# 9. Les dérivées

Dans ce chapitre nous allons revoir la notion de dérivée. C'est un outil fondamental en mathématique qui permet de mesurer les variations locales (c'est-à-dire au voisinage d'un point donné) des valeurs d'une fonction donnée $f$. Elle permet aussi de déterminer, par son signe, si une fonction est croissante ou décroissante. Elle a évidemment de nombreuses applications en sciences quand on calcule des vitesses, en physique ou en chimie. Il est aussi important de remarquer que de nombreux problèmes peuvent être modélisés par des équations mettant en jeu une fonction et sa ou ses dérivées. C'est notamment le cas lois de Newton, mais c'est aussi le cas quand on veut modéliser des évolutions de populations, par exemple en biologie. Malheureusement, la théorie des équations différentielles, puisque c'est d'elles qu'il s'agit, sort du cadre de ce cours préparatoire.

Comme dans le module précédent, je poserai d'abord les définitions, puis il y aura quelques exemples de dérivées de fonctions simples, et ensuite quelques théorèmes de calcul qui s'exprimeront encore en termes des constructions habituelles de fonctions. Cela nous permettra de faire une liste des dérivées des fonctions que nous avons rencontrées jusqu'à présent. Nous reverrons également les théorèmes fondamentaux qui lient dérivées et variations des fonctions.

## 1 Nombre dérivé et fonction dérivée : définitions

Rappelons d'abord ce qu'est le taux de croissance moyen d'une fonction en un point $x_0$.

### 1.1 Taux de croissance moyen

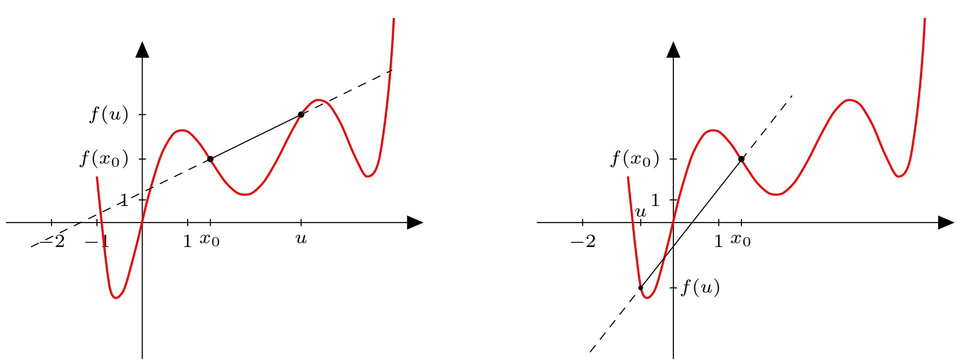
Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{dom}_f$. Nous nous intéressons à la variation moyenne (encore appelée taux d'accroissement moyen) des valeurs de $f$ (on dit de $f$ pour faire court) entre $x_0$ et un point $u \neq x_0$. La définition est naturelle :

**Définition 1.1.** Pour $u \neq x_0$, le *taux de variation* de $f$ entre $x_0$ et $u$ est

$$A_{x_0}(u) = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}.$$

Géométriquement, le taux de croissance est la *pente* de la droite passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(u, f(u))$, ou la pente de la fonction du premier degré correspondante.

Voici ce que cela donne sur la représentation graphique. A gauche, le cas $u > x_0$ et à droite le cas $u < x_0$ :



Vous avez certainement vu des applications de ce taux de croissance moyen. En physique par exemple, si on note $f(t)$ la distance parcourue par un mobile entre le temps 0 et le temps $t$, alors $f(u) - f(x_0)$ est la distance parcourue entre le temps $x_0$ et le temps $u$ pour $u$ plus grand que $x_0$. Si on la divise par le temps qu'il a fallu pour effectuer le déplacement, cela donne la vitesse moyenne. Ce nombre n'est rien d'autre que

$$\frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0},$$

pour $u > x_0$. De plus, si $u < x_0$, alors la distance parcourue entre les deux instants considérés est $f(x_0) - f(u)$, tandis que la différence de temps est $x_0 - u$. On arrive donc au même résultat.

## 1.2 Le nombre dérivé

Sur la représentation graphique précédente, on constate que si le taux de croissance entre $x_0$ et $u$ donne une information sur $f$, cette information sur $f$ n'est pas liée au point $x_0$ : elle dépend évidement de $u$. La fonction $f$ peut d'ailleurs avoir une multitude de comportements différents entre les points $x_0$ et $u$ et donner le même taux d'accroissement entre $x_0$ et $u$.

On s'intéresse au taux de croissance "instantané" de la fonction $f$ en $x_0$ : la fonction $A_{x_0}$ n'est pas définie en $x_0$, donc il ne s'agit pas de calculer sa valeur en $x_0$, mais on peut s'interroger sur son comportement pour des valeurs de $u$ "arbitrairement proches" de $x_0$. Nous avons déjà un moyen d'analyser un tel comportement : nous définissons naturellement le taux de croissance instantané comme la limite de la fonction $A_{x_0}$ en $x_0$, du moins quand cette limite existe.

**Remarque 1.2.** Puisque la fonction $A_{x_0}$ est un quotient, on a $\mathrm{dom}_{A_{x_0}} = \mathrm{dom}_f \setminus \{x_0\}$. Pour qu'on puisse envisager la limite en question, il faut donc que tout $x_0$ soit adhérent à $\mathrm{dom}_f \setminus \{x_0\}$.

Cette condition technique ne posera en général pas de problème pour les fonctions que vous rencontrerez en sciences. On peut maintenant donner la définition.

**Définition 1.3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0$ un point adhérent à $\mathrm{dom}_f \setminus \{x_0\}$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si la limite

$$\lim_{u \to x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}$$

existe et est finie. Si tel est le cas, la valeur de cette limite est le nombre dérivé de $f$ en $x_0$. On le note $f'(x_0)$, ou $Df(x_0)$ ou encore $\frac{df}{dx}(x_0)$.

**Remarque 1.4.** Dans la suite, afin d'éviter des résultats contre-intuitifs, nous supposerons pour calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$ que $f$ est définie sur un voisinage de $x_0$, c'est à dire au moins sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ pour un nombre $\delta$ strictement positif.

Avant d'aller plus loin, je donne une autre notation, que vous avez certainement rencontrée. Si $f$ est dérivable en $x_0$, au lieu d'exprimer le taux d'accroissement en fonction de $u$, on écrit $u = x_0 + h$ (ce qui donne $h = u - x_0$), et on obtient alors [a]

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Cette expression est due à Leibniz [b]. Elle exprime le nombre dérivé en comme la limite d'un quotient qui dépend d'un accroissement $h$. Les deux expressions du nombre dérivé en $x_0$ données ci-dessus sont parfaitement équivalentes : si une limite existe, alors l'autre aussi, et elles sont égales.

On peut maintenant définir la tangente au graphe de $f$ en $x_0$. Intuitivement, dans la représentation graphique de la page précédente, on a dessiné des "sécantes" au graphe en $x_0$ : ces droites passent par le point $(x_0, f(x_0))$ du graphe et aussi par le point $(u, f(u))$. On pourrait dire, toujours intuitivement, que lorsque $u$ tend vers $x_0$, ces droites tendent vers la tangente, qu'il n'est pas difficile de dessiner. Nous n'avons cependant pas défini la limite d'une telle famille de droites [c]. L'idée pour définir la tangente est qu'elle passe par $(x_0, f(x_0))$. On connaît alors cette droite dès que sa pente est connue. On définit alors sa pente comme la limite des pentes des sécantes, qui est le nombre dérivé de $f$ en $x_0$.

a. Techniquement, on utilise le théorème sur les limites de fonctions composées.

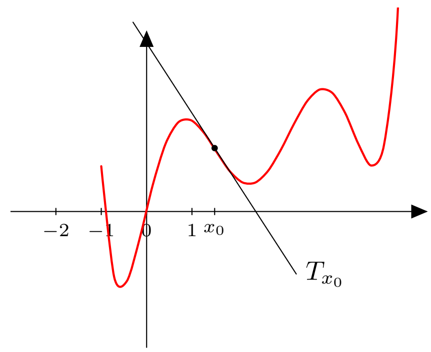
b. Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716, mathématicien Allemand, fondateur avec Isaac Newton du calcul infinitésimal, qui nous occupe durant ce chapitre.

c. Cela ne poserait aucun problème du point de vue mathématique, mais cela sort du cadre de ce cours préparatoire.

**Définition 1.5.** On appelle *tangente au graphe de* $f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ la droite $T_{x_0}$ d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Voici la tangente au graphe de la fonction que nous avons considérée plus haut.




Vous pouvez imaginer le comportement de cette tangente quand $x_0$ varie. Vous verrez alors qu'il n'est plus question d'avoir des propriétés comme celle de la tangente au cercle, qui ne coupe le cercle qu'en un point : la tangente au graphe en $x_0$ peut couper le graphe en des points différents de $(x_0, f(x_0))$. Passons maintenant aux nombres dérivés à gauche et à droite. L'idée qui donne la définition est la même que dans le cas des limites ou de la continuité à gauche et à droite : on ne tient compte que d'une partie des accroissements.

**Définition 1.6** (Nombre dérivé à droite)**.** Si $f$ est définie sur $[x_0, x_0 + \delta[$, pour un $\delta > 0$, alors $f$ est dérivable à droite en $x_0$ si

$$\lim_{u \to x_0^+} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}$$

existe et est fini. Ce nombre est alors noté $f'_+(x_0)$ et est appelé nombre dérivé à droite de $f$ en $x_0$.

**Définition 1.7** (Nombre dérivé à gauche)**.** Si $f$ est définie sur $]x_0 - \delta, x_0]$, pour un $\delta > 0$, alors $f$ est dérivable à gauche en $x_0$ si

$$\lim_{u \to x_0^-} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}$$

existe et est fini. Ce nombre est alors noté $f'_-(x_0)$ et est appelé nombre dérivé à gauche de $f$ en $x_0$.

Le théorème sur les limites à gauche et à droite donne alors directement le résultat suivant.

**Proposition 1.8.** *La fonction $f$ définie sur un voisinage de $x_0$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en $x_0$ et les nombres dérivés à gauche et à droite coïncident.*

Comme le nombre dérivé en $x_0$ permet de définir la tangente en $x_0$, les nombres dérivés à droite et à gauche permettent de définir les *demi-tangentes à droite et à gauche*. Cette définition n'est utile que si la fonction n'est pas dérivable en $x_0$.

**Définition 1.9.** On appelle demi-tangente à droite au graphe de $f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ la demi-droite $T^+_{x_0}$ d'équation

$$y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \quad x \geqslant x_0.$$

On appelle demi-tangente à gauche au graphe de $f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ la demi-droite $T^-_{x_0}$ d'équation

$$y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) \quad x \leqslant x_0.$$

Quand les demi-tangentes existent en $x_0$ mais sont de pentes différentes, on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un *point anguleux*.

**Exemple 1.10.** 1. Soit la fonction module, ou valeur absolue,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$

Si on veut calculer le nombre dérivé en $x_0 = 0$, on est amené à calculer la limite

$$\lim_{u\to 0} \frac{|u| - |0|}{u - 0} = \lim_{u\to 0} \frac{|u|}{u}$$

et nous savons que cette limite n'existe pas. Par contre, les limites à droite et à gauche existent. Le nombre dérivé à droite vaut 1 et le nombre dérivé à gauche vaut $-1$.

2. Si on admet (comme nous l'avons fait) que les fonctions sinus et cosinus sont continues, et que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ [d], alors on peut montrer que la fonction sinus est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et que son nombre dérivé en $x_0$ vaut $\cos(x_0)$. Cela demande de connaître les formules de Simpson de la trigonométrie. En effet, on a

$$\sin'(x_0) = \lim_{u\to x_0} \frac{\sin(u) - \sin(x_0)}{u - x_0} = \frac{2\sin(\frac{u-x_0}{2})\cos(\frac{u+x_0}{2})}{u - x_0}.$$

On arrive alors au résultat annoncé en utilisant que la fonction cosinus est continue et la valeur de la limite

$$\lim_{u\to x_0} \frac{2\sin(\frac{u-x_0}{2})}{u - x_0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

comme nous l'avons admis.

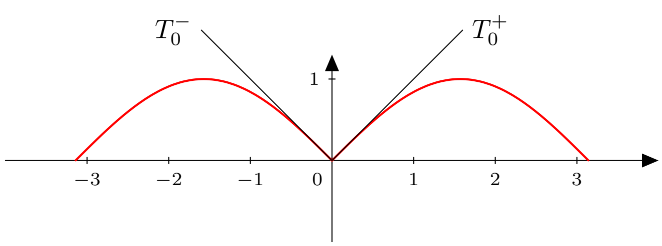
3. On pourrait faire de même avec la fonction cosinus, mais nous utiliserons les théorèmes de la section suivante pour obtenir ce résultat.

4. La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\sin x|$$

admet un point anguleux en 0, puisque pour $x \in [0, \pi]$ elle coïncide avec la fonction sin et pour $x \in [-\pi, 0]$ avec la fonction $-\sin$.

Voici la représentation graphique de cette dernière fonction.




## 1.3 La fonction dérivée

La définition de la fonction dérivée d'une fonction $f$ est évidente : elle associe à tout point $x$ le nombre dérivé de $f$ au point $x$.

**Définition 1.11.** Soit $f$ une fonction. La fonction dérivée de $f$, notée $f'$ ou $Df$ est la fonction

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

Le domaine de dérivabilité de $f$ est le domaine de définition de $f'$, on le note parfois $\mathrm{dom}_f^d$.

Voici encore quelques conventions et notations.

d. On exprime les arguments en radians, sinon cela n'est pas vrai.

**Définition 1.12.** Une fonction $f$ est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a,b[$. Elle est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en $a$ et à gauche en $b$.

En utilisant la notation de Leibniz vue plus haut, on obtient :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Le quotient est alors le quotient de deux accroissements : $\Delta f = f(x+h)-f(x)$ est la variation des valeurs de $f$ quand on passe de $x$ à $x+h$ tandis que le dénominateur est la variation $\Delta x = (x+h)-x$. On rencontre donc dans les cours de sciences (avec des notations assez libres) :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}.$$

On va même parfois un peu plus loin en “posant” $y = f(x)$, on a alors la notation

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Cette notation a l'avantage de de rappeler que la dérivée mesure une variation instantanée. Elle aura d'autres avantages dans la mémorisation des règles de calcul des dérivées qui vont être énoncées après les premiers exemples que voici.

**Exemple 1.13.**

1. Toute fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ : on a $f_1'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, la valeur de la dérivée en $x \in \mathbb{R}$ est

$$\lim_{u\to x} \frac{f_1(u)-f_1(x)}{u-x}.$$

   Mais sur $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ la fonction dont on calcule la limite vaut 0. Donc sa limite en $x$ est nulle.

2. La fonction identique $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante 1, car on a

$$f_2'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f_2(u)-f_2(x)}{u-x} = \lim_{u\to x} \frac{u-x}{u-x} = 1,$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. La fonction $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction

$$f_3' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x.$$

   Prenons pour changer la notation de Leibniz : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_3'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = 2x.$$

4. La fonction $f_4 : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f_4' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En effet, on a pour tout $x > 0$ :

$$f_4'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f_4(u)-f_4(x)}{u-x} = \lim_{u\to x} \frac{\sqrt{u}-\sqrt{x}}{u-x}.$$

   Or pour $u \in \mathrm{dom}_{f_4} \setminus \{x\}$, cette dernière fonction coïncide avec

$$\frac{(\sqrt{u}-\sqrt{x})(\sqrt{u}+\sqrt{x})}{(u-x)(\sqrt{u}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{x}},$$

   ce qui conduit au résultat annoncé, vu la continuité de la fonction racine. On constate que pour $x = 0$, on obtient une limite égale à $+\infty$ et la fonction racine n'est donc pas dérivable en 0.

5. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\sin'(x) = \cos x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous l'avons vu dans l'exemple précédent.

6. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos'(x) = -\sin x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous le démontrerons d'ici peu.

## 2 Les dérivées : théorèmes de calcul

Le théorème suivant donne les règles de calcul élémentaires des dérivées. Nous devons cependant démontrer un résultat préliminaire, qui a son intérêt en soi.

**Proposition 2.1.** *Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

*Démonstration.* On doit montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou encore que $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Mais pour $x \in \mathrm{dom}_f \setminus \{x_0\}$, on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

donc en utilisant le théorème sur les limites de produits :

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x\to x_0, x\neq x_0}(x - x_0) = 0.$$

On termine la preuve en utilisant le théorème sur les limites restreintes, puisque la fonction $f(x)-f(x_0)$ s'annule en $x_0$. □

Passons maintenant aux théorèmes qui permettent de calculer des dérivées de manière simple, en décomposant la fonction considérée en fonctions plus simples.

**Proposition 2.2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables en $x$ et $c$ un nombre réel.*

1. *La fonction $f + g$ est dérivable en $x$ et on a*
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$
2. *La fonction $fg$ est dérivable en $x$ et on a (la règle de Leibniz)*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
*En particulier, on a aussi*
$$(cf)'(x) = cf'(x).$$
3. *Si $g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x$ et on a*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Voici la preuve, à titre indicatif. Elle montre l'utilité des résultats sur les limites.

*Démonstration.* Pour la première assertion, on doit calculer

$$\lim_{u\to x} \frac{(f+g)(u) - (f+g)(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{(f(u) + g(u) - (f(x) + g(x))}{u - x} = \lim_{u\to x}[\frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \frac{g(u) - g(x)}{u - x}],$$

ce qui donne le résultat annoncé, vu le théorème sur les limites de sommes.

Pour la seconde assertion, on calcule, en retranchant et en ajoutant un terme adéquat :

$$\begin{aligned}\lim_{u\to x} \frac{(fg)(u) - (fg)(x)}{u - x} &= \lim_{u\to x} \frac{(f(u) - f(x))g(u) + f(x)(g(u) - g(x))}{u - x} \\ &= \lim_{u\to x}[\frac{(f(u) - f(x))g(u)}{u - x} + \frac{f(x)(g(u) - g(x))}{u - x}],\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant la proposition précédente et le théorème sur les limites de produits.

Pour la troisième assertion, on se place dans un voisinage de $x_0$ où $g$ ne s'annule pas, pour ne pas avoir de problèmes avec les calculs qui suivent, et on calcule

$$\lim_{u\to x} \frac{(\frac{f}{g})(u) - (\frac{f}{g})(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{\frac{f(u)}{g(u)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{f(u)g(x) - f(x)g(u)}{g(u)g(x)(u - x)}$$

On ajoute et on retranche un terme adéquat pour voir que cette limite vaut

$$\lim_{u\to x}\frac{(f(u)-f(x))g(x)-f(x)(g(u)-g(x))}{(u-x)}\frac{1}{g(x)g(u)}.$$

On termine en utilisant la proposition 2.1 et le résultat sur les limites de sommes. □

**Application 2.3.**

1. Nous avons vu que la fonction identique $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut 1. D'après la proposition précédente, on peut montrer que $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 = xx$ est dérivable et que $f_2'(x) = 2x$ ;
2. Par récurrence, on montre alors que $g_m(x) = x^m$ est dérivable pour tout entier positif $m$ et qu'on a $g_m'(x) = mx^{m-1}$ pour tout entier positif $m$ ;
3. Pour tout polynôme $P$ défini par $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, on a alors $P'(x) = ma_m x^{m-1} + \cdots + a_1$ ;
4. Soit $f_3 : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. Par le résultat sur les quotients, $f_3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et on a $Df_3(x) = \frac{-1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.
5. Par récurrence, on montre alors que $g_m(x) = x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ pour tout entier *négatif* $m$ et qu'on a $g_m'(x) = mx^{m-1}$ pour tout entier *négatif* $m$ ;
6. De manière plus générale, toute fraction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.
7. La fonction $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto 3x + x^2 \sin^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$Df_4(x) = 3 + (x^2)' \sin^2 x + x^2(\sin x \sin x)' = 3 + 2x\sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x,$$

vu la règle concernant les sommes et les produits.

Examinons maintenant le comportement de la dérivée vis-à-vis de la composition des fonctions. Le résultat est semblable au théorème qui donne la continuité des fonctions composées. Je vous fais grâce de la démonstration, qui est un peu technique.

**Proposition 2.4.** *Soit $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $f$ une fonction dérivable sur un intervalle contenant $g(I)$. La fonction $f \circ g$ est dérivable sur $I$ et on a*

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \forall x \in I\ ^{\mathrm{e}}.$$

**Remarque 2.5.**

1. La plupart des erreurs concernant l'application de ce théorème est l'oubli de la dérivée de la fonction "intérieure" $g$.
2. Ce théorème peut être utilisé plusieurs fois de suite : si $f$, $g$ et $h$ sont des fonctions. Alors si $h$ est dérivable en un point $x$, $g$ dérivable en $h(x)$ et $f$ dérivable en $g(h(x))$ alors $f \circ g \circ h$ est dérivable en $x$ et on a

$$(f\circ g\circ h)'(x) = f'(g\circ h(x))\cdot(g\circ h)'(x) = f'(g\circ h(x))g'(h(x))h'(x).$$

Par exemple, on pourrait s'intéresser à la dérivée de la fonction $u$ définie par

$$u(x) = \sin(\sqrt{3x^2+2+\sin(x)}).$$

C'est la composée de trois fonctions dont nous connaissons le domaine de dérivabilité, et la dérivée. La première est donnée par $h(x) = 3x^2+2+\sin(x)$, la deuxième est donnée par $g(y) = \sqrt{y}$ et la troisième par $f(z) = \sin(z)$. La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $h$ est à valeurs dans $]0, +\infty[$, qui est le domaine de dérivabilité de $g$. La fonction $g \circ h$ est à valeurs dans le domaine de dérivabilité de $f$. Au total $u = f \circ g \circ h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$u'(x) = \cos(\sqrt{3x^2+2+\sin(x)})\frac{1}{2\sqrt{3x^2+2+\sin(x)}}(6x+\cos(x)).$$

e. Dans les cours de sciences, on exprime parfois cette relation comme ceci : on écrit $u = g(x)$ et $y = f(u)$, on écrit encore $y(x) = y(u(x))$ pour exprimer que la "variable" $y$ dépend de la variable $x$ par l'inermédiaire de la "variable" $u$. La règle s'exprime alors par $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, et on a l'impression qu'elle consiste à simplifier $du$.

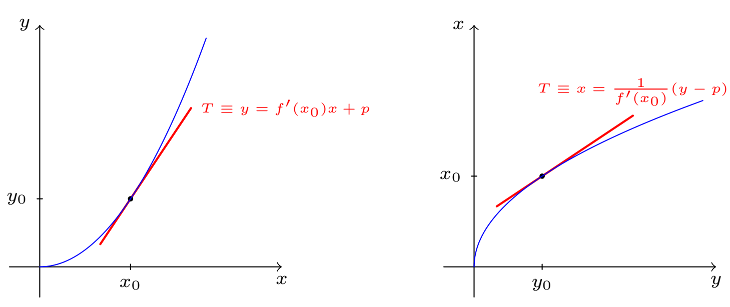
**Application 2.6.**

1. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ car on a $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ sur $\mathbb{R}$. La dérivée de la fonction cos est donnée par
$$\cos'(x) = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \sin'(\frac{\pi}{2} - x)(\frac{\pi}{2} - x)' = \cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = -\sin(x).$$
2. La fonction tg est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle y est aussi dérivable car sur cet ensemble, $\cos(x) \neq 0$. D'après le théorème sur les quotients, on a
$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$
3. La fonction cotg a été également définie comme un quotient. On montre de la même façon qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et qu'on a
$$\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$
4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut
$$f'(x) = \sin'(x^3)(x^3)' = \cos(x^3)(3x^2) = 3x^2\cos(x^3).$$
5. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(\sqrt{x^2 + 3})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut
$$D\cos(\sqrt{x^2+3})D\sqrt{x^2+3}D(x^2+3) = -\sin(\sqrt{x^2+3})\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x),$$
ou encore, avec une autre notation plus lourde mais moins dangereuse :
$$D(\cos(\sqrt{x^2+3})) = D\cos(y)|_{y=\sqrt{x^2+3}} D\sqrt{z}|_{z=x^2+3} D(x^2+3).$$

Nous avons également défini quelques fonctions comme des fonctions réciproques. Il est donc naturel de tenter d'avoir un résultat pour ces fonctions. Le voici.

**Proposition 2.7** (Fonctions réciproques)**.** *Soit $f : I = ]a, b[ \to J$ une bijection dérivable telle que $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$, alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et on a*
$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}|_{y=f^{-1}(x)}.$$

Voici une interprétation graphique de ce théorème : pour avoir la représentation graphique de la réciproque, soit on "tourne la tête" et on considère le même graphique, en partant de l'axe vertical vers l'axe horizontal, soit on effectue une symétrie orthogonale, qui échange les axes, comme cela a été fait ci-dessous. La tangente au graphe ne change pas, mais son équation doit être écrite sous la forme $x = m'y + p'$ pour en extraire la valeur du nombre dérivé. Cela se fait sans problème en utilisant les équivalences entre équations :




A droite, on remarque que la dérivée de $f^{-1}$ en $y_0$ est l'inverse de la dérivée de $f$ en $x_0$, et on obtient la valeur décrite dans le théorème en se rappelant que $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

**Remarque 2.8.** 1. Dans la formule de la proposition 2.7, on a simplement donné deux notations différentes. La deuxième est plus lourde, mais correspond bien à ce que l'on fait. On considère l'inverse de la dérivée de $f$, prise au point $f^{-1}(x)$.

2. Je ne donne pas ici la preuve, qui est un peu délicate, si on veut tout justifier. On peut cependant se rappeler facilement le résultat : si on suppose que $f^{-1}$ est dérivable et que les hypothèses sont satisfaites pour appliquer la proposition 2.4, alors on a $f \circ f^{-1}(x) = x$ pour tout $x$. On a deux fonction égales, donc leurs dérivées le sont aussi :

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

3. Avec des notations très libres, dans les cours de sciences, on écrit la variable $y$ en fonction de la variable $x$ : $y = y(x)$. La réciproque consiste à écrire $x$ en fonction de la variable $y$. La règle précédente s'écrit alors

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Je n'aime pas trop cette notation car elle ne dit pas en quel point on prend la dérivée.

A titre d'illustration, appliquons ce théorème pour obtenir la dérivée de la fonction racine cubique.

**Exemple 2.9.** La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. C'est de plus une bijection. Sa dérivée est la fonction $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2$. Cette fonction est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et applique $I = ]0, +\infty[$ sur $J = ]0, +\infty[$. Dès lors la fonction réciproque (la fonction racine cubique) y est dérivable, et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

On a le même raisonnement sur $]-\infty, 0[$. De plus, la fonction racine cubique n'est pas dérivable en 0.

# 3 Dérivées et variations

Les dérivées permettent d'analyser les variations des fonctions. Nous avons déjà vu les définitions des extrema locaux ou globaux dans le chapitre sur les fonctions. Il est commode de poser la définition suivante.

**Définition 3.1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $x_0$ est un *point stationnaire* de $f$ si on a $f'(x_0) = 0$.

Voici un premier résultat donne un lien entre extremum et point stationnaire.

**Proposition 3.2.** *Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Si $f$ admet un extremum* **local** *en $x_0 \in ]a, b[$, alors $x_0$ est un point stationnaire de $f$.*

*Démonstration.* Supposons par exemple que $f$ admet un minimum local en $x_0$. On considère les dérivées à gauche et à droite de $f$ en $x_0$. On sait qu'elles sont égales à $f'(x_0)$. Cependant, on a

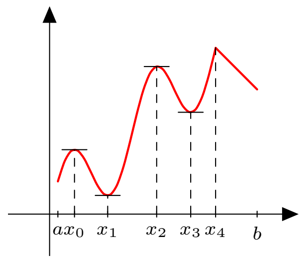
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \quad \forall x \in ]x_0, b[ \cap I,$$

où $I$ est un intervalle ouvert contenant $x_0$, donc $f'_+(x_0) \geqslant 0$ et

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \quad \forall x \in ]a, x_0[ \cap I,$$

donc $f'_-(x_0) \leqslant 0$. □

Voici une illustration de ce théorème. On se souvient que la dérivée donne la pente de la tangente au graphe de $f$. Si elle est nulle, la tangente est horizontale.




La fonction atteint des minima locaux en les points $a$, $x_1$, $x_3$ et $b$. De plus en $x_1$ le minimum est global. La fonction atteint des maxima locaux en $x_0$, $x_2$ et $x_4$. En $a$, $b$ et $x_4$, le théorème ne s'applique pas. Par contre en $x_0$, $x_1$, $x_2$ et $x_3$, on a des points stationnaires.

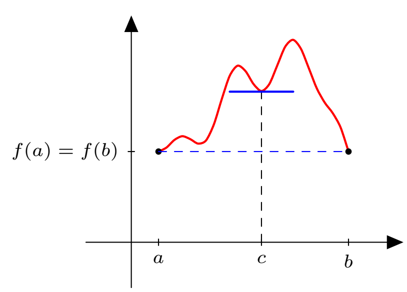
Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$, on considère donc les points $a$, $b$, les points stationnaires, et les points où la fonction n'est pas dérivable. Pour déterminer s'il s'agit réellement d'extrema, dans le cas des points stationnaires, on peut étudier le signe de la dérivée au voisinage de ces points, comme nous allons maintenant le voir [f].

Les liens entre signe de la dérivée et croissance de la fonction considérée sont obtenus à l'aide de deux théorèmes célèbres, celui de Rolle et celui des accroissements finis. Je donne encore la démonstration, mais on voit assez bien ce qui se passe sur une représentation graphique. Commençons par le théorème de Rolle. [g]

**Théorème 3.3** (Rolle)**.** *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

*Démonstration.* Si $f(x) = f(a) = f(b)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $f$ est constante et sa dérivée est nulle identiquement sur $]a,b[$. Sinon, il existe $x_0 \in ]a,b[$ tel que $f(x_0) > f(a)$ ou $x_1 \in ]a,b[$ tel que $f(x_1) < f(a)$. Traitons le premier cas, le deuxième est analogue. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in [a,b]$ tel que $f(M) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. On a donc $M \in ]a,b[$ puisque $f(M) \geqslant f(x_0)$ et on peut appliquer la proposition précédente, puisque tout extremum global est aussi un extremum local : on a $f'(M) = 0$ $\square$

On peut interpréter le théorème de Rolle de la manière suivante : si $f(a) = f(b)$, la droite déterminée par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est parallèle à l'axe des abscisses : elle a une pente nulle. Il existe un point $c \in ]a,b[$ tel que la tangente en $(c, f(c))$ soit parallèle à cette droite.




**Remarque 3.4.** On peut montrer qu'on en peut pas se passer des hypothèses du théorème. Si on ne suppose pas la continuité sur $[a,b]$ et la dérivabilité sur $]a,b[$, on peut trouver des contrez-exemples.

Le théorème des accroissements finis est une généralisation du théorème de Rolle dans le cas où la droite $(a, f(a))$ $(b, f(b))$ n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

**Théorème 3.5** (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c),$$

*i.e.,* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

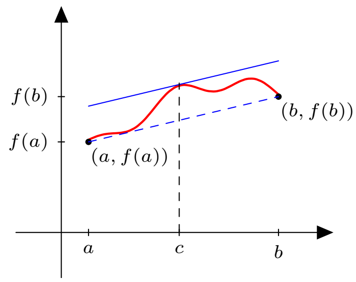
f. Il existe aussi un moyen de s'en tirer avec la valeur de la dérivée seconde, mais cela sort du cadre de ce cours.
g. Michel Rolle, Mathématicien Français (1652-1719).

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction $F$ définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

puisqu'elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qu'elle satisfait la condition $F(a) = F(b)$. □

Puisque ce théorème généralise le théorème de Rolle, son interprétation graphique est claire.




Le théorème des accroissements finis permet d'obtenir la proposition suivante, qui donne le lien entre le signe de la dérivée et les variations d'une fonction.

**Proposition 3.6.** *Soit $f$ une fonction réelle dérivable sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$* [h]*.*

1. *La fonction $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$ si et seulement si $f'$ est positive (resp. négative) sur $]a, b[$ ;*
2. *Si la fonction $f'$ est strictement positive (resp. négative) sur $]a, b[$, alors la fonction $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$.*

*Démonstration.* Si la fonction $f$ est croissante, alors pour tout $x \in ]a, b[$ et $u \neq x$, le quotient $\frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ est positif et donc la dérivée de $f$ en $x$ est positive ou nulle, car il est facile de voir que la limite d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle (quand elle existe). On fait de même si la fonction $f$ est décroissante. Réciproquement, si $f'$ est positive sur $]a, b[$, pour tous $x_1 < x_2 \in ]a, b[$, on a (par le théorème des accroissements finis) :

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(c),$$

pour un $c$ dans $]x_1, x_2[$. Si on sait que $f'(c) \geqslant 0$, alors on a $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. De même si $f'(c)$ est strictement positif, on obtient $f(x_2) > f(x_1)$ . □

Vous avez sans doute remarqué que les énoncés 1. et 2. de la proposition précédente ne sont pas exprimés de la même manière. L'un est une équivalence et l'autre n'est qu'une implication. On pourrait se demander si en forçant un petit peu pour obtenir une meilleure preuve, on ne pourrait pas avoir une équivalence. Ce n'est en fait pas possible : il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée s'annule en certains points. Un exemple est donné par la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3.$$

Cette fonction est strictement croissante, mais sa dérivée s'annule en 0.

C'est bien sûr la proposition 3.6 qui fait le lien entre signe de la dérivée et croissance. Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, on étudie (quand c'est possible) le signe de la dérivée. Voici un exemple élémentaire.

**Exemple 3.7.** Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x^3 - 6x^2 + 9x - 6$. Il s'agit d'une fonction polynomiale. Donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. On étudie le signe de $f'$ :

| $x$ | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |

h. Si $f$ est en plus continue sur $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on peut obtenir la croissance ou la décroissance sur $[a, b]$ à partir du signe de $f'$ sur $]a, b[$.

On constate que la fonction $f$ est croissante sur $]-\infty, 1[$, décroissante sur $]1, 3[$ et de nouveau croissante sur $]3, +\infty[$. Les points stationnaires sont 1 et 3, et on constate, vu le signe de la dérivée, que la fonction atteint un maximum local en 1 et un minimum local en 3.

Le résultat suivant montre que sur un intervalle ouvert, les seules fonctions ayant une dérivée nulle sont les fonctions constantes. Il sera utile notamment pour le calcul des primitives, dans le prochain chapitre.

**Proposition 3.8.** *Si $f$ est dérivable sur $]a, b[$ et si sa dérivée $f'$ est nulle sur $]a, b[$, alors $f$ est constante sur $]a, b[$. En particulier, si $f$ et $g$ sont dérivables sur $]a, b[$ et si $f' = g'$ sur $]a, b[$ alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f = g + k$ sur $]a, b[$.*

*Démonstration.* On applique encore le théorème des accroissements finis (avec cette fois $f'(c) = 0$), ou on note que $f$ doit être à la fois croissante et décroissante sur $]a, b[$. Pour le deuxième point, on note que $f - g$ a une dérivée nulle sur $]a, b[$. □

Ici encore l'hypothèse de se trouver sur un intervalle (connexe) $]a, b[$ est importante : si on remplace $]a, b[$ par l'union de deux intervalles ouverts, le théorème est faux : les fonctions $f$ et $g$ diffèrent par une constante sur chaque intervalle, et ces constantes peuvent être différentes.

Nous avons défini quelques fonctions réciproques en admettant que certaines fonctions étaient des bijections. Terminons cette section par un théorème qui permet de démontrer effectivement qu'un certain nombre de fonctions sont des bijections. Il est donné pour votre information. Il a sa place dans cette section car c'est une conséquence des théorèmes que nous venons de voir.

**Théorème 3.9** (Fonction inverse)**.** *Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f'$ est strictement positive (resp. négative) sur $]a, b[$. Alors*

1. *les limites*
$$a' = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad b' = \lim_{x \to b^-} f(x)$$
*existent et sont différentes ;*
2. *la fonction $f : ]a, b[ \to ]a', b'[$ (resp. $]b', a'[$) définit une bijection.*
3. *la fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable et sa dérivée est donnée par la proposition 2.7.*

Ce théorème nous sera également utile pour définir la fonction exponentielle dans le chapitre suivant.

# 4 Dérivées de quelques fonctions élémentaires

Les théorèmes que nous venons d'énoncer nous permettent d'étudier de manière plus précise les fonctions que nous avons vues jusqu'à présent, en calculant leur dérivée. Nous commençons par les fonctions puissances à exposant entier, puis nous revoyons les racines $p$-èmes et les fonctions puissances d'exposant fractionnaire. Nous passons ensuite aux fonctions trigonométriques classiques et trigonométriques réciproques. Nous avons déjà revu toutes ces fonctions, c'est pourquoi je ne donne pas leur représentation graphique.

## 4.1 Les fonctions puissances à exposant entier

Nous avons déjà vu les fonctions puissances à exposantes positifs. Voici le résultat

**Proposition 4.1.** *Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^m$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par*
$$f'_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto m x^{m-1}.$$

*Démonstration.* Nous avons déjà démontré le résultat pour $f_1$, et même pour $f_2$. La démonstration utilise une récurrence : on suppose le résultat vrai pour tout $n = 1, 2, \ldots, m - 1$, et on le démontre pour $m$. Cela suffit pour le démontrer pour tous les entiers. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f_m(x) = x\, f_{m-1}(x).$$

On applique la règle sur les produits (la règle de Leibniz). On a donc (si $m \geqslant 2$)

$$f'_m(x) = 1\, f_{m-1}(x) + x\, f'_{m-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vu l'hypothèse de récurrence on a

$$f'_m(x) = x^{m-1} + x\,(m-2)x^{m-2} = (m-1)x^{m-1},$$

et le résultat est prouvé. □

On utilise alors la règle sur les quotients pour obtenir la dérivée de fonctions puissances à exposants négatifs.

**Proposition 4.2.** *Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, la fonction $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-m}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa dérivée est donnée par*

$$g'_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (-m)x^{-m-1}.$$

*Démonstration.* On a bien sûr $g_m(x) = \frac{1}{x^m}$ pour tout $x \neq 0$. On calcule alors

$$g'_m(x) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \frac{1}{x^{m+1}},$$

pour tout $x \neq 0$. □

On peut bien sûr rassembler ces deux résultats en retenant $(x^m)' = mx^{m-1}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_0$. Il faut cependant se rappeler que ce n'est vrai que pour $x \neq 0$ quand l'exposant est négatif.

## 4.2 Les fonctions racines et puissance fractionnaires

Comme nous l'avons vu, les propriétés des fonctions racines $p$-èmes dépendent de la parité de $p$. Voici la définition pour $p$ pair :

**Définition 4.3.** Pour tout $p$ entier pair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction réciproque est la fonction racine $p$-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[ : x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Ses propriétés en termes de dérivées sont données par le résultat suivant.

**Proposition 4.4.** *Pour tout p pair, la fonction $\sqrt[p]{\cdot}$ est une application continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on a de plus $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[p]{x} = +\infty$. On a*

$$D \sqrt[p]{x} = (\sqrt[p]{x})' = \frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}}, \quad \forall x \in ]0, +\infty[.$$

*Démonstration.* Puisque $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est donnée par $f'_p(x) = px^{p-1}$, on a

$$(\sqrt[p]{x})' = \frac{1}{py^{p-1}}|_{y = \sqrt[p]{x}}, \quad \forall x \in ]0, +\infty[,$$

ce qui donne le résultat sur la dérivée. Celle-ci est strictement positive et la fonction racine $p$-ème est donc strictement croissante, et continue sur cet intervalle. On peut vérifier que la continuité et la stricte croissance restent valables sur $[0, +\infty[$. □

Nous avons des résultats analogues pour les fonctions racines $p$-èmes pour $p$ impair.

**Définition 4.5.** Pour tout $p$ entier impair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est la fonction racine $p$-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

On a alors un résultat analogue à celui énoncé ci-dessus pour les racines $p$-èmes avec $p$ pair.

**Proposition 4.6.** *Pour tout $p$ impair, la fonction $\sqrt[p]{\cdot}$ est une application continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_0$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a de plus $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[p]{x}=\pm\infty$. On a*

$$D\sqrt[p]{x}=(\sqrt[p]{x})'=\frac{1}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}\quad\forall x\in\mathbb{R}_0.$$

Nous avons regroupé toutes les fonctions racines et puissances vues jusqu'à présent sous une même dénomination de fonctions puissances. Pour ne pas avoir de problème, nous avons restreint le domaine de ces fonctions puissances à exposant fractionnaire à $]0,+\infty[$. On définit alors, pour tous entiers $p$, $q$ tels que $q$ soit non nul :

$$x^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{x},\quad x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}=(\sqrt[q]{x})^p,\quad x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}.$$

En utilisant cette notation, on a pour tout $m\in\mathbb{Q}$,

$$D(x^m)=mx^{m-1},$$

sur $]0,+\infty[$. Quand on est face à une expression contenant des racines, on peut la transformer en fonction puissance à exposant rationnel, puis calculer la dérivée, et enfin transformer le résultat pour revenir aux racines. Il faut cependant être prudent quant au domaine des fonctions considérées. Par exemple, si on veut calculer la dérivée de la racine cinquième, on a sur $]0,+\infty[$ :

$$\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}},\quad\text{donc}\quad(\sqrt[5]{x})'=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

Cette expression donne également la dérivée de la fonction racine cinquième sur $]-\infty,0[$.

## 4.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Passons maintenant aux dérivées des fonctions trigonométriques réciproques. Nous avons déjà calculé les dérivées des fonctions sinus, cosinus et tangente dans les exemples donnés dans ce chapitre. Je rappelle à chaque fois la définition, puis je donne le résultat pour la dérivée.

La dérivée de la fonction sin est la fonction cos. Cette dérivée est donc strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La fonction sin est donc strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur son image $[-1,1]$.

**Définition 4.7.** La fonction arcsin (arc sinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

On a le résultat suivant qui regroupe les propriétés d'arc sinus.

**Proposition 4.8.** *On a*

$$\sin(\arcsin x)=x\quad\forall x\in[-1,1]$$

*et*

$$\arcsin(\sin x)=x\quad\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

*La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a*

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\forall x\in]-1,1[.$$

**Remarque 4.9.** La fonction qui a $x$ associe $\arcsin(\sin x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est égale à la fonction identique que sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

*Démonstration.* Les premiers points résultent de la définition. Pour la dérivée, on note que pour tout $x\in]-1,1[$, on a, vu le théorème de dérivation des fonctions réciproques,

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sin'(y)}|_{y=\arcsin(x)}=\frac{1}{\cos(y)}|_{y=\arcsin(x)}.$$

On est donc amené à calculer $\cos(\arcsin(x))$, mais si $y=\arcsin(x)$, alors $y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(y)>0$. Alors

$$\cos(y)=\sqrt{1-\sin^2(y)}=\sqrt{1-x^2},$$

d'où le résultat. □

La dérivée de la fonction cos est la fonction $-\sin$. La restriction de la fonction cos à $]0,\pi[$ est continue et a une dérivée strictement négative. Cette fonction est donc strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle définit une bijection de $[0,\pi]$ sur son image $[-1,1]$.

**Définition 4.10.** La fonction arccos (arc cosinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$.

On a un résultat analogue au précédent en ce qui concerne la dérivée de arc cosinus.

**Proposition 4.11.** *On a*

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \forall x \in [-1,1]$$

*et*

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

*La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in ]-1,1[.$$

*En particulier,* arccos *est strictement décroissante sur son domaine de définition. La fonction* arccos *n'est pas une nouvelle fonction, on a en effet*

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \quad \forall x \in [-1,1].$$

*Démonstration.* Les premiers points résultent encore de la définition. Pour calculer la dérivée, il suffit de prouver la dernière affirmation et d'utiliser le théorème sur la fonction arcsin. Pour cette affirmation, on note que pour $x \in [-1,1]$, $\arccos(x)$ est par définition l'unique élément $t$ de $[0,\pi]$ tel que $\cos(t) = x$. Ces deux conditions sont satisfaites par le nombre $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. □

La fonction tangente est définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Elle y est également dérivable et sa dérivée y est strictement positive, donc la fonction tangente est strictement croissante et définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

**Définition 4.12.** La fonction arctg (arc tangente) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

La dérivée de la fonction arc tangente est donnée par le résultat suivant. Elle est particulièrement importante pour la primitivation des fractions rationnelles.

**Proposition 4.13.** *On a*

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*et*

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

*La fonction* arctg *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*En particulier, la fonction arc tangente est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Seul le point sur la dérivée est à démontrer. On a, par le théorème de la fonction inverse :

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}' y}|_{y=\operatorname{arctg}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}}|_{y=\operatorname{arctg}(x)}.$$

Or si $y = \operatorname{arctg}(x)$, on a $\operatorname{tg}(y) = x$ et donc $\frac{1}{\cos^2(y)} = 1 + \operatorname{tg}^2(y) = 1 + x^2$, qui donne le résultat attendu. □