Théorie des courbes

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, printemps 2017

Quelques exemples

On se donne une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine. Si on fixe un repère (orthonormé), on a alors *n* fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Voici quelques exemples bien connus :

1. $\gamma_1 :]0, \pi[\to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (R\cos(\alpha), R\sin(\alpha))$;
2. $\gamma_2 :]-R, R[\to \mathcal{A} : x \mapsto (x, \sqrt{R^2 - x^2})$;
3. $\gamma_3 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathcal{A} : \theta \mapsto (R\sin(\theta), R\cos(\theta))$.

Ce sont trois paramétrages du même demi-cercle (si $\mathcal{A}$ est affine euclidien muni d'un repère orthonormé).

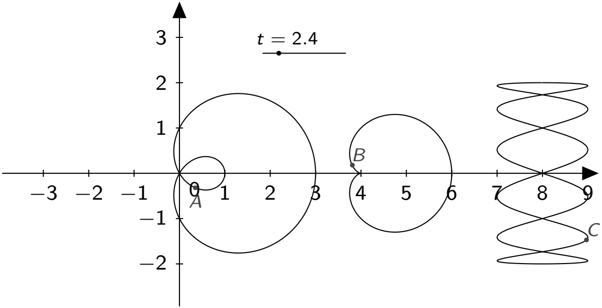
On peut imaginer n'importe quoi :

1. $\gamma_4 :]0, 2\pi[\to \mathcal{A} : \alpha \mapsto (1 + \cos(\alpha))(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$;
2. $\gamma_5 :]0, 4\pi[\to \mathcal{A} : \theta \mapsto (\sin(3\theta), \sin(4\theta))$.

La première est une cardioïde, la seconde une courbe de Lissajous.

Quelques exemples II

Voici le Limaçon de Pascal, une cardioïde et une courbe de Lissajous.



J'ai aussi indiqué l'intervalle et le paramètre définissant les courbes.

Fonctions à valeurs dans un espace affine, ou vectoriel

Définition 5.1.1

Une application P définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace affine $\mathcal{A}$ est continue (resp. dérivable, de classe C_p) si il existe un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$ tel que les coordonnées de P soient des fonctions continues (resp. dérivables, de classe C_p).

Proposition 5.1.2

Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application. Si les coordonnées de P dans un repère $\mathcal{R} = (O, (b_1, \ldots, b_n))$, sont continues (resp. dérivables, de classe C_p), alors les coordonnées de P dans tout repère le sont également.

Définition 5.1.2 bis

La même définition vaut pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel, et la même proposition également, modulo le remplacement de "repère" par "base".

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dérivées

Définition 5.1.3

Soit $P : \Omega \to \mathcal{A}$ une application dérivable en un point $u_0 \in \Omega$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère dans lequel

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}.$$

Alors la dérivée de P en u_0 est le vecteur donné dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) : \begin{pmatrix} D_u x_1(u_0) \\ \vdots \\ D_u x_n(u_0) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Proposition

La définition est indépendante du choix du repère dans lequel on calcule la dérivée : $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$ se transforme comme un vecteur.

Preuve

Si dans le repère $\mathcal{R}$ l'application $P : u \mapsto P(u)$ s'exprime en coordonnées par

$$P(u) : \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix},$$

alors dans un autre repère $\mathcal{R}'$, on a

$$P(u) : \begin{pmatrix} y_1(u) \\ \vdots \\ y_n(u) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions y_j sont obtenues en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ par la formule de changement de repère :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_{11}x_1(u) + \cdots + a_{1n}x_n(u) + c_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n(u) & = & a_{n1}x_1(u) + \cdots + a_{nn}x_n(u) + c_n, \end{array} \right.$$

où les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes.

Remarques

1. On a des définitions analogues pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel. On considère les composantes dans une base donnée ;
2. Si on devait considérer une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ avec $k > 1$, la même définition permettrait de définir les dérivées partielles ;
3. On aurait pu définir la dérivée par

$$\overrightarrow{D_u P}(u_0) = \lim_{h \to 0} \frac{P(u_0 + h) - P(u_0)}{h}.$$

On aurait obtenu le même résultat, mais il aurait fallu définir la notion de limite pour une telle fonction, ce qui reportait le problème.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques résultats sur la dérivation I

Proposition 5.1.4

Si f, g, h sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables alors

$$D_u(\langle f(u), g(u)\rangle) = \langle D_u f(u), g(u)\rangle + \langle f(u), D_u g(u)\rangle, \quad \forall u \in \Omega.$$

En particulier, si $|f(u)| = C \quad \forall u \in \Omega$, alors $\langle D_u f(u), f(u)\rangle = 0$.
Si E est euclidien orienté de dimension 3, alors

$$D_u(f(u) \wedge g(u)) = D_u f(u) \wedge g(u) + f(u) \wedge D_u g(u),$$

et

$$\begin{aligned} D_u[f(u), g(u), h(u)] = {} & [D_u f(u), g(u), h(u)] + [f(u), D_u g(u), h(u)] \\ & + [f(u), g(u), D_u h(u)]. \end{aligned}$$

Quelques résultats sur la dérivation II

Proposition 5.1.4 bis et 5.1.5

Si f, g sont des fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans E (e.v. euclidien), dérivables et telles que

$$\langle f(u), g(u)\rangle = C \quad \forall u \in \Omega,$$

alors on a

$$\langle D_u f(u), g(u)\rangle = -\langle f(u), D_u g(u)\rangle \quad \forall u \in \Omega.$$

Si P est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ ou E, dérivable, et si $\varphi : \Omega' \to \Omega$ est dérivable, alors $P \circ \varphi$ est dérivable et on a

$$\overrightarrow{D_{u'} P \circ \varphi}(u'_0) = \overrightarrow{D_u P}(u)|_{u=\varphi(u'_0)} D_{u'} \varphi(u'_0).$$

Paramétrages et arcs réguliers

Définition 5.2.1

Un paramétrage de classe C_p d'un arc régulier de courbe est un couple (Ω, P) où

- Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
- $P : \Omega \to \mathcal{A}$ est une application de classe C_k ;
- On a $\overrightarrow{D_u P}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

Un *arc régulier de courbe* est $P(\Omega)$ si (Ω, P) est un paramétrage.

Exemples : γ_1, γ_2 et γ_3 définissent des paramétrages d'arcs réguliers, mais pas γ_4, car par exemple

$$D_\alpha \gamma_1(\alpha) = (-R\sin(\alpha), R\cos(\alpha)) \neq (0,0), \text{ pour tout } \alpha \in]0, \pi[,$$

mais

$$D_\alpha \gamma_4(\alpha) = -\sin(\alpha)(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + (1+\cos(\alpha))(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

s'annule en $\alpha = \pi$.

Paramétrages équivalents : exemples

- Les paramétrages γ_1, γ_2 et γ_3 définissent le même arc régulier de courbe.
- On a juste changé de paramètre :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$;
  2. $\gamma_2(x) = \gamma_1(\arccos(\frac{x}{R}))$;

  On a une correspondance de paramètres :

$$x = R\cos(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \arccos(\frac{x}{R}) = \varphi^{-1}(\alpha).$$

  De même :
  1. $\gamma_1(\alpha) = \gamma_3(\frac{\pi}{2} - \alpha)$;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_1(\frac{\pi}{2} - \theta)$;

  et
  1. $\gamma_2(x) = \gamma_3(\arcsin(\frac{x}{R}))$;
  2. $\gamma_3(\theta) = \gamma_2(R\sin(\theta))$.

Définition 5.2.3

Deux paramétrages de classe C_p (Ω, P) et (Ω', Q) d'un arc régulier de courbe sont équivalents s'il existe un changement de variable de classe C_p $\varphi : \Omega' \to \Omega$ tel que

$$Q(u') = P \circ \varphi(u') \quad \forall u' \in \Omega'.$$

Remarques :

1. la condition précédente se lit $Q = P \circ \varphi$, mais aussi $P = Q \circ \varphi^{-1}$;
2. On écrit parfois $P(u')$ au lieu de $Q(u')$;
3. On voit aussi parfois la notation suivante :

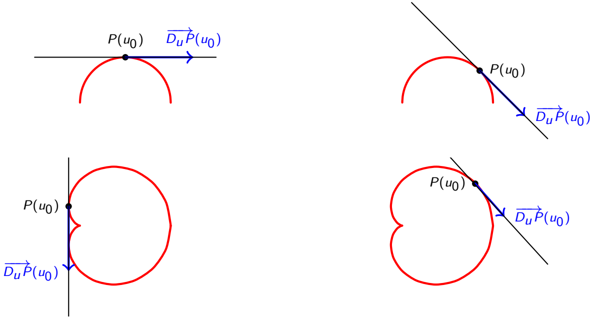
$$P = P(u), \quad u = u(u') \quad \text{donc} \quad P = P(u') = P(u(u')).$$

4. Pour associer un objet géométrique à l'arc régulier de courbe défini par une classe de paramétrages équivalents, il faut vérifier que cet objet ne dépend pas du paramétrage choisi pour le définir.

Tangente en un point d'un arc régulier

Définition 5.2.5

La tangente en un point $P(u_0)$ d'un A.R.C. Γ est la droite passant par $P(u_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{D_u P}(u_0)$.



Proposition 5.2.7

13 Cette définition est indépendante du paramétrage.

Orientation d'un arc régulier de courbe

- Un paramétrage définit un sens de parcours de l'A.R.C.
- Si (Ω, P) est un paramétrage, alors $P(u_1)$ est avant $P(u_2)$ si $u_1 < u_2$.
- Le "monde" des paramétrages équivalents d'un A.R.C. se divise en deux sous-ensembles.

Définition 5.2.9

Un paramétrage (Ω, P) et un paramétrage équivalent $(\Omega', Q = P \circ \varphi)$ définissent la même orientation si $D_v\varphi(v) > 0$ pour tout $v \in \Omega'$. Dans le cas contraire, ils définissent une orientation différente.

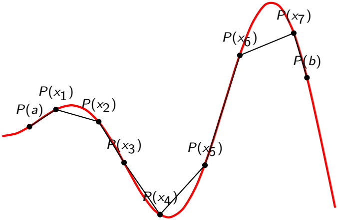
Exemple : $\gamma_1(\alpha) = \gamma_2(R\cos(\alpha))$. Le changement de variable est défini par

$$\varphi(\alpha) = R\cos(\alpha)$$

et tel que $D_\alpha\varphi(\alpha)$ est négatif sur $]0, \pi[$.

Longueur d'arc

L'idée pour calculer la longueur de l'arc de courbe entre $P(a)$ et $P(b)$:



Définition 5.2.11

La longueur de l'arc de courbe déterminé par (Ω, P) entre $P(a)$ et $P(b)$ est le nombre

$$\sup_{D=[a=x_0,x_1,\ldots,x_n,b=x_{n+1}]} \sum_{i=1}^{n+1} |P(x_i) - P(x_{i-1})|$$

quand cette borne supérieure existe (auquel cas l'arc de courbe est dit rectifiable).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Calcul explicite et abscisse curviligne

Proposition 5.2.12

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et si $a < b$ sont dans Ω, alors la longueur d'arc entre $P(a)$ et $P(b)$ vaut

$$\int_a^b |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Ce résultat est admis, mais généralise le cas du graphe d'une fonction vu au cours de Mathématiques Générales.

Définition 5.2.13

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1 et $u_0 \in \Omega$. L'ascisse curviligne $s(u)$ de $P(u)$ est la longueur d'arc entre $P(u_0)$ et $P(u)$ si $u_0 < u$ et l'opposé de cette longueur d'arc si $u < u_0$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés fondamentales de l'abscisse curviligne

Proposition 5.2.14 (Calcul explicite)

Si (Ω, P) est un paramétrage de classe C_1, alors l'abscisse curviligne de $P(u)$ vaut

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overrightarrow{D_v P(v)}| dv.$$

Proposition 5.2.15 (Changement de variable)

L'abscisse curviligne est une fonction à dérivée strictement positive : on a

$$D_u s(u) = |\overrightarrow{D_u P}(u)| > 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

Elle définit donc un changement de variable $s : \Omega \to s(\Omega)$.
Le changement de variable inverse, noté $u = u(s)$ est tel que

$$D_s u(s) = \frac{1}{|\overrightarrow{D_u P}(u)|}|_{u=u(s)}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Paramétrages naturels

Définition 5.2.16

Un paramétrage (Ω, P) est naturel si on a $|\overrightarrow{D_u P(u)}| = 1$, pour tout $u \in \Omega$.

Proposition 5.2.17

Tout paramétrage (Ω, P) est équivalent à un paramétrage naturel.

Preuve : le paramétrage par l'abscisse curviligne, dans une orientation donnée est naturel.

Exemple : Le paramétrage

$$P(u) = (R\cos(u), R\sin(u)), \quad s \in]0, \pi[$$

n'est pas naturel mais le parmétrage

$$\gamma(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R})), \quad s \in]0, \pi R[,$$

est naturel.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Vecteur tangent unitaire

Soit (Ω, P) un paramétrage d'un arc régulier de courbe.

Définition 5.3.1

Le *vecteur tangent unitaire* en $P(u_0)$ défini par le paramétrage (Ω, P) est

$$\mathbf{t} = \frac{\overrightarrow{D_u P(u_0)}}{|\overrightarrow{D_u P(u_0)}|}$$

Proposition 5.3.2

Si P et Q définissent des paramétrages équivalents, alors les vecteurs tangents en $P(u_0) = Q(u_0')$ définis par ces deux paramétrages sont égaux ou opposés.

Proposition 5.3.3

Si on a un paramétrage naturel $(\Omega, s \mapsto P(s))$, alors on a

$\mathbf{t}(s) = \dot{P}(s) = \overrightarrow{D_s P(s)}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Courbure et normale principale

On cherche à analyser la variation de $\mathbf{t}$ en fonction d'un paramètre naturel s. Il ne peut pas varier en norme.

Proposition 5.3.4

Le vecteur $\dot{\mathbf{t}}$ est orthogonal à $\mathbf{t}$.

Définition 5.3.5

La courbure de l'arc régulier de courbe au point $P(s)$ est le nombre

$$\kappa(s) = |\dot{\mathbf{t}}(s)|.$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, alors le *vecteur normal principal* en $P(s)$ est

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{|\dot{\mathbf{t}}(s)|}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La binormale

Ayant deux vecteurs normés et orthogonaux dans un espace euclidien de dimension 3, on calcule naturellement un troisième vecteur.

Définition 5.3.6

Le *vecteur binormal* (la binormale) en le point P est le vecteur

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}.$$

Attention : dans certains ouvrages on définit $\mathbf{b} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$.

Proposition

Le triplet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ définit une base orthonormée positive.

Rem. : si on change d'orientation pour la courbe, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$ changent de signe, mais pas $\mathbf{n}$.

Le trièdre proprement dit

Nous avons défini trois vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ en chaque point $P(s)$. Ces vecteurs définissent, avec le point P trois plans.

Définition 5.3.7

Le trièdre de Frenet est formé par les trois plans suivants.

- Le plan *osculateur* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{n} \langle$;
- Le plan *normal* est $P + \rangle \mathbf{n}, \mathbf{b} \langle$;
- Le plan *rectifiant* est $P + \rangle \mathbf{t}, \mathbf{b} \langle$.

Formules de Frenet dans un paramétrage naturel

Ces formules expriment les *dérivées* des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{b}$ dans la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

Définition 5.3.8

La torsion en un point $P(s)$ tel que $\kappa(s) \neq 0$ est définie par

$$\tau(s) = \langle \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{b}(s) \rangle.$$

Théorème 5.3.9 (Formules de Frenet)

Les dérivées des vecteurs $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ en un point $P(s)$ en lequel la courbure n'est pas nulle sont données par les formules suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{t}} & = & \kappa \mathbf{n}; \\ \dot{\mathbf{n}} & = & -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}; \\ \dot{\mathbf{b}} & = & -\tau \mathbf{n}. \end{array} \right.$$

Preuve : La première est la définition. Pour la deuxième on utilise les propriétés de la dérivation. Pour la dernière, on fait de même ou on dérive $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Trièdre de Frenet dans un paramétrage quelconque

On calcule les vecteurs $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, κ et τ dans un paramétrage (Ω, P) quelconque.

Proposition 5.3.10

Soit Γ un arc régulier de courbe de paramétrage (Ω, P). On a alors

a) $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$;

b) $\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3}$;

et, si $\kappa \neq 0$

c) $\mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}$;

d) $\mathbf{n} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|} \wedge \frac{P'}{|P'|}$;

e) $\tau = \frac{[P', P'', P''']}{|P' \wedge P''|^3}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La preuve : proposition 5.3.11

- L'abscisse curviligne, calculée à partir de $P(u_0)$ établit un changement de variable

$$s : \Omega \mapsto \Omega' : u \mapsto s(u) = \int_{u_0}^{u} \left| \overrightarrow{D_t P(t)} \right| \mathrm{d}t.$$

- On a donc $s : u \mapsto s(u)$. En inversant on écrit $u = u(s)$.
- Si $f : \Omega \to \mathcal{A}$(ou E), alors on définit

$$f : \Omega' \to E : s \mapsto f(s) = f(u(s)).$$

- On a alors

$$D_s f(s) = D_s f(u(s)) = D_u f(u)|_{u=u(s)} D_s(u(s)),$$

et

$$\dot{f}\,(s) = \frac{f'(u)}{|P'(u)|}|_{u=u(s)}.$$

La preuve proprement dite

- On a $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$ par définition.
- On dérive et on a

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|} \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^2} = \frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}.$$

- On a $\dot{\mathbf{t}} = 0$ ssi κ est nul. Dans ce cas P' et P'' sont linéairement dépendants. Donc $P' \wedge P'' = 0$. Dans le cas contraire :

$$\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}} = \frac{P'}{|P'|} \wedge \left(\frac{P''|P'| - |P'|'P'}{|P'|^3}\right) = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3}.$$

- En utilisant la première formule de Frenet, on trouve

$$\kappa \mathbf{b} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3},$$

- On a donc

$$\kappa = |\kappa \mathbf{b}| = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3},$$

et

$$\mathbf{b} = \frac{\kappa \mathbf{b}}{\kappa} = \frac{P' \wedge P''}{|P'|^3} \frac{|P'|^3}{|P' \wedge P''|} = \frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}.$$

- On a ensuite $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ puisque $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ est une base orthonormée positive, ce qui donne la valeur annoncée pour $\mathbf{n}$.
- On a a $\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle$ et

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}'}{|P'|} = \frac{1}{|P'|}\left(\frac{P' \wedge P''}{|P' \wedge P''|}\right)'$$

$$= \frac{(P' \wedge P''')|P' \wedge P''| - |P' \wedge P''|'(P' \wedge P'')}{|P'||P' \wedge P''|^2}.$$

- Donc on a

$$\tau = -\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\langle P' \wedge P''', (P' \wedge P'') \wedge P' \rangle}{|P'|^2|P' \wedge P''|^2},$$

que l'on calcule facilement.