



Espaces vectoriels euclidiens

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Point de vue

En géométrie (euclidienne) classique :

- les angles sont *mesurés* avec un rapporteur ;
- Les distances sont *mesurées* avec une règle graduée ;
- Cela permet de définir *le* produit scalaire ;
- Produit scalaire, longueurs et angles sont liés par une formule bien connue.

Le point de vue qui se généralise à toute dimension :

- On définit ce qu'est *un* produit scalaire ;
- On donne la *définition des longueurs et angles* à partir d'un produit scalaire ;
- On fait en sorte que les formules coïncident avec celles que l'on connaît (en dimension 2 et 3).

Produits scalaires

Définition 3.1.1 (Produits scalaires)

Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

qui est

- 1 **Symétrique** : on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;
- 2 **Bilinéaire** : on a, pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
 - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
 - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
 - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$,
- 3 **Définie positive** : On a $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ (si et) seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé *espace vectoriel euclidien*.

Remarque : La définition doit être légèrement modifiée pour les espaces complexes. Le produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est aussi noté $u \cdot v$.

Exemples

- Le produit scalaire préféré ou *standard* de \mathbb{R}^n est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- L'application suivante définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 7x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

- L'application suivante définit un produit scalaire sur \mathbb{R}_p^p ($p \in \mathbb{N}_0$) :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B \sim A) = \sum_{i,j=1}^p a_{i,j} b_{i,j}.$$

- Soit $E = C_0([0, 2\pi])$. On définit un produit scalaire sur E par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C_0([0, 2\pi]).$$

- L'opération suivante **n'est pas** un produit scalaire sur \mathbb{R}^4 :

$$((x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, t')) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - t t'.$$

Normes (Longueurs) de vecteurs

Définition 3.2.1

La **norme** du vecteur $x \in E$, encore appelée **longueur** ou **module**, est

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Elle est encore notée $\|x\|$.

La définition est licite, puisque le radicand est positif ou nul.

Proposition 3.2.2

Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\lambda x| = |\lambda| |x|$. On a $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

Preuve : Appliquer les définitions.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 3.2.3 (Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont linéairement dépendants.

Preuve :

- Considérer d'abord le cas $y = 0$;
- Dans le cas $y \neq 0$, considérer la fonction du *second degré*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto f(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle.$$

- On a $f(\lambda) \geq 0$ pour tout λ , donc $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$, qui conduit au premier résultat.
- Pour l'égalité : on a $\Delta = 0$ ssi $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : f(\lambda_0) = 0$.

Inégalité de Minkowski

Proposition 3.2.4 (Minkowski)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont multiples l'un de l'autre par un facteur non négatif.

Fixons $x, y \in E$. On se débarrasse de la racine en considérant les carrés. On a alors

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \tag{3.2}$$

$$= |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \tag{3.3}$$

$$\leq |x|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + |y|^2 \tag{3.4}$$

$$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \tag{3.5}$$

$$= (|x| + |y|)^2, \tag{3.6}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, $|x||y| = |\langle x, y \rangle| = \langle x, y \rangle$.

Angle non orienté de deux vecteurs (non nuls)

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. On a

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|} \leq 1.$$

Définition 3.2.5

Pour tous vecteurs x, y non nuls, l'angle non orienté des vecteurs x et y est l'unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ satisfaisant

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}.$$

- On récupère la formule bien connue :

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \alpha.$$

- Pour bien faire, il faudrait que le cosinus soit défini de manière analytique et non géométrique. C'est en fait une série (voir le cours Mathématiques Générales).

Exemples et exercices

- 1 Dans \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (1, 0, 0, 1)^\sim$ et $y = (1, 0, 1, 0)^\sim$.
- 2 Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (2, 2)^\sim$ et $y = (0, 1)^\sim$.
- 3 Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire non standard défini à la page 4, les vecteurs $x = (1, 0)^\sim$ et $y = (0, 1)$ satisfont

$$|x| = \sqrt{7}, \quad |y| = \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = 2,$$

leur angle non orienté $\alpha \in [0, \pi]$ satisfait donc

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

- 4 Pour ce même produit scalaire, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (0, 1)^\sim$ et $y = (1, -1)^\sim$.
- 5 Calculer l'angle entre \cos et \sin pour le produit scalaire donné sur $C_0([0, 2\pi])$. Calculer la norme de ces fonctions.

Orthogonalité

Définition 3.2.8

Des vecteurs u et v sont orthogonaux¹ si $\langle u, v \rangle = 0$.

Proposition 3.3.1

Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ des vecteurs **non nuls** et orthogonaux deux à deux, i.e. tels que $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}|u_i|^2$ pour $i, j \leq p$. Alors,

- 1 Si $u \in E$ est tel que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$, alors on a $\lambda_i = \frac{\langle u, u_i \rangle}{|u_i|^2}$ ($i \leq p$);
- 2 Les vecteurs u_1, \dots, u_p sont linéairement indépendants.

1. On dit aussi perpendiculaires.

Bases orthonormées

Définition 3.3.2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Une base orthonormée de E est une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et normés ($\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \leq n$).

Exemples : Dans \mathbb{R}^n , la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée pour le produit scalaire standard.

Trouver une base orthonormée de $\langle \cos, \sin \rangle \subset C_0([0, 2\pi])$.

Proposition 3.3.5

Une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée si, et seulement si, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i u_i$ est donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.7)$$

Existence : processus de Gram-Schmidt

Proposition 3.3.6 (Processus de Gram-Schmidt)

Tout espace vectoriel euclidien E de dimension finie admet une base orthonormée. De plus si u_1, \dots, u_n est une base de E , il existe une base orthonormée (v_1, \dots, v_n) telle que $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Preuve : Récurrence sur la dimension n de E .

- Pour $n = 1$, on a une base (u_1) et $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$ convient.
- Induction : Soit u_1, \dots, u_{n-1} une base de E . Alors $\langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$ est un espace vectoriel euclidien pour le même produit scalaire.
- Il existe v_1, \dots, v_{n-1} satisfaisant $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$.
- On pose $v'_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_n, v_i \rangle v_i \neq 0$ et $v_n = \frac{v'_n}{|v'_n|}$.

Changements de bases orthonormées

Définition 3.3.8

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}_n^n$ est orthogonale si $A^\sim = A^{-1}$.

Remarque : Cette condition s'écrit $A^\sim A = A A^\sim = \text{Id}$ ou

$$\sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \leq n.$$

Proposition 3.3.9

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E . Soit $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ une autre base de E . Alors \mathcal{B}' est orthonormée si, et seulement si, la matrice de changement de base entre \mathcal{B} et \mathcal{B}' est orthogonale.

Preuve : Définition de la matrice de changement de base et calcul du produit scalaire.

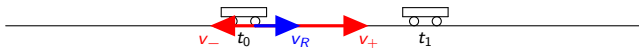
Orientation d'un espace vectoriel : un exemple en dim 1.

Un mobile est en MRU sur une droite d , on suppose $t_0 < t_1$. Quel est le signe de sa vitesse (instantanée) en t_0 ?



Réponse :

Il faut orienter l'axe : on fixe une vitesse de référence ($v_R \neq 0$)

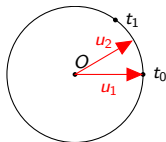


Remarques :

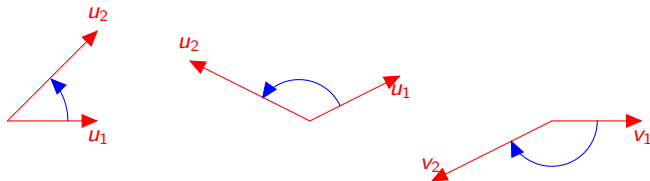
- Tous les multiples positifs de v_R définissent la même orientation.
- Raoul aurait pu choisir une autre orientation.
- On ne peut passer continûment d'une vitesse positive à une négative sans passer par 0.

Orientation d'un espace vectoriel : un exemple en dim 2.

Un mobile est en MCU autour d'un point O . On suppose $t_0 < t_1$. Quel est le signe de sa vitesse angulaire en t_0 ?



Il faut deux positions de référence, i.e. deux vecteurs du plan, pour définir la vitesse angulaire positive. Ces vecteurs doivent former une *base*.



Orientation d'un espace vectoriel

Définition 3.4.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Deux bases définissent la même orientation si la matrice de changement de base est à déterminant positif.
- Deux bases définissent une orientation différente si cette matrice est à déterminant négatif.

Il y a donc deux ensembles de bases.

Définition 3.4.5

Orienter l'espace, c'est choisir un de ces ensembles de bases, et déclarer qu'elles sont positives.

Produit mixte de trois vecteurs

Intuition : Mesurer un “volume signé”.

Définition 3.4.6

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une **base orthonormée positive** de E , espace eucl. orienté de dim. 3. Le produit mixte des vecteurs u, v, w est défini par

$$[u, v, w] = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

où $(u_1, u_2, u_3)^\sim$, $(v_1, v_2, v_3)^\sim$ et $(w_1, w_2, w_3)^\sim$ sont respectivement les composantes de u, v et w dans la base \mathcal{B} .

Proposition 3.4.7

La définition est indépendante du choix de la base orthonormée positive \mathcal{B} utilisée pour faire le calcul.

Propriétés

Proposition 3.4.8

Le produit mixte a les propriétés suivantes.

- ❶ Il est trilinéaire, c'est à dire linéaire en chaque argument, les autres étant fixés ;
- ❷ Il est alterné : il change de signe si on permute deux de ses arguments ;
- ❸ On a $[u, v, w] = 0$ si, et seulement si, u, v et w sont linéairement dépendants.
- ❹ On a $[u, v, w] > 0$ (resp. < 0) si, et seulement si, (u, v, w) est une base positive.

Produit vectoriel de deux vecteurs

Proposition 3.4.9

Pour tous $u, v \in E$, il existe un unique vecteur a satisfaisant la relation

$$[u, v, w] = \langle a, w \rangle$$

pour tout $w \in E$. Si \mathcal{B} est une base orthonormée positive, dans laquelle u et v ont pour composantes $(u_1, u_2, u_3)^\sim$ et $v : (v_1, v_2, v_3)^\sim$, alors a admet pour composantes

$$\left(\det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right)^\sim. \quad (3.10)$$

Définition 3.4.10

Le produit vectoriel des vecteurs u et v est le vecteur défini par la proposition précédente. Il est noté $u \wedge v$.

Propriétés et caractérisation

Proposition 3.4.11

L'opération produit vectoriel a les propriétés suivantes :

- 1 Elle est antisymétrique (ou alternée) : on a $u \wedge v = -v \wedge u$ pour tout $u, v \in E$.
- 2 Elle est bilinéaire, c'est à dire linéaire sur chacun de ses arguments, l'autre étant fixé ;

Proposition 3.4.12

Soient u, v des vecteurs de E . Alors

- 1 Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v ;
- 2 Le produit vectoriel $u \wedge v$ est nul si, et seulement si, u et v sont linéairement dépendants.
- 3 Si u et v sont non nuls, on a $|u \wedge v| = |u||v| \sin \alpha$ où α est l'angle non orienté entre u et v ;
- 4 Si u et v sont linéairement indépendants, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base positive.

Symbole de Levi-civita

Si (b_1, b_2, b_3) est une base orthonormée positive, alors on a

$$b_i \wedge b_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} b_k$$

où

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce symbole est appelé symbole de Levi-Civita².

En général, si $u = \sum_{i=1}^3 u_i b_i$, $v = \sum_{i=1}^3 v_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^3 w_i b_i$ alors

$$u \wedge v = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j b_k, \quad [u, v, w] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k.$$

2. Tullio Levi-Civita (1873-1941), inventeur du calcul tensoriel (avec Ricci) vers 1900.

Double produit vectoriel

Proposition 3.4.15

On a les formules suivantes

- $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u,$
- $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w,$

quels que soient $u, v, w \in E$.

- En français : “Le double produit vectoriel vaut le vecteur au milieu fois le produit scalaire des deux autres, moins le deuxième vecteur de la parenthèse, fois le produit scalaire des deux autres”.
- **Preuve** : calcul “à la main” pour tous les vecteurs de base ou avec le symbole de Levi-Civita.

Une équation vectorielle

- Soit $a \neq 0$ et $b \in E$, espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
- On cherche les solutions de l'équation

$$a \wedge x = b. \quad (3.11)$$

- On peut l'écrire dans une B.O. positive.

Proposition 3.4.16

L'équation (3.11) est compatible si, et seulement si, $\langle a, b \rangle = 0$. Dans ce cas l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ -\frac{1}{|a|^2} a \wedge b + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Preuve : Si le sys. est compatible, $b = a \wedge x_0$, alors b est orthogonal à a . Si b est orthogonal à a , on vérifie que les solutions proposées sont des solutions et que toutes les solutions sont de cette forme.

Angle orienté du plan

Une orientation de E eucl. orienté de dim. 2 définit un sens de rotation.

Définition 3.4.17

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté entre u et v est l'unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

- $\cos(\theta) = \cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$ (α est l'angle non orienté entre u et v)
- $\sin(\theta)$ est str. positif si, et seulement si, (u, v) est une base positive.

Proposition 3.4.19

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté θ entre u et v est défini par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}{|u||v|}$$

si u et v ont pour composantes $(u_1, u_2)^\sim$ et $(v_1, v_2)^\sim$ dans une **base orthonormée positive**.

Complément orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

Définition 3.5.1

Pour tout sous-espace vectoriel F de E , le *complément orthogonal* de F est l'ensemble

$$F^\perp = \{u \in E : \langle u, f \rangle = 0, \quad \forall f \in F\}.$$

De plus $F \perp G$ si $F \subset G^\perp$ ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 3.5.3

Pour tout sous-espace vectoriel F de E ,

- 1) L'ensemble F^\perp est un sous-espace vectoriel ;
- 2) On a $E = F \oplus F^\perp$;
- 3) On a $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$;
- 4) On a $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve : 1) Classique 2) fixer une base dont les premiers élém. sont dans F , orthogonaliser. On obtient une B.O. (e_1, \dots, e_n) tels que (e_1, \dots, e_p) est une B.O. de F .

Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

Définition 3.5.4

Pour tout $u \in E$, on a la décomposition unique $u = u_F + u_{F^\perp}$. La projection orthogonale de u sur F est u_F .

Proposition 3.5.5

Si (f_1, \dots, f_p) est une base orthonormée de F , alors la projection orthogonale d'un vecteur u sur F est donnée par

$$u_F = \langle u, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle u, f_p \rangle f_p.$$

Conséquences : Droites et hyperplans

Proposition 3.5.6

Si F est une droite vectorielle engendrée par f , alors la projection orthogonale de u sur F est

$$u_d = \frac{\langle u, f \rangle}{|f|^2} f.$$

Définition 3.5.7

Si π est un hyperplan vectoriel, on appelle *normale* à π tout vecteur directeur de π^\perp .

Proposition 3.5.8

Si π est un hyperplan vectoriel de normale N , alors la projection orthogonale de u sur π est

$$u_\pi = u - \frac{\langle u, N \rangle}{|N|^2} N.$$

Equation normale d'un hyperplan et orthogonalité

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, et π un hyperplan.

Proposition 3.5.9

Alors $N = (a_1, \dots, a_n)$ est normal à π ssi l'hyperplan π admet l'équation cartésienne

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0,$$

Preuve : On a $\pi^\perp = \langle N \rangle$ ssi $\pi = \langle N \rangle^\perp$ ssi

$$\pi = \{u \in E : \langle N, u \rangle = 0\}.$$