Université de Liège

Espaces affines

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Définition générale

- Le but : modéliser l'espace dans lequel on vit. Chaque élément de l'espace est appelé *point*.
- Les forces agissent sur les points, et les translatent.
- Visualisation : une table de billard.
- Tout doit se passer de manière raisonnable.

Définition 2.1.1 (Espaces affines)

Un espace affine $\mathcal{A}$ modelé sur un espace vectoriel E est un ensemble dont les éléments sont appelés points, muni d'une opération de translation

$$t : \mathcal{A} \times E \to \mathcal{A} : (A, u) \mapsto t(A, u) = A+u,$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. On a $(A+u)+v = A+(u+v)$ pour tous $A \in \mathcal{A}$ et tous $u, v \in E$;
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $B = A + u$.

Un exemple exotique et un exemple important

- Définissons E et $\mathcal{A}$ comme suit :

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 0\},$$

$$\mathcal{A} = \{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = ax^2+bx+c \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et } a+b+c = 3\}.$$

On définit la translation du point F de $\mathcal{A}$ par rapport au vecteur f de E comme étant l'addition des fonctions f et F.

1. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f \in E$, on a $F + f \in \mathcal{A}$, puisque par définition on a $(F + f)(1) = F(1) + f(1) = 3$;
2. Pour tous $F \in \mathcal{A}$ et $f, g \in E$, on a $(F + f) + g = F + (f + g)$, puisque l'addition des fonctions est associative ;
3. Pour tous $F, G \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $f = G - F$ est un élément de E, et c'est l'unique élément $f \in E$ tel que $G = F + f$.

- Si E est un espace vectoriel, $\mathcal{A} = E$ est un espace affine modelé sur E. Les éléments de E ont donc une double nature. Les opérations qu'on leur applique dépendent de leur nature.

Premières conséquences

Proposition 2.1.4 (Simplifications)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine.

1. Si $u, v \in E$ satisfont $P + u = P + v$ pour un $P \in \mathcal{A}$, alors $u = v$;
2. On a $P + 0 = P$ pour tout $P \in \mathcal{A}$;
3. Si $P + u = Q + u$ pour $P, Q \in \mathcal{A}$ et $u \in E$, alors $P = Q$;
4. L'expression $P + u_1 + \cdots + u_r$, $P \in \mathcal{A}$, $u_1, \ldots, u_r \in E$ est bien définie : elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations.

Définition 2.1.5 (Le vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Soient A, B deux points de $\mathcal{A}$. On note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E satisfaisant $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Une relation célèbre et des notations

Proposition 2.1.6 (Relation de Chasles)

Pour tous points P, Q, R de $\mathcal{A}$, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. En particulier, on a $\overrightarrow{PP} = 0$ pour tout $P \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$.

1. L'espace vectoriel définissant un espace affine $\mathcal{A}$ est aussi noté $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.
2. On parlera aussi d'un espace affine $\mathcal{A}$, sans mentionner E ;
3. On notera dans la mesure du possible les éléments de $\mathcal{A}$ par des lettres capitales.

Définition 2.1.7

Quatre points $ABCD$ définissent un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exemple : dans l'espace affine $\mathcal{P}_3$:

$$A : x^3 - 3x + 2, \quad B : 4x^3 - 2x + 6, \quad C : x + 1 \quad D : -3x^3 - 3.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Vecteurs liés

Définition 2.2.1

Soit O un point de $\mathcal{A}$. On appelle vecteur lié en O tout couple (O, P) où P est un point de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_O$ l'ensemble de ces vecteurs liés en O.

Proposition 2.2.2

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine modelé sur E. L'ensemble des vecteurs liés en O est en bijection avec $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Preuve : Soit f l'application qui à (O, P) fait correspondre $\overrightarrow{OP}$.

Proposition 2.2.2 (bis)

L'ensemble des vecteurs liés en O peut être muni d'une (seule) structure d'espace vectoriel, qui fait de f une bijection linéaire. Elle est définie par

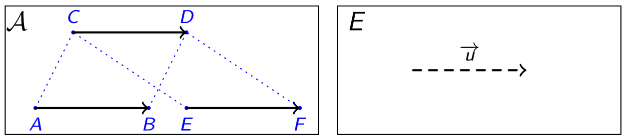
- $(O, P) \boxplus (O, Q) = (O, O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$;
- $\lambda \odot (O, P) = (O, O + \lambda\overrightarrow{OP})$,

pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'addition suit la règle du parallélogramme.

Vecteurs libres

L'idée : on associe à tout vecteur $u \in E$ la translation qu'il définit sur $\mathcal{A}$.



Définition 2.2.3

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont *équipollents* si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement plat), c'est à dire si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

Définition 2.2.3 (bis)

Le vecteur libre *représenté* par le vecteur lié (A, B) est l'ensemble de tous les vecteurs liés (C, D) équipollents à (A, B). On le note $[(A, B)]$. On note $\mathcal{A}_\mathcal{L}$ l'ensemble des vecteurs libres de $\mathcal{A}$.

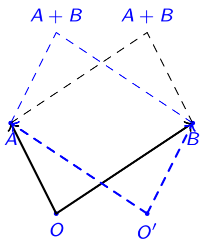
L'ensemble des vecteurs libres est en bijection avec E, via

$$f' : \mathcal{A}_\mathcal{L} \to E : [(A, B)] \mapsto \overrightarrow{AB}.$$

Cela permet de définir l'addition des vecteurs libres.

Combinaisons affines

- Question : dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on peut former des combinaisons linéaires de vecteurs. Peut-faire des combinaisons de points ?
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comment définir $\lambda A + \mu B$?



- Ma proposition, avec O
- La proposition de Raoul, avec O'

- La définition $A + B = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ n'est donc pas intrinsèque : elle dépend du choix d'un point supplémentaire (O ou O').
- De manière générale $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ et $O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ ne donneront pas le même résultat.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Tout est-il perdu ?

Lemme 2.3.1

On a $O + \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = O' + \lambda\overrightarrow{O'A} + \mu\overrightarrow{O'B}$ si, et seulement si, $O = O'$ ou $\lambda + \mu = 1$.

Les objets géométriques que l'on peut obtenir à l'aide de cette construction sont les combinaisons

$$P = O + (1-\mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

C'est normal : on a alors

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = A + \mu\overrightarrow{AB}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.3.2

Pour $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, le point

$$P = O + \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n} \tag{2.1}$$

est indépendant du point O.

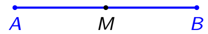
La définition

Définition 2.3.3

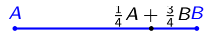
Le point P défini par la relation (2.1) est la *combinaison affine* (ou le barycentre) des points $P_1, \ldots, P_n$ de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On la note

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

- Le segment $[A, B]$ est l'ensemble
$$\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0, 1]\}.$$
- Le milieu du segment $[A, B]$ est le point $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.



- On a $(1-\lambda)A + \lambda B = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, et donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Quand les coefficients λ et $1-\lambda$ sont positifs, on peut interpréter la combinaison affine $(1-\lambda)A + \lambda B$ comme le centre de masse des points A et B, avec les masses respectives $1-\lambda$ et λ.



Une autre construction

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un objet géométrique.
- On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, quel que soit $O \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.3.5

Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, le vecteur

$$u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n} \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \tag{2.2}$$

est indépendant du choix du point $O \in \mathcal{A}$.

Définition 2.3.6

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ satisfont $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, alors le vecteur $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$ (pour tout $O \in \mathcal{A}$) est noté $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$.

On a donc $\overrightarrow{AB} = B - A$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$.

Règles de calcul I

Proposition 2.3.7

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$;
3. Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$.

Proposition 2.3.8

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$;
2. Pour tout $O \in \mathcal{A}$ on a $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$;
3. Il existe $O \in \mathcal{A}$ tel que $u = \lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{OP_n}$.

Conséquences : calcul pratique

1. *On peut manipuler de telles combinaisons pour autant que l'on s'assure que le résultat a toujours un sens, c'est à dire que la somme des coefficients soit toujours soit 0, soit 1.*
2. *Quand on aboutit à un résultat dépourvu de sens (somme des coefficients différente de 0 ou 1), il suffit en général de diviser par la somme des coefficients.*
3. On peut justifier chaque étape en revenant à la définition ou en utilisant les propositions précédentes.
4. Exemple : un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Deux résultats sur les barycentes

La combinaison affine $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ est aussi appelée barycentre. Voici deux résultats pour leur calcul.

Proposition 2.3.10 (Les forces s'annulent)

Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors on a $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{QP_i} = 0$.

Exemple : $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est équivalent à $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} = 0$.

Proposition 2.3.11 (Décomposition)

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, si $P_1, \ldots, P_n$ sont des points de $\mathcal{A}$, et si $m < n$ est tel que $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \notin \{0, 1\}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = \alpha B_1 + (1-\alpha) B_2,$$

où $B_1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha} P_i$ et $B_1 = \sum_{i=m+1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha} P_i$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Variétés affines : définition

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

Définition 2.4.1

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine. Une variété affine de $\mathcal{A}$ est un sous ensemble non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ qui contient les combinaisons affines de ses éléments.

Exemples :

- Dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + 2y = 1\}$ est une variété affine ;
- Dans $\mathcal{A}$, si $A, B \in \mathcal{A}$, $\{(1-\lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une variété affine ;
- Dans tout espace affine $\mathcal{A}$, $\{P\}$ et $\mathcal{A}$ sont des variétés affines.

Proposition 2.4.2 (Exemple fondamental)

Si P est un point de $\mathcal{A}$ et si F un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{V} = P + F = \{P + u : u \in F\}$$

est une variété affine de $\mathcal{A}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Caractérisation

Proposition 2.4.3

Soit $\mathcal{V}$ une variété affine de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{V}$.

1. L'ensemble
$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. On a $X \in \mathcal{V}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{PX} \in V_P$.
3. On a $\mathcal{V} = P + V_P$.
4. De plus, V_P est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété.
5. Enfin, V_P est indépendant du choix de P dans $\mathcal{V}$.

Preuve : Faire un dessin.

1. Utiliser la caractérisation des s.e.v ;
2. Traduire la définition de V_P ;
3. Deux inclusions ;
4. Supposer qu'il y en a deux et montrer qu'ils sont égaux ;
5. Comparer V_P et $V_{P'}$, pour P et P' dans $\mathcal{V}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques définitions

Définition 2.4.4

Si $\mathcal{V}$ est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition précédente est le sous-espace vectoriel directeur de $\mathcal{V}$. On le note $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Définition 2.4.5

- Un espace affine $\mathcal{A}$ est de dimension n si l'espace vectoriel E sur lequel il est modelé est de dimension n. On note $\dim \mathcal{A} = n$;
- La dimension d'une variété affine $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ est la dimension de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. On la note $\dim \mathcal{V}$.
- Une droite est une variété affine de dimension 1 ;
- Un plan est une variété affine de dimension 2 (si $\dim \mathcal{A} \geqslant 2$) ;
- Un hyperplan est une variété affine de dimension $n-1$, si $\dim \mathcal{A} = n$.

Le cas particulier des droites et plans

Proposition 2.4.6 (Droite déterminée par deux points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension au moins 1, et soient $A, B \in \mathcal{A}$, distincts.

- Il existe une unique droite d qui contient A et B, on la note AB ;
- Dans ce cas, on a $\overrightarrow{d} = \rangle \overrightarrow{AB} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\}$;
- La droite AB est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de A et B ;
- Si P et Q sont deux points distincts dans AB, alors $AB = PQ$.

Remarque : tout vecteur non nul u de $\overrightarrow{d}$ est appelé un *vecteur directeur* de d car on a alors $\overrightarrow{d} = \rangle u \langle$.

Proposition 2.4.7 (Plan déterminé par trois points)

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine ($\dim \mathcal{A} \geqslant 2$), et soient $A, B, C \in \mathcal{A}$, non alignés.

- Il existe un unique plan π qui contient A, B et C, on le note ABC ;
- On a $\overrightarrow{\pi} = \rangle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \langle = \{\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;
- Le plan π est l'ensemble des combinaisons affines de A, B et C.

Enveloppes affines

C'est la généralisation des théorèmes précédents.

Définition 2.4.8

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$. L'enveloppe affine de $P_1, \dots, P_r$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de ces points. On la note $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$.

Proposition 2.4.9

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{A}$.

- L'enveloppe affine $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}}$ est une variété affine ;
- Elle est incluse dans toute variété affine contenant $P_1, \dots, P_r$.

Proposition 2.4.9 (bis)

On a $\rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = P_1 + \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle$. En particulier on a

$$\dim \rangle P_1, \dots, P_r \langle_{\mathcal{A}} = \dim \rangle \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r} \langle.$$

Indépendance affine

Définition 2.4.10

Des points $P_1, \dots, P_r$ d'un espace affine sont *affinement indépendants* si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.

Proposition

Les points $P_1, \dots, P_r$ sont affinement indépendants si, et seulement si, $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$ sont *linéairement* indépendants.

Intersection et parallélisme

La définition de l'intersection est celle des sous-ensembles.

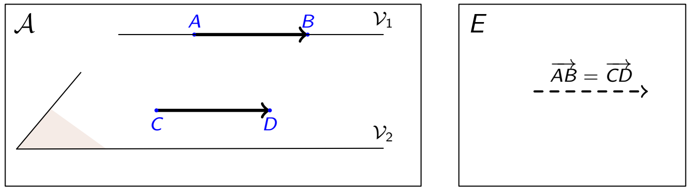
Proposition 2.5.1

L'intersection de deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est soit vide soit une variété affine. Dans le second cas, on a $\overrightarrow{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2} = \overrightarrow{\mathcal{V}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$.

Définition 2.5.2

Deux variétés affines $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont parallèles si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{V}_2} \subset \overrightarrow{\mathcal{V}_1}$. On note $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$.

L'idée :



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés

Proposition 2.5.3

1. Si $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$ et $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ alors $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ ou $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$;
2. Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, alors $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{V}_1} = \overrightarrow{\mathcal{V}_2}$;
3. Si $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_1 /\!/ \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \varnothing$, alors $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$;
4. Soient $\mathcal{V}$ une variété affine et $A \in \mathcal{A}$. Il existe une unique variété affine $\mathcal{V}_A$ telle que
   - $A \in \mathcal{V}_A$;
   - $\mathcal{V}_A /\!/ \mathcal{V}$;
   - $\dim \mathcal{V}_A = \dim \mathcal{V}$.

Le point 4 généralise l'axiome d'Euclide sur les parallèles.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Positions relatives de droites en dimensions 2 et 3

Deux droites sont dites sécantes si leur intersection est un singleton.

Proposition 2.5.4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 2. Deux droites de $\mathcal{A}$ sont soit parallèles soit sécantes. Les deux cas sont exclusifs.

Définition 2.5.5

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, deux droites sont gauches si elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Donc en dimension 3 : des droites sont parallèles, sécantes ou gauches.

Proposition 2.5.6 (Positions en fonction de points et vecteurs)

Soit $\dim \mathcal{A} = 3$. Soient 2 droites $d_1 = A + \rangle u \langle$, $d_2 = B + \rangle v \langle$.

- On a $d_1 /\!/ d_2$ si, et seulement si, la famille (u, v) est lin. dép.
- Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si, et seulement si, (u, v) est lin. ind. et $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est lin. dép.
- Les droites d_1 et d_2 sont gauches si, et seulement si, la famille $(u, v, \overrightarrow{AB})$ est lin. ind.

Positions relatives de droites et plans en dimension 3

On se place dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3.

Proposition 2.5.7

Si deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Proposition 2.5.8

Soit d une droite et π un plan dans un espace affine de dimension 3. Soit d et π sont parallèles, soit leur intersection est un singleton.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la droite déterminée par $A = (1,2)^\sim$, et $B = (3,4)^\sim$ et celle déterminée par $C = (4,5)^\sim$ et $D = (7,10)^\sim$ sont-elles parallèles ?
2. Même question dans $\mathbb{R}^2$ pour $A = (1,2)^\sim$, $B = (3,4)^\sim$, $C = (4,5)^\sim$, $D = (10,11)^\sim$.
3. Exprimer qu'un point $(x,y)^\sim$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la droite définie par les points $A = (1,3)^\sim$ et $B = (1,4)^\sim$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la droite AB où $A = (1,2,3)$ et $B = (-1,1,3)$. Que vaut le vecteur $\overrightarrow{AB}$? Décrire le segment $[A,B]$. Décrire la droite AB. Cette droite est-elle parallèle au plan affine d'équation $x = 1$?
5. Dans l'espace $\mathbb{R}^2_2$ vu comme un espace affine, décrire la droite affine AB si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Repères et coordonnées

Définition 2.6.1 (Repère)

Un *repère* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ est un couple $(O;\mathcal{B})$ où O est un point de $\mathcal{A}$ appelé origine du repère et où $\mathcal{B}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ appelée base du repère.

Définition 2.6.1 bis (Coordonnées)

Les *coordonnées* d'un point X quelconque de $\mathcal{A}$ dans le repère $\mathcal{R} = (O;\mathcal{B})$ sont les composantes de $\overrightarrow{OX}$ dans $\mathcal{B}$. On note $X : (x_1,\ldots,x_n)^\sim$.

Proposition 2.6.2

Soit un repère $\mathcal{R} = (O;(b_1,\ldots,b_n))$ d'un espace affine. Le passage aux coordonnées dans $\mathcal{R}$ est une bijection $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^n$: on a

$$\mathcal{C}_\mathcal{R}(P) = \mathcal{C}_\mathcal{B}(\overrightarrow{OP}).$$

Alors P admet pour coordonnées $(p_1,\ldots,p_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ si, et seulement si,

$$P = O + p_1b_1 + \cdots + p_nb_n.$$

Première utilisation

Proposition 2.6.3

Soit $\mathcal{R} = (O;\mathcal{B})$ un repère d'un espace affine. L'application $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ est affine : on a

$$\mathcal{C}_\mathcal{R}(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{C}_\mathcal{R}(P_i)^{1}$$

pour tous points $P_1,\ldots,P_r$ et tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$.

Proposition 2.6.4

Soit $\mathcal{R} = (O;\mathcal{B})$ un repère d'un espace affine de dimension n. On a

$$\mathcal{C}_\mathcal{B}(\sum_{i=1}^r \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathcal{C}_\mathcal{R}(P_i)$$

pour tous points $P_1,\ldots,P_r$ et tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$.

1. On peut retenir que les coordonnées d'une combinaison affine sont la combinaison affine des coordonnées (dans $\mathbb{R}^n$).

Changements de repères

Soient deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}$ et P un point de $\mathcal{A}$. Quels sont les liens entre les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$?

Proposition 2.6.7 (Changement de repère)

Les coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)^\sim$ et $(x'_1,\ldots,x'_n)^\sim$ d'un même point P de $\mathcal{A}$ dans des repères $\mathcal{R} = (O;(b_1,\ldots,b_n))$ et $\mathcal{R}' = (O';(b'_1,\ldots,b'_n))$ sont liées par les formules

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ \vdots \\ o'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix},$$

Les matrices $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $A_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont les matrices de changements de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. De plus, $(o_1,\ldots,o_n)^\sim$ sont les coordonnées de O dans $\mathcal{R}'$ et $(o'_1,\ldots,o'_n)^\sim$ celles O' dans $\mathcal{R}$.

Equations : données et but du jeu

On considère :

- Un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n ;
- Un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$;
- Une variété affine $\mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$;
- Les coordonnées de P_0 dans $\mathcal{R}$: $(p_1, \ldots, p_n)^{\sim} = X_0$.

On souhaite obtenir des équations qui caractérisent $\mathcal{V}$ en termes de coordonnées de ses points. Il y a donc deux questions.

1. Obtenir une description constructive des coordonnées des points de $\mathcal{V}$, à l'aide de paramètres (équations paramétriques) ;
2. Obtenir des conditions exprimant qu'un point P est dans $\mathcal{V}$ (équations cartésiennes), à l'aide de conditions sur ses coordonnées.

Résultat fondamental et équations paramétriques

Proposition 2.7.1

On a $P \in \mathcal{V} = P_0 + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ si, et seulement si $\overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Conséquence :

Proposition 2.7.2 (Equations paramétriques cartésiennes)

Si $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$, si $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(u_i) = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$ $(i \leqslant p)$, et si $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)$ alors $P : (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\boxed{\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - p_1 & = & \lambda_1 u_{1,1} + \cdots + \lambda_r u_{1,p} \\ & \vdots & \\ x_n - p_n & = & \lambda_1 u_{n,1} + \cdots + \lambda_r u_{n,p} \end{array} \right.}$$

Exemple : dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère, si $A : (1, 2, 3) \sim$ et $B : (6, 3, 7)^{\sim}$ alors

$$P : (x, y, z)^{\sim} \in AB \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 1 & = & 5\lambda \\ y - 2 & = & \lambda \\ z - 3 & = & 4\lambda. \end{array} \right.$$

Equations cartésiennes

Définition 2.7.4 (Equations cartésiennes)

Des équations cartésiennes de la variété affine $\mathcal{V}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées X d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ pour qu'il soit dans $\mathcal{V}$.

Proposition 2.7.5

Soit une variété affine $\mathcal{V}$ telle que $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \rangle u_1, \ldots, u_p \langle$ et P_0 un point de $\mathcal{V}$ ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^{\sim}$. Si $\phi_{\mathcal{B}}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^{\sim}$, alors un point P ayant pour coord. $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\sim}$ est dans $\mathcal{V}$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p) = \mathrm{rg}(U_1, \ldots, U_p | X - X_0). \tag{2.5}$$

Cette méthode générale s'applique que $u_1, \ldots, u_p$ soient indépendants ou non.

Nombre d'équations et dimension

Proposition 2.7.6

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un repère. Toute variété affine de dimension p admet dans $\mathcal{R}$ des équations cartésiennes formant un système linéaire de rang $n - p$.

Si dans $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet des équations cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,n}y_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

(ou $AX = 0$ dans l'écriture matricielle), alors $\mathcal{V}$ admet dans $\mathcal{R}$ les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 - p_1) + \cdots + a_{1,n}(x_n - p_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}(x_1 - p_1) + \cdots + a_{p,n}(x_n - p_n) & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ou encore $A(X - X_0) = 0$, ou enfin $AX = AX_0$.

Réciproque

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension n muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Proposition 2.7.7

L'ensemble $\mathcal{V}$ des points P de $\mathcal{A}$ dont les coordonnées $X = (x_1, \ldots, x_n)^\sim$ dans $\mathcal{R}$ satisfont un système d'équations linéaires compatible $AX = B$ est une variété affine de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$, dont le sous espace vectoriel directeur $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ admet pour équations $AX = 0$ (dans $\mathcal{B}$).

Exemples :

- Dans un espace de dimension 6 muni d'un repère, le système
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$
détermine une variété affine de dimension 4.
- Dans un espace de dimension 3 muni d'un repère, le système
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
détermine une droite.

Cas particulier : les droites

Données :

- un espace affine $\mathcal{A}$ de dim. n muni d'un repère $\mathcal{R}$;
- une droite d déterminée par un point $P_0 : (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et un vecteur directeur $u : (u_1, \ldots, u_n)^\sim \in \overrightarrow{d} \setminus \{0\}$.

On obtient des équations cartésiennes de d en se ramenant à celles de $\overrightarrow{d}$:

- Si $u_1 \cdots u_n \neq 0$:
$$\boxed{d \equiv \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n}.}$$
- Si $u_i = 0$ pour un $i \leqslant n$:
$$\boxed{d \equiv \begin{cases} \frac{x_1 - p_1}{u_1} = \cdots = \widehat{i} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n} \\ x_i = 0 \end{cases}}$$
- Cela fonctionne quand plusieurs composantes de u sont nulles.

Si la droite est donnée par deux points, on se ramène au cas précédent.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas particulier : les hyperplans

On se donne un esp. affine $\mathcal{A}$ de dimension n et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$.

Proposition 2.7.10

Soit un hyperplan vectoriel π déterminé par P_0 ayant pour coord. $X_0 = (p_1, \ldots, p_n)^\sim$ et par $n-1$ vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ (indépendants). Si $C_{\mathcal{B}}(u_i) = U_i = (u_{1,i}, \ldots, u_{n,i})^\sim$, alors on a
$$\pi \equiv \det(U_1, \ldots, U_{n-1} | X - X_0) = 0. \tag{2.6}$$

Dans un espace affine de dim. 3 muni d'un repère, déterminer une équation cartésienne du plan

- π_1 contenant $A : (1, 2, 3)^\sim$ et de vect. dir. $v_1 : (-1, 0, 2)^\sim$ et $v_2 : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_2 contenant les points $A : (1, 2, 3)^\sim$, $B : (-1, 0, 2)^\sim$ et $C : (1, 1, 1)^\sim$;
- π_3 contenant $A : (0, 3, 2)$, $B : (-1, 1, 2)$ et de vect. dir. $v : (1, 1, 1)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Recapitulatif I : droites en dimension 2

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 2.
- La droite $d = A + \rangle u \langle$, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $u : (u_1, u_2)^\sim$:
$$\boxed{d \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2}}$$
avec la convention habituelle, si $u_1 u_2 = 0$.
- La droite AB, où $A : (a_1, a_2)^\sim$ et $B : (b_1, b_2)^\sim$: $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
$$\boxed{AB \equiv \det\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}}$$
avec la convention habituelle.
- Reciproque : une droite a pour équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$ $(a_1 a_2 \neq 0)$.
  1. On trouve les coordonnées de points et composantes de vecteurs directeurs en résolvant l'équation.
  2. Le sous-vectoriel directeur a pour éq. $a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$.
  3. Un vecteur directeur est donné par $(-a_2, a_1)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme et faisceau de droites (dimension 2)

Proposition 2.7.11

Les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'$ sont

- parallèles si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 0$$

- sécantes dans l'autre cas : si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Proposition 2.7.12

Soient les droites $d \equiv a_1x_1 + a_2x_2 = b$ et $d' \equiv a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'$ sécantes en P. Une droite d'' contient P si, et seulement si, elle admet pour équation

$$d'' \equiv \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 - b) + \mu(a'_1x_1 + a'_2x_2 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Recapitulatif II : droites en dimension 3

- On se donne un repère $(O; \mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- La droite $d = A + \rangle u \langle$, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $u : (u_1, u_2, u_3)^\sim$:

$$\boxed{d \equiv \mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ou} \quad d \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}}$$

avec la convention habituelle, si $u_1u_2u_3 = 0$.

- La droite AB, où $A : (a_1, a_2, a_3)^\sim$ et $B : (b_1, b_2, b_3)^\sim$: on a $\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

$$\boxed{AB \equiv \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}}$$

avec la convention habituelle.

Réciproque

- L'équation générale d'une droite est

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} = 2$$

- Le sous-vectoriel directeur associé a pour éq. (dans $\mathcal{B}$) :

$$\overrightarrow{d} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & = & 0 \\ a'_1y_1 + a'_2y_2 + a'_3y_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

- On trouve un point en résolvant l'équation de d, ou en coupant par un plan (par exemple $x_3 = 0$)
- On trouve un vecteur directeur en résolvant l'éq. de $\overrightarrow{d}$. Une solution non triviale est donnée par

$$u : \left(\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a'_1 & a'_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Positions relatives et rangs

- Soient les droites

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 & = & b' \end{array} \right. \quad \text{et } d' \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & = & e \\ c'_1x_1 + c'_2x_2 + c'_3x_3 & = & e' \end{array} \right.$$

- Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b' \\ e \\ e' \end{pmatrix}$$

Proposition 2.7.13

Les droites d et d' sont

- Parallèles confondues si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$;
- Parallèles distinctes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A|B) = 3$;
- Secantes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$;
- Gauches si et seulement si $\mathrm{rg}(A|B) = 4$, ou $\det(A|B) \neq 0$.

Recapitulatif III : plans en dimension 3

- On se donne un repère $(O;\mathcal{B})$ d'un espace affine de dim. 3.
- Le plan $\pi = A+\rangle u, v\langle$, où $A : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $u : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - a_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - a_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 0.}$$

- Le plan $\pi = ABC$: considérer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (avec des notations évidentes) :

$$\boxed{ABC \equiv \det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0}$$

- Le plan π contenant A, B et dont un vecteur directeur u est donné : considérer A, $\overrightarrow{AB}$ et u.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Réciproque

- Un plan π en dimension 3 admet une équation générale

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0). \qquad (0.1)$$

- On trouve facilement des points de π en donnant des valeurs à deux des trois coordonnées. On peut aussi résoudre : si par exemple $a_1 \neq 0$, alors (0.1) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi un point et deux vecteurs directeurs.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parallélisme, faisceaux de plans

Soient les plans $\pi \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ et $\pi' \equiv a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = b'$.

- Ils sont parallèles si, et seulement si,

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 1.$$

- Ils sont confondus si, et seulement si,

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1' & a_2' & a_3' & b' \end{pmatrix} = 1.$$

- Dans le dernier cas possible, ils se coupent selon une droite

$$d \equiv \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & b \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 & = & b' \end{cases}$$

Proposition 2.7.15 (Faisceaux de plans)

Un plan π'' contient d si et seulement si il admet une équation du type

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 - b') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Deux problèmes classiques

On se donne deux droites gauches d_1 et d_2, un point P (extérieur à d_1 et d_2) et une droite d_3.

Proposition 2.7.16

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui contient P si et seulement si aucun des plans déterminés par P et l'une des droites n'est parallèle à l'autre droite. Cette droite est l'intersection des plans π_1 et π_2 déterminées par P et d_1 et P et d_2, respectivement.

Proposition 2.7.17

Il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 et qui est parallèle à d_3 si et seulement si d_1, d_2 et d_3 ne sont pas parallèles à un même paln Cette droite est l'intersection des plans π_1 contenant d_1 et parallèle à d_3 et π_2 contenant d_2 et parallèle à d_3.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.