



Espaces affines euclidiens

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Définitions : espaces affines euclidiens, repères orthonormés

Définition 4.1.1

Un espace affine euclidien \mathcal{A} (resp. orienté) est un espace affine modelé sur un espace vectoriel euclidien (resp. orienté).

Définition 4.1.2

Un repère orthonormé (resp. positif) est un repère $(O, (b_1, \dots, b_n))$ tel que la base (b_1, \dots, b_n) soit orthonormée (resp. positive).

Proposition 4.1.3

Les coordonnées d'un point P dans un repère orthonormé $(O, (b_1, \dots, b_n))$ sont données par

$$P : (\langle \overrightarrow{OP}, b_1 \rangle, \dots, \langle \overrightarrow{OP}, b_n \rangle) \sim .$$

Distance euclidienne

Définition 4.1.4

La distance euclidienne du point P au point Q de \mathcal{A} , notée $d(P, Q)$ est définie par

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Proposition 4.1.5

On a

- 1 $d(P, Q) = d(Q, P)$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$;
- 2 $d(P, Q) \geq 0$ pour tous $P, Q \in \mathcal{A}$ et $d(P, P) = 0$;
- 3 $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ pour tous $P, Q, R \in \mathcal{A}$;
- 4 $d(P, Q) = 0$ si, et seulement si, $P = Q$.

Théorème de Pythagore et consorts, distances

Proposition 4.1.6

Soit un triangle A, B, C . On a alors

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 - 2|\vec{AC}||\vec{CB}| \cos \alpha$$

où α est l'angle non orienté entre \vec{CA} et \vec{CB} . En particulier, le triangle est rectangle en C si, et seulement si, on a

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2.$$

Proposition 4.1.7

Si les coordonnées de P et Q dans un *repère orthonormé* sont $(p_1, \dots, p_n)^\sim$ et $(q_1, \dots, q_n)^\sim$, alors la distance $d(P, Q)$ est donnée par

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}.$$

Variétés affines orthogonales

Définition 4.2.1

Les variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont orthogonales si leurs sous-espaces vectoriels directeurs $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}'}$ sont orthogonaux. On note $\mathcal{V} \perp \mathcal{V}'$.

- Les droites $d = A + \langle u \rangle$ et $d' = A' + \langle v \rangle$ sont orthogonales si, et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$.
- Si $u : (u_1, \dots, u_n) \sim$ et $v : (v_1, \dots, v_n) \sim$ dans *une base orthonormée*, alors on a $d \perp d'$ si, et seulement si $u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = 0$.
- En dimension 3, la droite $d = A + \langle u \rangle$ et le plan $\pi = B + \langle v, w \rangle$ sont orthogonaux si, et seulement si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$.
- On a aussi $d \perp \pi$ si, et seulement si $\vec{d} = \vec{\pi}^\perp$.
- Si dans un repère orthonormé $\pi \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ et $u : (u_1, u_2, u_3) \sim$ (dans la base associée) alors on a $d \perp \pi$ si, et seulement si, (u_1, u_2, u_3) est multiple de (a_1, a_2, a_3) .
- En dimension 3, deux plans ne sont jamais orthogonaux.

Projections orthogonales

Proposition 4.3.1

Soit $\mathcal{V} = A + \vec{\mathcal{V}}$ une variété affine et $P \in \mathcal{A}$. Il existe un unique point $P' \in \mathcal{V}$ tel que $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{\mathcal{V}}$ (i.e. $\overrightarrow{PP'} \in F^\perp$). De plus, on a

$$P' = A + p_{\vec{\mathcal{V}}}(\overrightarrow{AP}) = P - p_{\vec{\mathcal{V}}^\perp}(\overrightarrow{AP}).$$

Preuve : Existence : décomposer \overrightarrow{AP} selon $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{V}}^\perp$. Unicité : $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{V}}^\perp = \vec{\mathcal{A}}$.

Définition 4.3.2

L'unique point P' défini par la proposition précédente est appelé projection orthogonale de P sur \mathcal{V} . Il est noté $p_{\vec{\mathcal{V}}}^\perp(P)$ ou $p_{\mathcal{V}}(P)$.

Proposition 4.3.3

La projection orthogonale de P sur \mathcal{V} est l'unique point P' d'intersection des variétés affines orthogonales \mathcal{V} et $P + \mathcal{V}^\perp$.

Projection sur des droites et hyperplans

Proposition 4.3.4

Soit π l'hyperplan déterminé par le point A et le vecteur normal N , c'est à dire

$$\pi = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{AX}, N \rangle = 0\}$$

et $P \in \mathcal{A}$. Alors on a

$$P' = P - \frac{\langle \overrightarrow{AP}, N \rangle}{|N|^2} N.$$

Proposition 4.3.5

Soit $d = A + \langle u \rangle$ et soit $P \in \mathcal{A}$. La projection orthogonale de P sur d est le point

$$P' = A + \frac{\langle \overrightarrow{AP}, u \rangle}{|u|^2} u.$$

Deux exercices

- ① Dans un esp. aff. euclidien de dim 3 muni d'un R.O., on considère $P : (1, 2, 3)^\sim$

$$\pi \equiv 3x + 2y - z = 4.$$

- ① Ecrire une éq. cartésienne de la droite normale à π et passant par P .
 - ② Ecrire une équation paramétrique de cette droite.
 - ③ Déterminer les coordonnées de la projection de P sur π .
 - ④ Déterminer un point $A \in \pi$.
 - ⑤ Appliquer la formule donnant la projection orthogonale de P sur π .
- ② Dans un esp. aff. euclidien de dim 3 muni d'un R.O., on considère

$$A : (1, 2, 0)^\sim, \quad B : (0, 1, 3), \quad C : (2, 4, 1).$$

- ① Ecrire une équation cartésienne du plan ABC .
- ② Déterminer une équation cartésienne de la normale à ce plan contenant A .
- ③ Déterminer une équation du plan orthogonal à AB et contenant C .
- ④ Déterminer les coord. de la projection orthogonale de C sur AB .

Distance de deux ensembles

Définition 4.4.1

La distance entre deux sous-ensembles \mathcal{P} et \mathcal{Q} non vides de \mathcal{A} est définie par

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \inf\{d(P, Q) : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Rappels :

- La borne inférieure d'un ensemble (non vide) $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est un *minorant* de \mathcal{E} : on a

$$\inf \mathcal{E} \leq x \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

- Il n'y a pas de "meilleur" minorant de \mathcal{E} :

$$\forall y > \inf \mathcal{E}, \exists x \in \mathcal{E} : x < y.$$

- La borne inférieure $\inf \mathcal{E}$ est *réalisée* si $\inf \mathcal{E} \in \mathcal{E}$.
- Par exemple $\inf [1, 4]$ est réalisée, $\inf]2, 4]$ ne l'est pas.

Un exemple graphique

Dans un repère orthonormé, considérons le graphe \mathcal{P} de la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

Un exemple graphique

Dans un repère orthonormé, considérons le graphe \mathcal{P} de la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

On a $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$, mais la distance n'est pas réalisée.

Un exemple graphique

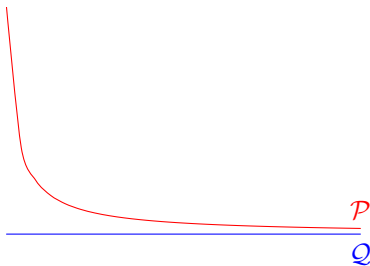
Dans un repère orthonormé, considérons le graphe \mathcal{P} de la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et

$$\mathcal{Q} = \{(x, 0) : x \in]0, +\infty[\}.$$

On a $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$, mais la distance n'est pas réalisée.



Le cas des variétés affines

Théorème 4.4.2

Soit $\mathcal{V} = A + F$ et $\mathcal{V}' = B + F'$ deux variétés affines. Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{PP'}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1 $P \in \mathcal{V}$ et $P' \in \mathcal{V}'$;
- 2 $\langle \overrightarrow{PP'} \rangle$ est orthogonal à F et à F' .

On a $\overrightarrow{PP'} = p_{(F+F')^\perp}(\overrightarrow{AB})$. La distance de \mathcal{V} et \mathcal{V}' vaut $|\overrightarrow{PP'}|$. Si $F \cap F' = \{0\}$, alors la distance est réalisée par un unique couple (P, P') .

Preuve :

- Unicité : si $\overrightarrow{PP'}$ répond à la question, $\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{P'B}) + \overrightarrow{PP'}$, donc $\overrightarrow{PP'} = p_{(F+F')^\perp}(\overrightarrow{AB})$.
- Existence : $\overrightarrow{AB} = u_{F+F'} + u_{(F+F')^\perp} = u_F + u_{F'} + u_{(F+F')^\perp}$,
- Pour tous $X \in \mathcal{V}$ et $X' \in \mathcal{V}'$, on a alors

$$|\overrightarrow{XX'}|^2 = |\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X'}|^2 = |\overrightarrow{PP'}|^2 + |\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{P'X'}|^2 \geq |\overrightarrow{PP'}|^2.$$

Cas particulier 1 : un point et une variété affine

Corollaire 4.4.3

La distance d'un singleton $\{B\}$ à une variété affine \mathcal{V} est réalisée : on a $d(B, \mathcal{V}) = d(B, B')$ où B' est la projection orthogonale de B sur \mathcal{V} . La distance est réalisée de manière unique.

Preuve : On a $F = \{0\}$. On a $d(B, \mathcal{V}) = d(P, P')$ où $P = B$, $P' \in \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{PP'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

Corollaire 4.4.4

Soient $\pi = A + \overrightarrow{\pi}$ un hyperplan, N une normale à cet hyperplan et $B \in \mathcal{A}$. Alors

$$d(B, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, N \rangle|}{|N|}$$

En particulier, si dans un repère orthonormé π admet pour équation

$$\pi \equiv c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b$$

et si $B : (p_1, \dots, p_n) \sim$, alors $d(P, \pi) = \frac{|c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n - b|}{\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}}$.

Cas particulier 2 : les droites

Corollaire 4.4.5

Soit \mathcal{D} la droite déterminée par le point A et le vecteur directeur u et soit $B \in \mathcal{A}$. Alors on a

$$d(B, \mathcal{D}) = |\vec{AB}| \sin \alpha,$$

où α est l'angle non orienté entre \vec{AB} et u .

En particulier, pour un espace affine euclidien de dimension 3, on a

$$d(B, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{AB} \wedge u|}{|u|},$$

où le produit vectoriel est calculé dans une orientation quelconque.
(Attention notes de cours)

Preuve : On calcule $\vec{PP'} = p_{y_{u^{\perp}}}(\vec{AB}) = \vec{AB} - \frac{\langle \vec{AB}, u \rangle}{|u|^2} u$.

On a donc puisque $\vec{PP'} \perp u$,

$$|\vec{PP'}|^2 = |\vec{AB}|^2 - \left(\frac{\langle \vec{AB}, u \rangle}{|u|} \right)^2 = |\vec{AB}|^2 - (|\vec{AB}| \cos(\alpha))^2.$$

Droites et plans en dimension 2 et 3

Proposition 4.4.6

Si $\dim \mathcal{A} = 2$, et si les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes, alors $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = 0$. Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles, alors on a $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = d(P, P')$ pour tout $P \in \mathcal{D}$, si P' est la projection de P sur \mathcal{D}' .

Proposition 4.4.7

Si $\dim \mathcal{A} = 3$, et si π et π' sont sécants, alors $d(\pi, \pi') = 0$. Si π et π' sont parallèles, alors on a $d(\pi, \pi') = d(P, P')$ pour tout $P \in \pi$, si P' est la projection de P sur π' .

Proposition

Si $\dim \mathcal{A} = 3$, et si \mathcal{D} et π sont sécants, alors $d(\mathcal{D}, \pi) = 0$. Si \mathcal{D} et π sont parallèles, alors on a $d(\mathcal{D}, \pi) = d(P, P')$ pour tout $P \in \mathcal{D}$, si P' est la projection de P sur π .

Droites en dimension 3

Le cas des droites sécantes ou parallèles est clair. Traitons celui des droites gauches.

Proposition 4.4.8

Les droites gauches $\mathcal{D} = A+\rangle u\langle$ et $\mathcal{D}' = B+\rangle u'\langle$ ont une distance égale à

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \frac{|[\overrightarrow{AB}, u, u']|}{|u \wedge u'|}.$$

Il existe un unique couple de points $P \in \mathcal{D}$, $P' \in \mathcal{D}'$ tels que

$$d(P, P') = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}').$$

Ces points déterminent la droite perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Preuve : On projette \overrightarrow{AB} sur le complément orthogonal de $\rangle u\langle + \rangle v\langle = \rangle u, v\langle$. C'est

$$\frac{\langle \overrightarrow{AB}, u \wedge v \rangle}{|u \wedge v|^2} u \wedge v = \frac{[\overrightarrow{AB}, u, v]}{|u \wedge v|^2} u \wedge v.$$

Angles de droites et hyperplans

Définition 4.5.1

L'angle des droites $\mathcal{D} = A+\rangle u\langle$ et $\mathcal{D}' = A'+\rangle u'\langle$ est l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ déterminé par

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle u, u' \rangle|}{|u||u'|}.$$

Définition 4.5.2

L'angle d'une droite \mathcal{D} et d'un hyperplan π vaut $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ où α est l'angle entre \mathcal{D} et une normale quelconque \mathcal{N} à π . On a donc

$$\sin \beta = \frac{|\langle u, N \rangle|}{|u||N|},$$

où u est un vecteur directeur de \mathcal{D} et N une normale à π .

Angle de deux hyperplans

Définition 4.5.3

L'angle de deux hyperplans π et π' est l'angle α entre deux de leurs droites normales quelconques. On a donc

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle N, N' \rangle|}{|N||N'|}$$

où N et N' sont des normales à π et π' respectivement.