Espaces vectoriels euclidiens

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Point de vue

En géométrie (euclidienne) classique :

- les angles sont *mesurés* avec un rapporteur ;
- Les distances sont *mesurées* avec une règle graduée ;
- Cela permet de définir *le* produit scalaire ;
- Produit scalaire, longueurs et angles sont liés par une formule bien connue.

Le point de vue qui se généralise à toute dimension :

- On définit ce qu'est *un* produit scalaire ;
- On donne la définition des longueurs et angles à partir d'un produit scalaire ;
- On fait en sorte que les formules coïncident avec celles que l'on connait (en dimension 2 et 3).

Produits scalaires

Définition 3.1.1 (Produits scalaires)

Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

qui est

1. Symétrique : on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;
2. Bilinéaire : on a, pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
   - $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
   - $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
   - $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$,
3. Définie positive : On a $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ (si et) seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé *espace vectoriel euclidien*.

Remarque : La définition doit être légèrement modifiée pour les espaces complexes. Le produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est aussi noté $u \bullet v$.

Exemples

- Le produit scalaire préféré ou *standard* de $\mathbb{R}^n$ est défini par
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
- L'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:
$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 7x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1).$$
- L'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^p_p$ ($p \in \mathbb{N}_0$) :
$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^{\sim} A) = \sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}.$$
- Soit $E = C_0([0, 2\pi])$. On définit un produit scalaire sur E par
$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x, \quad f, g \in C_0([0, 2\pi]).$$
- L'opération suivante n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$:
$$((x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, t')) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - tt'.$$

Normes (Longueurs) de vecteurs

Définition 3.2.1

La norme du vecteur $x \in E$, encore appelée longueur ou module, est

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Elle est encore notée $||x||$.

La définition est licite, puisque le radicand est positif ou nul.

Proposition 3.2.2

Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\lambda x| = |\lambda||x|$. On a $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

Preuve : Appliquer les définitions.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 3.2.3 (Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont linéairement dépendants.

Preuve :

- Considérer d'abord le cas $y = 0$;
- Dans le cas $y \neq 0$, considérer la fonction du *second degré*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto f(\lambda) = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle.$$

- On a $f(\lambda) \geqslant 0$ pour tout λ, donc $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leqslant 0$, qui conduit au premier résultat.
- Pour l'égalité : on a $\Delta = 0$ ssi $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : f(\lambda_0) = 0$.

Inégalité de Minkowski

Proposition 3.2.4 (Minkowski)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

L'égalité entre ces deux quantités a lieu si, et seulement si, x et y sont multiples l'un de l'autre par un facteur non négatif.

Fixons $x, y \in E$. On se débarrasse de la racine en considérant les carrés. On a alors

$$\begin{aligned}
|x+y|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle && (3.2)\\
&= |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 && (3.3)\\
&\leqslant |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 && (3.4)\\
&\leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 && (3.5)\\
&= (|x| + |y|)^2, && (3.6)
\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, $|x||y| = |\langle x, y\rangle| = \langle x, y\rangle$.

Angle non orienté de deux vecteurs (non nuls)

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. On a

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leqslant 1.$$

Définition 3.2.5

Pour tous vecteurs x, y non nuls, l'angle non orienté des vecteurs x et y est l'unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ satisfaisant

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}.$$

- On récupère la formule bien connue :

$$\langle x, y\rangle = |x||y|\cos\alpha.$$

- Pour bien faire, il faudrait que le cosinus soit défini de manière analytique et non géométrique. C'est en fait une série (voir le cours Mathématiques Générales).

Exemples et exercices

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (1,0,0,1)^\sim$ et $y = (1,0,1,0)^\sim$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire standard, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (2,2)^\sim$ et $y = (0,1)^\sim$.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire non standard défini à la page 4, les vecteurs $x = (1,0)^\sim$ et $y = (0,1)$ satisfont
$$|x| = \sqrt{7}, \quad |y| = \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \langle x, y\rangle = 2,$$
leur angle non orienté $\alpha \in [0,\pi]$ satisfait donc
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$
4. Pour ce même produit scalaire, déterminer l'angle non orienté des vecteurs $x = (0,1)^\sim$ et $y = (1,-1)^\sim$.
5. Calculer l'angle entre cos et sin pour le produit scalaire donné sur $C_0([0,2\pi])$. Calculer la norme de ces fonctions.

Orthogonalité

Définition 3.2.8

Des vecteurs u et v sont orthogonaux[1] si $\langle u, v\rangle = 0$.

Proposition 3.3.1

Soit $\{u_1,\ldots,u_p\}$ des vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux, i.e. tels que $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}|u_i|^2$ pour $i,j \leqslant p$. Alors,

1. Si $u \in E$ est tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$, alors on a $\lambda_i = \frac{\langle u, u_i\rangle}{|u_i|^2}$ $(i \leqslant p)$;
2. Les vecteurs $u_1,\ldots,u_p$ sont linéairement indépendants.

1. On dit aussi perpendiculaires.

Bases orthonormées

Définition 3.3.2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Une base orthonormée de E est une base $\mathcal{B} = (u_1,\ldots,u_n)$ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et normés ($\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i,j \leqslant n$).

Exemples : Dans $\mathbb{R}^n$, la base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormée pour le produit scalaire standard.
Trouver une base orthonormée de $\rangle \cos, \sin\langle \subset C_0([0,2\pi])$.

Proposition 3.3.5

Une base $\mathcal{B} = (u_1,\ldots,u_n)$ est une base orthonormée si, et seulement si, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ est donné par
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{3.7}$$

Existence : processus de Gram-Schmidt

Proposition 3.3.6 (Processus de Gram-Schmidt)

Tout espace vectoriel euclidien E de dimension finie admet une base orthonormée. De plus si $u_1,\ldots,u_n$ est une base de E, il existe une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_n)$ telle que $\rangle v_1,\ldots,v_k\langle = \rangle u_1,\ldots,u_k\langle$ pour tout $k = 1,\ldots,n$.

Preuve : Récurrence sur la dimension n de E.

- Pour $n = 1$, on a une base (u_1) et $v_1 = \frac{u_1}{|u_1|}$ convient.
- Induction : Soit $u_1,\ldots,u_n$ une base de E. Alors $\rangle u_1,\ldots,u_{n-1}\langle$ est un espace vectoriel euclidien pour le même produit scalaire.
- Il existe $v_1,\ldots,v_{n-1}$ satisfaisant $\rangle v_1,\ldots,v_k\langle = \rangle u_1,\ldots,u_k\langle$ pour tout $k = 1,\ldots,n-1$.
- On pose $v_n' = u_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle u_n, v_i\rangle v_i \neq 0$ et $v_n = \frac{v_n'}{|v_n'|}$.

Changements de bases orthonormées

Définition 3.3.8

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}_n^n$ est orthogonale si $A^\sim = A^{-1}$.

Remarque : Cette condition s'écrit $A^\sim A = A A^\sim = \mathrm{Id}$ ou

$$\sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j} = \delta_{i,j}, \quad \forall i,j \leqslant n.$$

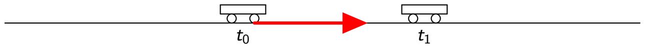
Proposition 3.3.9

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E. Soit $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ une autre base de E. Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée si, et seulement si, la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

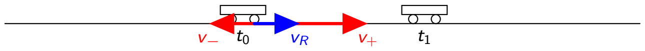
Preuve : Définition de la matrice de changement de base et calcul du produit scalaire.

Orientation d'un espace vectoriel : un exemple en dim 1.

Un mobile est en MRU sur une droite d, on suppose $t_0 < t_1$. Quel est le signe de sa vitesse (instantanée) en t_0 ?



Réponse :
Il faut orienter l'axe : on fixe une vitesse de référence ($v_R \neq 0$)

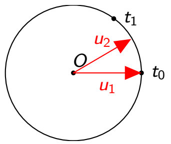


Remarques :

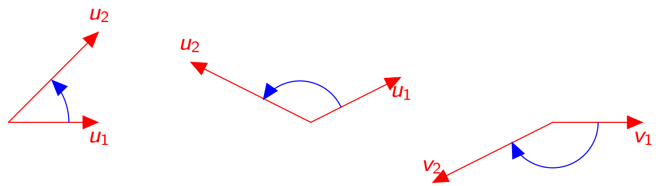
- Tous les mutliples positifs de v_R définissent la même orientation.
- Raoul aurait pu choisir une autre orientation.
- On ne peut passer continûment d'une vitesse positive à une négative sans passer par 0.

Orientation d'un espace vectoriel : un exemple en dim 2.

Un mobile est en MCU autour d'un point O. On suppose $t_0 < t_1$. Quel est le signe de sa vitesse angulaire en t_0 ?



Il faut deux positions de référence, i.e. deux vecteurs du plan, pour définir la vitesse angulaire positive. Ces vecteurs doivent former une *base*.



Orientation d'un espace vectoriel

Définition 3.4.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Deux bases définissent la même orientation si la matrice de changement de base est à déterminant positif.
- Deux bases définissent une orientation différente si cette matrice est à déterminant négatif.

Il y a donc deux ensembles de bases.

Définition 3.4.5

Orienter l'espace, c'est choisir un de ces ensembles de bases, et déclarer qu'elles sont positives.

Produit mixte de trois vecteurs

Intuition : Mesurer un "volume signé".

Définition 3.4.6

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base orthonormée positive de E, espace eucl. orienté de dim. 3. Le produit mixte des vecteurs u, v, w est défini par

$$[u, v, w] = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix},$$

où $(u_1, u_2, u_3)^\sim$, $(v_1, v_2, v_3)^\sim$ et $(w_1, w_2, w_3)^\sim$ sont respectivement les composantes de u, v et w dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.4.7

La définition est indépendante du choix de la base orthonormée positive $\mathcal{B}$ utilisée pour faire le calcul.

Propriétés

Proposition 3.4.8

Le produit mixte a les propriétés suivantes.

1. Il est trilinéaire, c'est à dire linéaire en chaque argument, les autres étant fixés ;
2. Il est alterné : il change de signe si on permute deux de ses arguments ;
3. On a $[u, v, w] = 0$ si, et seulement si, u, v et w sont linéairement dépendants.
4. On a $[u, v, w] > 0$ (resp. < 0) si, et seulement si, (u, v, w) est une base positive.

Produit vectoriel de deux vecteurs

Proposition 3.4.9

Pour tous $u, v \in E$, il existe un unique vecteur a satisfaisant la relation

$$[u, v, w] = \langle a, w \rangle$$

pour tout $w \in E$. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée positive, dans laquelle u et v ont pour composantes $(u_1, u_2, u_3)^\sim$ et v : $(v_1, v_2, v_3)^\sim$, alors a admet pour composantes

$$\left(\det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right)^\sim. \tag{3.10}$$

Définition 3.4.10

Le produit vectoriel des vecteurs u et v est le vecteur défini par la proposition précédente. Il est noté $u \wedge v$.

Propriétés et caractérisation

Proposition 3.4.11

L'opération produit vectoriel a les propriétés suivantes :

1. Elle est antisymétrique (ou alternée) : on a $u \wedge v = -v \wedge u$ pour tout $u, v \in E$.
2. Elle est bilinéaire, c'est à dire linéaire sur chacun de ses arguments, l'autre étant fixé ;

Proposition 3.4.12

Soient u, v des vecteurs de E. Alors

1. Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v ;
2. Le produit vectoriel $u \wedge v$ est nul si, et seulement si, u et v sont linéairement dépendants.
3. Si u et v sont non nuls, on a $|u \wedge v| = |u||v| \sin \alpha$ où α est l'angle non orienté entre u et v ;
4. Si u et v sont linéairement indépendants, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base positive.

Symbole de Levi-civita

Si (b_1, b_2, b_3) est une base orthonormée positive, alors on a

$$b_i \wedge b_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} b_k$$

où

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & \text{si} \quad (i,j,k) = (2,1,3), (1,3,2), (3,2,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce symbole est appelé symbole de Levi-Civita [2].

En général, si $u = \sum_{i=1}^{3} u_i b_i$, $v = \sum_{i=1}^{3} v_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^{3} w_i b_i$ alors

$$u \wedge v = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j b_k, \quad [u,v,w] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k.$$

2. Tullio Levi-Civita (1873-1941), inventeur du calcul tensoriel (avec Ricci) vers 1900.

Double produit vectoriel

Proposition 3.4.15

On a les formules suivantes

- $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$,
- $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$,

quels que soient $u, v, w \in E$.

- En français : “Le double produit vectoriel vaut le vecteur au milieu fois le produit scalaire des deux autres, moins le deuxième vecteur de la parenthèse, fois le produit scalaire des deux autres”.
- **Preuve :** calcul “à la main” pour tous les vecteurs de base ou avec le symbole de Levi-Civita.

Une équation vectorielle

- Soit $a \neq 0$ et $b \in E$, espace vectriel euclidien orienté de dimension 3.
- On cherche les solution de l’équation

$$a \wedge x = b. \tag{3.11}$$

- On peut l’écrire dans une B.O. positive.

Proposition 3.4.16

L’équation (3.11) est compatible si, et seulement si, $\langle a, b \rangle = 0$. Dans ce cas l’ensemble des solutions est

$$S = \{-\frac{1}{|a|^2} a \wedge b + \lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve : Si le sys. est compatible, $b = a \wedge x_0$, alors b est orthogonal à a. Si b est orthogonal à a, on vérifie que les solutions proposées sont des solutions et que toutes les solutions sont de cette forme.

Angle orienté du plan

Une orientation de E eucl. orienté de dim. 2 définit un sens de rotation.

Définition 3.4.17

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L’angle orienté entre u et v est l’unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

- $\cos(\theta) = \cos(\alpha) = \frac{\langle u,v \rangle}{|u||v|}$ (α est l’angle non orienté entre u et v)
- $\sin(\theta)$ est str. positif si, et seulement si, (u, v) est une base positive.

Proposition 3.4.19

Soit (u, v) un couple de vecteurs non nuls. L’angle orienté θ entre u et v est défini par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}}{|u||v|}$$

si u et v ont pour composantes $(u_1, u_2)^\sim$ et $(v_1, v_2)^\sim$ dans une base orthonormée positive.

Complément orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Définition 3.5.1

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, le *complément orthogonal* de F est l'ensemble
$$F^{\perp} = \{u \in E : \langle u, f \rangle = 0, \quad \forall f \in F\}.$$
De plus $F \perp G$ si $F \subset G^{\perp}$ ou $G \subset F^{\perp}$.

Proposition 3.5.3

Pour tout sous-espace vectoriel F de E,

1. L'ensemble $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel ;
2. On a $E = F \oplus F^{\perp}$;
3. On a $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$;
4. On a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve : 1) Classique 2) fixer une base dont les premiers élém. sont dans F, orthogonaliser. On obtient une B.O. $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une B.O. de F.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

Définition 3.5.4

Pour tout $u \in E$, on a la décomposition unique $u = u_F + u_{F^{\perp}}$. La projection orthogonale de u sur F est u_F.

Proposition 3.5.5

Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F, alors la projection orthogonale d'un vecteur u sur F est donnée par
$$u_F = \langle u, f_1 \rangle f_1 + \cdots + \langle u, f_p \rangle f_p.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Conséquences : Droites et hyperplans

Proposition 3.5.6

Si F est une droite vectorielle engendrée par f, alors la projection orthogonale de u sur F est
$$u_d = \frac{\langle u, f \rangle}{|f|^2} f.$$

Définition 3.5.7

Si π est un hyperplan vectoriel, on appelle *normale à* π tout vecteur directeur de $\pi^{\perp}$.

Proposition 3.5.8

Si π est un hyperplan vectoriel de normale N, alors la projection orthogonale de u sur π est
$$u_{\pi} = u - \frac{\langle u, N \rangle}{|N|^2} N.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equation normale d'un hyperplan et orthogonalité

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, et π un hyperplan.

Proposition 3.5.9

Alors $N : (a_1, \ldots, a_n)$ est normal à π ssi l'hyperplan π admet l'équation cartésienne
$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

Preuve : On a $\pi^{\perp} = \rangle N \langle$ ssi $\pi = \rangle N \langle^{\perp}$ ssi
$$\pi = \{u \in E : \langle N, u \rangle = 0\}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.