0. Logique et théorie des ensembles

Ce chapitre présente une introduction à la logique et à la théorie des ensembles. Vous avez déjà rencontré la plupart des notions abordées ici, mais souvent sans les étudier pour elles-mêmes.

Ne soyez pas effrayés : je présente ici quelques définitions formelles, car je pense qu'il est souvent utile de les avoir sous la main. Je présente également quelques procédures systématiques qui permettent de n'oublier aucun cas de figure quand on est face à un problème logique, ou faisant appel à des ensembles ; c'est le cas des tables de vérité ou des diagrammes de Venn.

Bien qu'il ne fasse l'objet d'aucune évaluation, ce chapitre est important car d'une part, il permet de formaliser quelque peu la logique du langage courant, et d'autre part, il est présent en toile de fond dans tout cours de mathématique.

1 Logique

Nous commençons par donner une définition des assertions logiques, et des connecteurs qui permettent de former des assertions composées à l'aide d'assertions élémentaires.

Définition 1.1. Une *assertion* ou *proposition logique* est une phrase que l'on énonce sous forme affirmative ou négative.

Par exemple, on peut considérer les assertions suivantes.

1. "Aujourd'hui, je porte un pull rouge" ;
2. "3 est un nombre premier" ;
3. "3 n'est pas divisible par 2" ;
4. "tout nombre positif est pair" ;
5. "Il pleut" ;
6. "J'emporte un parapluie" ;
7. "Si Berlin est en Suisse, alors je viens de Mars" ;
8. "Si mon chat aboie, alors je gagne au lotto".

Les assertions sont construites de façon à être compréhensibles sans ambiguïté et sont telles qu'on peut décider si elles sont vraies ou fausses. Elles admettent donc des valeurs de vérité "vrai" et "faux" que l'on note aussi V et F ou 1 et 0.

Les phrases suivantes ne sont donc pas des propositions logiques.

1. "Quelle heure est-il ?"
2. "Paris est-elle la capitale de la France ?"
3. "Cette phrase est fausse."
4. "Je cornìflute gauche bien."

En effet, les deux premières sont des questions. Les propositions logiques correspondantes pourraient être "Il est 15 heures", "Paris n'est pas la capitale de la France". La troisième est contradictoire, puisque si elle est vraie, elle doit alors être fausse et vice-versa. Enfin, la quatrième n'a pas de sens.

Quand on dispose d'une ou plusieurs assertions, on peut en former de nouvelles, en utilisant les opérations logiques de négation, conjonction (et), disjonction (ou), implication ou bi-implication, encore appelées connecteurs logiques. Une assertion composée a alors des valeurs de vérité qui dépendent des valeurs de vérité des assertions qui la composent à partir des règles définies pour les connecteurs logiques. Ces règles peuvent être données à l'aide de tables de vérité.

Définition 1.2. Si P est une assertion, alors on note $\neg P$ la négation de P. Cette assertion est vraie si P est fausse et elle est fausse si P est vraie. La table de vérité de l'opérateur de négation $\neg$ est donc la suivante. [a]

P	$\neg P$
0	1
1	0

ou encore

P	$\neg P$
F	V
V	F

Remarque 1.3. Dans la suite, nous adopterons les valeurs 0 pour faux, et 1 pour vrai, mais vous pouvez conserver V et F si c'est plus concret pour vous.

Voici quelques exemples qui sont les négations des assertions introduites plus haut.

1. "Aujourd'hui, je ne porte pas un pull rouge" ;
2. "3 n'est pas un nombre premier" ;
3. "3 est divisible par 2" ;
4. "Il existe un nombre positif qui n'est pas pair" ; [b]
5. "Il ne pleut pas" ;
6. "Je n'emporte porte pas de parapluie" ;
7. "Mon chat aboie et je ne gagne pas au lotto".

Comme dans le langage courant, nier deux fois revient à ne rien faire. On pourrait écrire $\neg(\neg P) = P$, quelle que soit l'assertion P. Arrêtons-nous un instant sur cette égalité. En effet, $\neg(\neg P)$ et P sont des assertions qui ne sont pas écrites de la même manière. On touche ici une définition importante.

Définition 1.4. Deux propositions logiques P et Q sont *logiquement équivalentes* si elles ont les mêmes tables de vérité. On note alors $P \equiv Q$.

Dans le cas de la double négation, on a bien

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
0	1	0
1	0	1

et donc on peut noter $P \equiv \neg(\neg P)$, et dire que P et $\neg(\neg P)$ sont logiquement équivalentes.

Dans une expression complexe, on peut toujours remplacer une assertion par une assertion logiquement équivalente sans changer la valeur de vérité globale. Dans le cas présent, on peut remplacer l'assertion $\neg(\neg P)$ par l'assertion P . Cela peut sembler fort théorique, mais vous pouvez utiliser ce fait dans le langage courant pour simplifier des phrases compliquées.

Exemple 1.5. La phrase

"Il n'est pas impossible que ce cours ne soit pas dépourvu de concepts nouveaux."

est logiquement équivalente à

"Il est possible que ce cours contienne des concepts nouveaux."

Voici maintenant deux connecteurs logiques bien connus dans la vie de tous les jours, le *et* et le *ou*. Il n'y a pas de grande surprise pour le "et". Pour le "ou", il faut juste noter qu'il n'est pas exclusif : en mathématiques, si on vous dit "tu peux avoir pour dessert une glace ou une coupe de fruit" vous pouvez répondre "d'accord, je mangerai les deux".

Définition 1.6. Si P et Q sont deux assertions, alors la conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ ou "P et Q" est une assertion qui est vraie quand P est vraie et Q est vraie (simultanément) et fausse sinon. La table de vérité du connecteur "et" est donc [c]

P	Q	P et Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a. Voyez la construction de la table : la première colonne donne les deux valeurs possibles pour P, la deuxième donne les valeurs correspondantes de $\neg P$.

b. Il est important de remarquer que la négation de P :"tout nombre positif est pair" **n'est pas** "tout nombre positif est impair", nous y reviendrons.

c. Ici, les deux premières colonnes permettent d'avoir les quatre valeurs possibles pour le couple (P, Q).

On peut ainsi former les assertions

1. “Il pleut et je porte un pull rouge” ;
2. “J’emporte un parapluie et 3 est un nombre premier”.

Il est intéressant de remarquer que la valeur de vérité de $P \wedge Q$ est le minimum des valeurs de vérités de P et Q. Cela permet de faciliter les calculs, et cela justifie l’utilisation de 0 et 1, plutôt que F et V. De la même manière on définit la disjonction de deux assertions.

Définition 1.7. Si P et Q sont deux assertions, alors la disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ ou “P ou Q” est une assertion qui est vraie quand au moins l’une des deux assertions P, Q est vraie et qui est fausse sinon. Sa table de vérité est donc la suivante [d].

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Vous aurez sans doute remarqué que puisque P et Q peuvent prendre chacun deux valeurs de vérité, la table contient quatre lignes. Combien y aura-t-il de lignes pour des assertions composées de P, Q et R, ou encore de P, Q, R et S ? Voici quelques exemples simples.

1. “Il pleut ou je porte un pull rouge” ;
2. “J’emporte un parapluie ou 3 est un nombre premier”.

Ici aussi, on peut remarquer que la valeur de vérité de $P \vee Q$ est le maximum des valeurs de vérités de P et Q.

Il est intéressant pour la suite de nos développements de déjà regarder quelques façons de construire des assertions logiques composées avec les trois connecteurs que nous avons vus jusqu’à présent.

Proposition 1.8. *On a les équivalences logiques suivantes*

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$;
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$;

Que veulent dire ces équivalences logiques sur des exemples ?

- La négation de “Il pleut ou je porte un pull rouge” est “il ne pleut pas et je ne porte pas de pull rouge”.
- La négation de “Il pleut et nous sommes mardi” est “il ne pleut pas ou nous ne sommes pas mardi”.

Passons maintenant aux implications et bi-implications, ces dernières étant encore appelées équivalences.

Définition 1.9. Si P et Q sont deux assertions, alors “P implique Q” est une assertion. On la note $P \Rightarrow Q$. Elle est toujours vraie sauf si P est vrai et Q faux. La table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ est donc

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

On peut également dire “si P, alors Q” pour indiquer $P \Rightarrow Q$. Il est important de remarquer les deux premières lignes de la table de vérité. Quand P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai. Par exemple,

1. “S’il pleut alors j’emporte un parapluie.” [e]
2. “Si on est vendredi, je porte un pull rouge.” [f]
3. “Si 3 est un nombre premier, alors je porte un pull rouge.”

d. Notez la différence, dans la dernière ligne de la table, avec le “ou exclusif” souvent utilisé dans le langage courant.
e. Cette implication ne donne aucune indication s’il ne pleut pas.
f. On peut aussi dire “Tous les vendredis, je porte un pull rouge.”

Finalement, on peut définir la bi-implication entre de deux assertions, encore appelée équivalence.

Définition 1.10. Si P et Q sont deux assertions alors "P bi-implique Q", "P est équivalent à Q" est une assertion. On la note $P \Leftrightarrow Q$. Elle est vraie quand P implique Q et Q implique P sont vraies. La table de vérité du connecteur $\Leftrightarrow$ est donc

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Vous remarquerez que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie exactement quand P et Q ont la même valeur de vérité. Si P est équivalent à Q, on dira aussi que P est vrai si et seulement si Q est vrai. Voici quelques exemples

1. "J'emporte un parapluie si et seulement si il pleut" ;
2. "Je porte un pull rouge si et seulement si on est vendredi".

Remarquons que, par définition, nous avons $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Terminons cette liste d'opérations logiques en y ajoutant les deux *quantificateurs* : Le signe $\forall$ se lit "pour tout" et le signe $\exists$ se lit "il existe". Ainsi, si P et Q sont deux assertions, on peut écrire

$$\forall x : P, \exists y : Q$$

pour signifier "pour tout x tel que P , il existe un y tel que Q".

L'ordre des quantificateurs a de l'importance. En effet, dans l'assertion précédente, y peut varier en fonction de x, ce qui n'est pas le cas si on l'écrit dans l'autre sens. Par exemple, le lecteur conviendra que les assertions commençant par

"Pour tout garçon dans la salle, il existe une fille dans la salle telle que..."

et

"Il existe une fille dans la salle telle que pour tout garçon dans la salle..."

n'auront sans doute pas les mêmes significations. [g] Remarquez également que dans les expressions ci-dessus, les mots "pour tout" et "il existe" n'ont pas été remplacés par les symboles correspondants, qui ne devraient être utilisés que dans des expressions purement mathématiques (des "formules").

On peut également se demander quelle est la négation de propositions contenant des quantificateurs. Sans entrer dans les détails, notons que la négation d'une proposition contenant $\forall$ s'exprime avec un $\exists$ et vice-versa.

Exemple 1.11.

1. La négation de "Tous les profs de math sont petits" est "Il existe un prof de math qui n'est pas petit".
2. La négation de "Il existe un cheval de course bon marché" est "Tous les chevaux de course coûtent cher".

En utilisant ces opérations logiques, on peut construire des assertions de plus en plus compliquées. Il faut être prudent et utiliser les parenthèses de la manière habituelle pour signifier l'ordre dans lequel il faut interpréter les connecteurs logiques. Par exemple, $P \wedge Q \vee R$ n'a pas de sens, car on pourrait l'interpréter de deux façons différentes : $(P \wedge Q) \vee R$ et $P \wedge (Q \vee R)$. Ces deux assertions ne sont pas

g. Les personnes choquées par cette dernière assertion pourront échanger les mots "fille" et "garçon", et s'interroger sur ses implications morales.

logiquement équivalentes, comme le prouve le tableau de vérité suivant [h].

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

En effet, la cinquième et la dernière colonne ne sont pas égales. Le tableau donne aussi des cas précis où les assertions sont différentes. Par exemple, la deuxième ligne correspond à un cas où P et Q sont faux et R vrai, on voit que dans ce cas, $(P \wedge Q) \vee R$ est vraie et $P \wedge (Q \vee R)$ est fausse.

Par contre, les assertions $P \Rightarrow (Q \vee R)$ et $(P \Rightarrow Q) \vee R$ sont logiquement équivalentes, comme le prouve le tableau suivant.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \vee R$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

On a également des relations entre les différentes constructions possibles. Ces relations sont données par des équivalences logiques entre certaines assertions. En voici un exemple classique.

Proposition 1.12. *Si P et Q sont deux assertions, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à l'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$. En d'autres termes, on a,*

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

En conséquence, démontrer l'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est équivalent à démontrer $P \Rightarrow Q$. Cette technique de preuve s'appelle la *contraposition* et l'assertion $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est la *contraposée* de l'assertion $P \Rightarrow Q$.

Démonstration. Démontrons cette proposition en utilisant des tables de vérité. On calcule successivement les valeurs de vérités des assertions en question en fonction de tous les cas possibles pour P et Q. On obtient le tableau suivant

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

On constate que les deux dernières colonnes sont égales. D'après notre définition de l'équivalence, cela veut dire que ces assertions sont logiquement équivalentes. □

On peut également se convaincre intuitivement que les assertions “Si on est vendredi, je porte un pull rouge” et “Si je ne porte pas de pull rouge, on n'est pas vendredi” veulent dire la même chose, c'est-à-dire, sont logiquement équivalentes.

h. Les trois premières colonnes du tableau donnent toutes les valeurs de vérité possibles pour le triplet (P, Q, R). De plus on calcule facilement les autres colonnes, en considérant une colonne à la fois.

Terminons cette introduction élémentaire à la logique par les *tautologies*. Voici un exemple. Si P et Q sont deux assertions, on peut calculer la table de vérité de l'assertion

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q.$$

On a directement

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q)$ et P	$((P \Rightarrow Q)$ et $P) \Rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

L'assertion $((P \Rightarrow Q)$ et $P) \Rightarrow Q$ est donc toujours vraie, dans tous les cas de figure pour P et Q. C'est une tautologie.

Définition 1.13. Une assertion composée qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérités des assertions qui la composent est une *tautologie*.

La notion de tautologie permet de formaliser d'un point de vue logique des techniques de démonstration. Voici premier exemple : dire que P et Q sont logiquement équivalentes, c'est dire que l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie. On peut aussi démontrer que l'assertion $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est une tautologie. Cela donne lieu à la technique de démonstration par contraposition. Nous n'irons pas beaucoup plus loin, mais nous donnerons un autre exemple dans les exercices résolus.

2 Théorie des ensembles

Passons maintenant à la description des ensembles, avec une première définition.

Définition 2.1. Un *ensemble* est une collection d'objets possédant une ou plusieurs propriétés communes [i]. Ces objets sont les *éléments* ou *points* de l'ensemble.

On notera généralement un ensemble par une lettre majuscule.
Les *éléments* peuvent par exemple être donnés

1. de manière explicite, par des symboles tels que $1, 2, 3, a, b \ldots$;
2. par un symbole générique affecté par un ou plusieurs indices, x_i où i est un élément quelconque d'un autre ensemble.

Un ensemble peut être donné

1. de manière explicite, en donnant tous ses éléments, (définition en *extension*) comme par exemple $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ou $B = \{a, b, c, d, e\}$;
2. de manière explicite, mais sans donner tous les éléments, que l'on peut remplacer par des points de suspension, comme $C = \{1, 2, \ldots, 100\}$, ou encore $D = \{a, b, c, \ldots, z\}$.
3. en décrivant la propriété caractérisant ses éléments, (définition en *compréhension*) comme dans

$$\{n : n \text{ est entier, pair et compris entre 1 et } 99\}.$$

En général, si P est une assertion, on désigne par $\{x : P\}$ ou par $\{x|P\}$ l'ensemble des objets x pour lesquels la propriété P est vérifiée.

Passons maintenant aux propriétés et aux relations entre éléments et ensembles.

1. ***Ensemble vide*** : il existe un ensemble qui ne contient pas d'éléments, l'ensemble vide, noté $\varnothing$.
2. ***Appartenance*** : on écrit $x \in A$ (x appartient à A) pour signifier que x est un élément de l'ensemble A.
3. ***Inclusion*** : on écrit $B \subset A$ (B est inclus dans A, ou B est un sous-ensemble de A) quand tout élément de B est aussi un élément de A. Dans ce cas, on dit que B est un sous-ensemble de A. L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble donné.
   Par exemple, si $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{n : n \text{ est un nombre entier pair}\}$, on a $B \subset A$.

i. Ce n'est pas une définition extrêmement rigoureuse puisque le terme “collection” n'a pas été défini.

4. ***Egalité*** : on écrit $A = B$ (A et B sont égaux) quand les ensembles A et B ont les mêmes éléments. Cela se traduit aussi par le fait que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Les inclusions et l'égalité s'expriment également en termes d'implications : on a $A \subset B$ si l'implication $x \in A \Rightarrow x \in B$ est vraie, quel que soit l'objet x considéré. De même, on a $A = B$ si l'équivalence $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ est vraie, quel que soit l'objet x considéré.

Enfin, on peut nier ces implications et écrire par exemple $x \notin A$, $B \not\subset A$ ou $A \neq B$, et par un léger abus de langage, on pourra écrire et lire ces symboles dans l'autre sens : $A \ni a$, $A \supset B$ ou $A \not\ni a$.

Soient A et B deux ensembles donnés, on peut construire les ensembles suivants :

1. ***Union*** : l'ensemble $A \cup B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On a donc, d'un point de vue logique
$$(x \in A \cup B) \equiv ((x \in A) \,\text{ou}\, (x \in B)).$$
2. ***Intersection*** : l'ensemble $A \cap B$ est formé par les éléments qui appartiennent à A et B. On a donc, d'un point de vue logique
$$(x \in A \cap B) \equiv ((x \in A) \,\text{et}\, (x \in B)).$$
3. ***Différence*** : l'ensemble $A \setminus B$ (lisez A moins B) est formé par les éléments qui appartiennent à A et pas à B. On a donc, d'un point de vue logique
$$(x \in A \setminus B) \equiv ((x \in A) \,\text{et}\, \neg(x \in B)).$$

On peut représenter des ensembles à l'aide de diagrammes. Les plus utilisés sont sans doute les diagrammes de Venn [j]. Ils permettent de visualiser les opérations qui ont été définies plus haut de manière très simple. Voici comment on les construit.

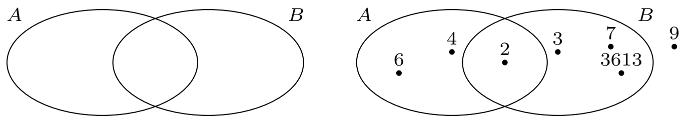
- On représente l'ensemble par une courbe fermée, généralement un cercle ou une ellipse (appelée parfois patate).
- Si on veut marquer qu'un objet est un élément de l'ensemble, on le place dans la région déterminée par la courbe [k]. On n'est pas obligé de représenter tous les éléments de l'ensemble en question, et c'est souvent impossible.
- On représente plusieurs ensembles (généralement 2, 3 ou 4) par plusieurs courbes fermées.

Exemple 2.2. On note A l'ensemble des nombres entiers pairs et strictement positifs. On le représente par le diagramme à gauche dans la figure suivante. Si on veut marquer que 2 et 4 sont des éléments de cet ensemble, on les y indique avec un point, comme dans le diagramme à droite dans la figure suivante. Notez que la position n'a pas d'importance, à l'intérieur de la région en forme de patate.

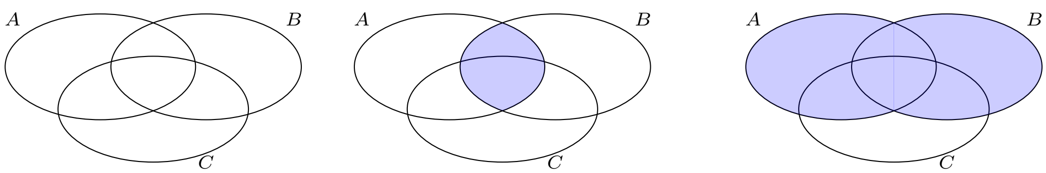
Prenons maintenant un exemple avec deux ensembles, donc avec un diagramme comportant deux patates.

Exemple 2.3. Soit A l'ensemble des nombres pairs strictement positifs et B l'ensemble des nombres premiers. [l] Voici à gauche la représentation générale des deux ensembles, et à droite quelques éléments des deux ensembles. On peut ajouter également des points "en dehors" des deux ensembles.

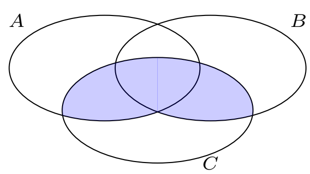
j. John Venn (1834-1923) les formalisa en 1880.
k. La plus petite des deux, évidemment.
l. Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts.



Cette représentation permet de visualiser aisément les unions et les intersections de deux ou plusieurs ensembles et d'avoir une intuition sur des égalités entre ensembles (sans toutefois constituer une démonstration rigoureuse). On peut en effet colorier ou hachurer les zones représentant les ensembles que l'on considère. Voici un exemple à trois ensembles [m]. A gauche, on a représenté la situation générale, au milieu, on a colorié la zone représentant $A \cap B$, à droite la zone représentant $A \cup B$.



On peut aller encore plus loin et colorier par exemple la zone représentant $(A \cup B) \cap C$:



On peut alors constater sur cette représentation la relation

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

3 Exercices résolus

1. Sachant que tous les vendredis, je mets un pull rouge et sachant que j'ai un pull rouge, que peut-on logiquement conclure sur le jour de la semaine ? Pourquoi ? Peut-on le démontrer ?
   Solution :
   Avec de l'habitude, on voit qu'on ne peut rien conclure : ni qu'on est vendredi, ni qu'on n'est pas vendredi. En effet, j'ai le droit de mettre un pull rouge un autre jour que le vendredi et, par hypothèse, je mets un pull rouge le vendredi.
   Si on veut le voir avec certitude, on peut le faire avec des tables de vérité. Notons P l'assertion "On est vendredi" et Q l'assertion "je mets un pull rouge". On doit déterminer les situations où $P \Rightarrow Q$ est vrai et Q est vrai, simultanément, et voir si cela détermine une valeur pour P. Le plus simple pour ne pas oublier de situation est de les traiter toutes les quatre. On considère la table de vérité suivante de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

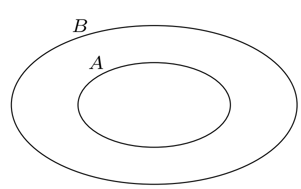
   On constate que la deuxième et la quatrième ligne représentent les situations où Q et $P \Rightarrow Q$ sont vrais simultanément. On voit que cela n'implique rien pour P, puisqu'il peut prendre les valeurs 0 (à la ligne 2) ou 1 (à la ligne 4). On a donc la confirmation qu'on ne peut rien déduire sur le jour de la semaine.

m. Vous pouvez toujours adopter cette représentation pour trois ensembles

2. Sachant que tous les vendredis, je mets un pull rouge et sachant que je n'ai pas un pull rouge, que peut-on logiquement conclure sur le jour de la semaine ? Pourquoi ? Peut-on le démontrer ?
Solution :
Si vous réfléchissez à la situation, vous pouvez en déduire qu'on n'est pas vendredi. On peut le voir à l'aide de tables de vérité comme dans l'exercice précédent, en représentant les quatre situations possibles. On note encore P l'assertion "On est vendredi" et Q l'assertion "je mets un pull rouge". On s'intéresse aux lignes de la table de vérité pour lesquelles $P \Rightarrow Q$ est vraie et Q est fausse.[n]

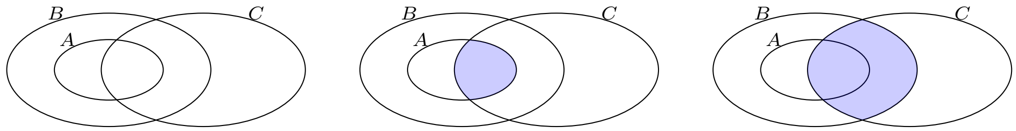
P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

On constate qu'il n'y a qu'une seule ligne qui remplit ces conditions, et que dans ce cas, P a la valeur de vérité 0, donc on n'est pas vendredi.
3. Enoncer la négation de l'assertion "Demain, je n'étudierai pas mon cours de maths ou je ne réussirai pas mon interro".
Solution :
On constate qu'il y a deux assertions connectées par "ou". La négation est obtenue en niant chacune de ces assertions et en les connectant par un "et". De plus on doit nier une négation, ce qui revient simplement à enlever cette négation. On obtient donc la négation suivante :
"Demain, j'étudierai mon cours de maths et je réussirai mon interro.
4. Enoncer la négation de l'assertion "Tous les professeurs de géométrie sont petits".
Solution :
On doit nier une assertion contenant un quantificateur "pour tout". La négation est obtenue en utilisant le quantificateur "il existe". On obtient donc la négation suivante :
"Il existe un professeur de géométrie qui n'est pas petit".
5. Enoncer la négation de l'assertion "Dans toutes les écuries de ce village, tous les chevaux sont noirs".
Solution :
C'est le même problème que l'exercice précédent, mais il y a ici deux quantificatuers "pour tout". On applique donc deux fois la même technique pour obtenir la négation suivante :
"Dans ce village, il existe une écurie dans laquelle il y a un cheval qui n'est pas noir."
6. Enoncer la négation de l'assertion "Tous les professeurs de maths seront riches et prendront leur retraite à 55 ans".
Solution :
Dans cet exercice, on doit nier un quantificateur "pour tout", et l'assertion à nier est formée avec un connecteur "ou". On applique donc deux règles successivement et la négation est
"Il existe un professeur de mathématique qui ne sera pas riche ou ne prendra pas sa retraite à 55 ans".
7. Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre que si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$, quels que soient les ensembles A, B et C.
Solution :
La situation où on a $A \subset B$ se représente à l'aide de diagrammes de Venn de la manière suivante.



n. On peut ajouter une colonne avec l'assertion $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$, mais ce n'est pas absolument nécessaire.

On représente alors l'ensemble C de la manière la plus générale comme dans la figure de gauche. Au milieu, on peut colorier $A \cap C$ et à droite $B \cap C$.



On constate alors l'inclusion sur le diagramme de Venn.