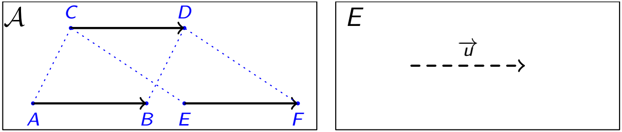
Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont *équipollents* si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

Définition 2.2.3 (bis)

Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié (A, B) est l'ensemble de tous les vecteurs liés (C, D) équipollents à (A, B). On le note $[(A, B)]$. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des vecteurs libres de $\mathcal{A}$.

Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur $u \in E$ la translation qu'il définit sur $\mathcal{A}$.



Définition 2.2.3

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont *équipollents* si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

Définition 2.2.3 (bis)

Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié (A, B) est l'ensemble de tous les vecteurs liés (C, D) équipollents à (A, B). On le note $[(A, B)]$. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des vecteurs libres de $\mathcal{A}$.

L'ensemble des vecteurs libres est en bijection avec E, via

$$f' : \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to E : [(A, B)] \mapsto \overrightarrow{AB}.$$

Cela permet de définir l'addition des vecteurs libres.

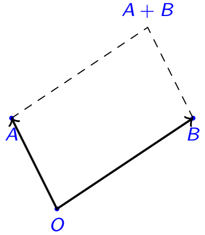
Combinaisons affines

- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Combinaisons affines

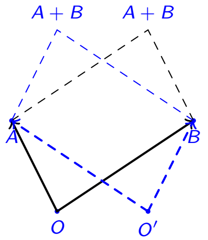
- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?



- Ma proposition, avec O

Combinaisons affines

- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?

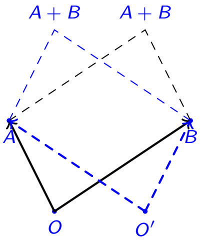


- Ma proposition, avec O
- La proposition de Raoul, avec O'

- La définition $A + B = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ n'est donc pas intrinsèque : elle dépend du choix d'un point supplémentaire (O ou O').

Combinaisons affines

- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?



- Ma proposition, avec O
- La proposition de Raoul, avec O'

- La définition $A + B = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ n'est donc pas intrinsèque : elle dépend du choix d'un point supplémentaire (O ou O').
- De manière générale $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ et $O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ ne donneront pas le même résultat.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Tout est-il perdu ?

Lemme 2.3.1

On a $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ si, et seulement si, $O = O'$ ou $\lambda + \mu = 1$.

Tout est-il perdu ?

Lemme 2.3.1

On a $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ si, et seulement si, $O = O'$ ou $\lambda + \mu = 1$.

Les objets géométriques que l'on peut obtenir à l'aide de cette construction sont les combinaisons

$$P = O + (1-\mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

C'est normal : on a alors

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = A + \mu\overrightarrow{AB}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.3.2

Pour $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, le point

$$P = O + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n} \tag{2.1}$$

est indépendant du point O.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La définition

Définition 2.3.3

Le point P défini par la relation (2.1) est la *combinaison affine* (ou le barycentre) des points $P_1, \ldots, P_n$ de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On la note

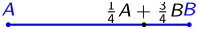
$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

- Le segment $[A, B]$ est l'ensemble

$$\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0,1]\}.$$

- Le milieu du segment $[A, B]$ est le point $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

- On a $(1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, et donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Quand les coefficients λ et $1-\lambda$ sont positifs, on peut interpréter la combinaison affine $(1-\lambda)A + \lambda B$ comme le centre de masse des points A et B, avec les masses respectives $1-\lambda$ et λ.



Une autre construction

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un objet géométrique.
- On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, quel que soit $O \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.3.5

Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, le vecteur

$$u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \tag{2.2}$$

est indépendant du choix du point $O \in \mathcal{A}$.

Définition 2.3.6

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ satisfont $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, alors le vecteur $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$ (pour tout $O \in \mathcal{A}$) est noté $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = B - A$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.

Règles de calcul I

Proposition 2.3.7

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$;
3. Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$.

Proposition 2.3.8

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$;
3. Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $u = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Conséquences : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*

Conséquences : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
2. *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*

Conséquences : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
2. *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
3. On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Conséquences : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
2. *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
3. On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.
4. Exemple : un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Deux résultats sur les barycentes

La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

Proposition 2.3.10 (Les forces s'annulent)

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors on a $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$.

Deux résultats sur les barycentes

La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

Proposition 2.3.10 (Les forces s'annulent)

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors on a $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$.

Exemple : $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est équivalent à $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = 0$.

Proposition 2.3.11 (Décomposition)

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, si $P_1, \ldots, P_n$ sont des points de $\mathcal{A}$, et si $m < n$ est tel que $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \notin \{0, 1\}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \alpha B_1 + (1-\alpha) B_2,$$

où $B_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i$ et $B_1 = \sum_{i=m+1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha} P_i$.

Variétés affines : définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition 2.4.1

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine. Une variété affine de $\mathcal{A}$ est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1\}$ est une variété affine ;
- Dans $\mathcal{A}$, si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine $\mathcal{A}$, $\{P\}$ et $\mathcal{A}$ sont des variétés affines.

Proposition 2.4.2 (Exemple fondamental)

Si P est un point de $\mathcal{A}$ et si F un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de $\mathcal{A}$.

Caractérisation

Proposition 2.4.3

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{V}$.

1. L'ensemble
$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.
3. On a $\mathcal{V} = P + V_P$.
4. De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.
5. Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans $\mathcal{V}$.

Preuve : Faire un dessin.

1. Utiliser la caractérisation des s.e.v ;
2. Traduire la définition de V_P ;
3. Deux inclusions ;
4. Supposer qu'il y en a deux et montrer qu'ils sont égaux ;
5. Comparer V_P et $V_{P'}$, pour P et P' dans $\mathcal{V}$.

Quelques définitions

Définition 2.4.4

Si $\mathcal{V}$ est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{V}$. On le note $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Définition 2.4.5

- Un espace affine $\mathcal{A}$ est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n. On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ est la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n-1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 2.4.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle\overrightarrow{AB}\langle = \{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 2.4.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle\overrightarrow{AB}\langle = \{\lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un *vecteur directeur* de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u\langle$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 2.4.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle \overrightarrow{AB} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un *vecteur directeur* de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u \langle$.

Proposition 2.4.7 (Plan déterminé par trois points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geqslant 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- Il existe un unique plan π qui contient A, B et C, on le note ABC ;
- On a $\overrightarrow{\pi} = \rangle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;
- Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Enveloppes affines

C'est la généralisation des théorèmes précédents.

Définition 2.4.8

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de $P_1, \ldots, P_r$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition 2.4.9

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathcal{A}$.

- L'enveloppe affine $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;
- Elle est incluse dans toute variété affine contenant $P_1, \ldots, P_r$.

Proposition 2.4.9 (bis)

On a $\rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \ldots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle.$$

Indépendance affine

Définition 2.4.10

Des points $P_1, \ldots, P_r$ d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition

Les points $P_1, \ldots, P_r$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont *linéairement* indépendants.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

Proposition 2.5.1

L'intersection de deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est soit vide soit une variété affine. Dans le second, cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 2.5.2

Deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

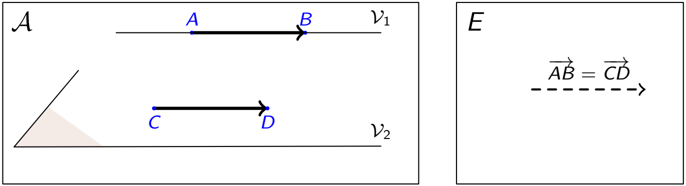
Proposition 2.5.1

L'intersection de deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est soit vide soit une variété affine. Dans le second, cas on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 2.5.2

Deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$.

L'idée :



Propriétés

Proposition 2.5.3

1. Si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$ et $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ ou $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$;
2. Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, alors $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} = \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$;
3. Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$, alors $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$;
4. Soient $\mathcal{V}$ une variété affine et $A \in \mathcal{A}$. Il existe une unique variété affine $\mathcal{V}_A$ telle que
   - $A \in \mathcal{V}_A$;
   - $\mathcal{V}_A /\!/ \mathcal{V}$;
   - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$.

Le point 4 généralise l'axiome d'Euclide sur les parallèles.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 2.5.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes. Les deux cas sont exclusifs.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 2.5.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes. Les deux cas sont exclusifs.

Définition 2.5.5

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 2.5.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes. Les deux cas sont exclusifs.

Définition 2.5.5

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 2.5.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes. Les deux cas sont exclusifs.

Définition 2.5.5

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Proposition 2.5.6 (Positions en fonction de points et vecteurs)

Soit $\dim \mathcal{A} = 3$. Soient 2 droites $d_1 = A + \rangle u \langle$, $d_2 = B + \rangle v \langle$.

- On a $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ si, et seulement si, la famille (u, v) est lin. dép.
- Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si, et seulement si, (u, v) est lin. ind. et $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est lin. dép.
- Les droites d_1 et d_2 sont gauches si, et seulement si, la famille $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est lin. ind.

Positions relatives de droites et plans en dimension 3

On se place dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3.

Proposition 2.5.7

Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Proposition 2.5.8

Soit d une droite et π un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit d et π sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la droite déterminée par $A = (1,2)^\sim$, et $B = (3,4)^\sim$ et celle déterminée par $C = (4,5)^\sim$ et $D = (7,10)^\sim$ sont-elles parallèles ?
2. Même question dans $\mathbb{R}^2$ pour $A = (1,2)^\sim$, $B = (3,4)^\sim$, $C = (4,5)^\sim$, $D = (10,11)^\sim$.
3. Exprimer qu'un point $(x,y)^\sim$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la droite définie par les points $A = (1,3)^\sim$ et $B = (1,4)^\sim$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la droite AB où $A = (1,2,3)$ et $B = (-1,1,3)$. Que vaut le vecteur $\overrightarrow{AB}$? Décrire le segment $[A,B]$. Décrire la droite AB. Cette droite est-elle parallèle au plan affine d'équation $x = 1$?
5. Dans l'espace $\mathbb{R}^2_2$ vu comme un espace affine, décrire la droite affine AB si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Définition 2.6.1 (Repère)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O; \mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Repères et coordonnées

Définition 2.6.1 (Repère)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O; \mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Définition 2.6.1 bis (Coordonnées)

Les *coordonnées* d'un point X quelconque de $\mathcal{A}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ sont les composantes de $\overrightarrow{OX}$ dans $\mathcal{B}$. On note $X : (x_1, \ldots, x_n)^\sim$.

Proposition 2.6.2

Soit un repère $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans $\mathcal{R}$ est une bijection $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^n$: on a

$$\mathcal{C}_\mathcal{R}(P) = \mathcal{C}_\mathcal{B}(\overrightarrow{OP}).$$

Alors P admet pour coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ si, et seulement si,

$$P = O + p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Première utilisation

Proposition 2.6.3

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine. L'application $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ est affine : on a

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(P_i)$$ [1]

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

Proposition 2.6.4

Soit $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère d'un espace affine de dimension n. On a

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(P_i)$$

pour tous points $P_1, \ldots, P_r$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$.

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées (dans $\mathbb{R}^n$).

Changements de repères

Soient deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{A}$. Quels sont les liens entre les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$?

Proposition 2.6.7 (Changement de repère)

Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)^\sim$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)^\sim$ d'un même point P de $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ dans des repères $\mathcal{R} = (O; (b_1, \ldots, b_n))$ et $\mathcal{R}' = (O'; (b'_1, \ldots, b'_n))$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont les matrices de changements de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. De plus, $(o_1, \ldots, o_n)^\sim$ sont les coordonnées de O dans $\mathcal{R}'$ et $(o'_1, \ldots, o'_n)^\sim$ celles O' dans $\mathcal{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations : données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R}$: $(p_1, \ldots, p_n)^{\sim} = X_0$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent $\mathcal{V}$ en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

1. Obtenir une description constructive des coordonnées des points de $\mathcal{V}$, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans $\mathcal{V}$ (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 2.7.1

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ si, et seulement si $\overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 2.7.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$, si $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(u_i) = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$ $(i \leqslant p)$, et si $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)$ alors $P : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 - p_1 & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,p} \\ & \vdots & \\ x_n - p_n & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,p} \end{array} \right.}$$

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 2.7.1

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ si, et seulement si $\overrightarrow{P_0 P} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 2.7.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$, si $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(u_i) = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$ $(i \leqslant p)$, et si $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)$ alors $P : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - p_1 & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,p} \\ & \vdots & \\ x_n - p_n & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,p} \end{array} \right.}$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si $A : (1,2,3) \sim$ et $B : (6,3,7)^{\sim}$ alors

$$P : (x,y,z)^{\sim} \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 1 & = & 5\lambda \\ y - 2 & = & \lambda \\ z - 3 & = & 4\lambda. \end{array} \right.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations cartésiennes

Définition 2.7.4 (Equations cartésiennes)

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 2.7.5

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$. Si $\phi_{\mathcal{B}}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors un point P ayant pour coord. $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p | X - X_0). \tag{2.5}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations cartésiennes

Définition 2.7.4 (Equations cartésiennes)

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 2.7.5

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^{\sim}$. Si $\phi_{\mathcal{B}}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$, alors un point P ayant pour coord. $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p | X - X_0). \tag{2.5}$$

Cette méthode générale s'applique que $u_1, \ldots, u_p$ soient indépendants ou non.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 2.7.6

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 2.7.6

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Si dans $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet des équations cartésiennes

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,n}y_n & = & 0 \end{array}\right.,$$

(ou $AX = 0$ dans l'écriture matricielle), alors $\mathcal{V}$ admet dans $\mathcal{R}$ les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 - p_1) + \cdots + a_{1,n}(x_n - p_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}(x_1 - p_1) + \cdots + a_{p,n}(x_n - p_n) & = & 0 \end{array}\right.,$$

ou encore $A(X - X_0) = 0$, ou enfin $AX = AX_0$.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 2.7.7

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 2.7.7

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, le système
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$
détermine une variété affine de dimension 4.
- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, le système
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
détermine une droite.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (p_1, \dots, p_n)^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \dots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

On obtient des équations cartésiennes de d en se ramenant à celles de $\overrightarrow{d}$:

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$:

$$\boxed{d \equiv \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n}.}$$

- Si $u_i = 0$ pour un $i \leqslant n$:

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \widehat{i} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{cases}}$$

- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine $\mathcal{A}$ de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 2.7.10

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ (indépendants). Si $\mathcal{C}_\mathcal{B}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(U_1, \ldots, U_{n-1} | X - X_0) = 0. \tag{2.6}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine $\mathcal{A}$ de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 2.7.10

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ (indépendants). Si $\mathcal{C}_\mathcal{B}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors on a

$$\pi \equiv \det(U_1, \ldots, U_{n-1} | X - X_0) = 0. \tag{2.6}$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- π_1 contenant $A : (1,2,3)^\sim$ et de vect. dir. $v_1 : (-1,0,2)^\sim$ et $v_2 : (1,1,1)^\sim$;
- π_2 contenant les points $A : (1,2,3)^\sim$, $B : (-1,0,2)^\sim$ et $C : (1,1,1)^\sim$;
- π_3 contenant $A : (0,3,2)$, $B : (-1,1,2)$ et de vect. dir. $v : (1,1,1)$.

Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 2.
- La droite $d = A+\rangle u\langle$, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $u : (u_1, u_2)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $B : (b_1, b_2)^\sim$: $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

$$\boxed{AB \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}}$$

avec la convention habituelle.

- Reciproque : une droite a pour équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$ $(a_1 a_2 \neq 0)$.
  1. On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
  2. Le sous-vectoriel directeur a pour éq. $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$.
  3. Un vecteur directeur est donné par $(-a_2, a_1)$.

Parallélisme et faisceau de droites (dimension 2)

Proposition 2.7.11

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ sont

- parallèles si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- sécantes dans l'autre cas : si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Parallélisme et faisceau de droites (dimension 2)

Proposition 2.7.11

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ sont

- parallèles si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 0$$

- sécantes dans l'autre cas : si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Proposition 2.7.12

Soient les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 = b'$ sécantes en P. Une droite d'' contient P si, et seulement si, elle admet pour équation

$$d'' \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - b) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- La droite $d = A + \rangle u \langle$, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 u_3 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $B : (b_1, b_2, b_3)^\sim$: on a $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

$$\boxed{AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}}$$

avec la convention habituelle.

Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 &= b' \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour éq. (dans $\mathcal{B}$) :

$$\overrightarrow{d} \equiv \begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 &= 0 \\ a_1'y_1 + a_2'y_2 + a_3'y_3 &= 0 \end{cases}$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de d, ou en coupant par un plan (par exemple $x_3 = 0$)
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'éq. de $\overrightarrow{d}$. Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left(\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2' & a_3' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1' & a_3' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix}\right)$$

Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right. \text{ et } d' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & = & e \\ c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3 & = & e' \end{array} \right.$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

Proposition 2.7.13

Les droites d et d' sont

- Parallèles confondues si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$;
- Parallèles distinctes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A|B) = 3$;
- Secantes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$;
- Gauches si et seulement si $\mathrm{rg}(A|B) = 4$, ou $\det(A|B) \neq 0$.

Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan $\pi = A+\rangle u, v\langle$, où $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.}$$

- Le plan $\pi = ABC$: considérer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (avec des notations évidentes) :

$$\boxed{ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0}$$

- Le plan π contenant A, B et dont un vecteur directeur u est donné : considérer A, $\overrightarrow{AB}$ et u.

Réciproque

- Un plan π en dimension 3 admet une équation générale
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0). \tag{0.1}$$
- On trouve facilement des points de π en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple $a_1 \neq 0$, alors (0.1) s'écrit
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

Parallélisme, faisceaux de plans

Soient les plans $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $\pi' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = b'$.

- Ils sont parallèles si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 1.$$

- Ils sont confondus si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1' & a_2' & a_3' & b' \end{pmatrix} = 1.$$

- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & b' \end{array} \right.$$

Proposition 2.7.15 (Faisceaux de plans)

Un plan π'' contient d si et seulement si il admet une équation du type

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches d_1 et d_2, un point P (extérieur à d_1 et d_2) et une droite d_3.

Proposition 2.7.16

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui contient P si et seulement si aucun des plans déterminés par P et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans π_1 et π_2 déterminées par P et d_1 et P et d_2, respectivement.

Proposition 2.7.17

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui est parallèle à d_3 si et seulement si d_1, d_2 et d_3 ne sont pas parallèles à un même paln Cette droite est l'intersection des plans π_1 contenant d_1 et parallèle à d_3 et π_2 contenant d_2 et parallèle à d_3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.