# 11. Calcul intégral

Dans ce module consacré au calcul intégral, nous allons revoir d'abord la notion d'intégrale d'une fonction (continue) à valeurs positives sur un intervalle $[a, b]$. Nous la définirons comme l'aire d'une région du plan définie au dessus de $[a, b]$ par la fonction $f$.

Nous rappelerons comment définir cette aire comme une limite de sommes d'aires de rectangles (les sommes de Darboux ou celles de Riemann). Nous étendrons cette définition aux fonctions continues quelconques sur un intervalle $[a, b]$.

Nous montrerons comment calculer cette aire à partir d'une technique appelée *primitivation* ou *calcul de primitives*, que nous allons étudier au préalable. Le lien entre le problème de calcul d'aire et la primitivation est le théorème fondamental du calcul intégral.

Il sera bien sûr important de pouvoir calculer des primitives de quelques fonctions élémentaires à l'aide de techniques de primitivation qui découlent directement des techniques de dérivation que nous avons étudiées dans un module précédent.

En ce qui concerne les intégrales, il sera aussi utile pouvoir appliquer certaines techniques, mais il sera également important, pour les autres cours utilisateurs des mathématiques, de comprendre le processus qui a mené à la définition de la notion d'intégrale comme la limite d'une somme d'aires de rectangles car ce processus intervient dans de nombreux domaines scientifiques.

Nous profiterons aussi de ce module pour revoir le logarithme népérien. Nous l'utiliserons pour revoir la définition de la fonction exponentielle puis nous reverrons la fonction exponentielle et les logarithmes et exponentielles de base quelconque [a]. Ces fonctions et les équations qu'elles permettent de résoudre jouent un rôle important notamment en chimie.

Enfin, nous élargirons les définitions les définitions d'intégrales à des intervalles non bornés et discuterons quelques problèmes liés à ces définitions.

## 1 Calcul des primitives

Nous introduisons ici la notion de primitive et donnons des résultats d'existence et d'unicité. Ensuite nous donnerons quelques règles de calcul.

### 1.1 Définitions

Nous avons étudié la notion de dérivation dans un module précédent. On peut voir le calcul de la dérivée comme un processus (on dit parfois un opérateur) qui a toute fonction dérivable $f$ sur un intervalle $]a, b[$, associe sa fonction dérivée $Df$ ou $f'$ sur $]a, b[$. En ce sens la fonction $Df$ est dérivée de $f$ au sens strict du terme, et la fonction $f$ est celle qui *vient avant $Df$*. C'est donc la fonction première, ou primitive. On a donc naturellement la définition suivante.

**Définition 1.1.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I = ]a, b[$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de $f$ sur $I$ une fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $DF(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$. Si une telle fonction existe, on dit que $f$ est primitivable sur $I$. On note

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

une primitive de $f$ sur $I$.

a. Il y a plusieurs façons de voir ces fonctions, et la façon dont on vous les a expliquées dans votre classe sera peut-être différente de celle utilisée ici. Quel que soit le chemin utilisé, les définitions sont compatibles entre elles, et ces fonctions sont utilisées de la même façon, avec les mêmes propriétés.

Vu cette définition et vu le chapitre sur la dérivation, nous disposons déjà d'une liste considérable d'exemples de primitives : il suffit de lire les résultats du calcul des dérivées dans l'autre sens [b]. Il est important de noter que puisque les constantes ont une dérivée nulle, on peut toujours additionner une constante à une primitive et garder une primitive. Le problème de primitivation (la recherche d'une primitive) est posé sur un intervalle et la solution dépend parfois de l'intervalle.

Voici une liste de quelques fonctions et de primitives correspondantes. Dans la première colonne, je donne l'expression de la fonction $f$, dans la seconde, l'intervalle $I$ où le problème de primitivation est considéré [c] et dans la troisième, je donne l'expression d'une primitive.

| La fonction | sur l'intervalle $I = \ldots$ | Une primitive |
|---|---|---|
| $f(x) = \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = -\cos(x)$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \sin(x)$ |
| $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $f(x) = x^m \ (m \in \mathbb{Z}), m \leqslant -2$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ | $F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ |
| $f(x) = x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ | $]0, +\infty[$ | $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $F(x) = \operatorname{tg}(x)$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $]-1, 1[$ | $F(x) = \arcsin(x)$ |
| $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $F(x) = \operatorname{arctg}(x)$ |

Il existe des fonctions qui n'admettent pas de primitive. Il est donc assez naturel, d'un point de vue mathématique, de s'interroger sur des conditions qui assurent l'existence d'une primitive pour une fonction sur un intervalle donné, et quand on sait qu'il en existe une, de savoir dans quelle mesure il peut en exister d'autres. Ces deux questions trouvent une réponse partielle dans les deux propositions suivantes. Le premier théorème est fondamental, nous l'admettrons.

**Théorème 1.2.** *Toute fonction $f$ continue sur un intervalle $]a, b[$ admet une primitive sur $]a, b[$.*

Il est important de noter que ce théorème fournit une condition suffisante, mais pas nécessaire : il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives. En ce qui concerne l'unicité, on sait que le problème de primitivation d'une fonction n'admet pas une solution unique, puisqu'ajouter une constante à une fonction donnée ne change pas sa dérivée. Cette remarque est rappelée dans le résultat suivant. Elle est complétée par sa réciproque : si on a deux primitives d'une même fonction sur un intervalle, alors leur différence est constante sur cette intervalle.

**Proposition 1.3.**

1. *Si $F$ est une primitive de $f$ sur $]a, b[$, alors pour toute constante $c$, la fonction $F + c$ est une primitive de $f$ sur $]a, b[$ ;*
2. *Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur $]a, b[$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $G = F + c$ sur $]a, b[$ ;*
3. *Soient $f$ une fonction primitivable sur $]a, b[$, $x_0 \in ]a, b[$ et $r \in R$, il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $]a, b[$ telle que $F(x_0) = r$*

*Démonstration.* Pour le premier point, on a par définition $D(F) = f$ sur $]a, b[$. Alors on a aussi

$$(F + c)'(x) = F'(x) + c'(x) = F'(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a, b[,$$

pour toute (fonction) constante $c$, vu les règles de dérivation des sommes et des constantes.

b. En ggénéral, si vous avez calculé assez de dérivées, vous pouvez deviner un certain nombre de primitives.
c. Le résultat reste valable si on considère un intervalle $I' \subset I$.

Pour le deuxième, sous les conditions de l'énoncé, on a

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in ]a,b[.$$

On sait donc que $G-F$ est une fonction constante sur $]a,b[$, d'où le résultat.

Pour le troisième point, si $G$ est une primitive de $f$ sur $]a,b[$, en posant $F = G + (r - G(x_0))$, on obtient une primitive de $f$ ayant la propriété demandée. Si $H$ est une autre solution au problème, alors par le deuxième point, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $H = F + c$ sur $]a,b[$, mais puisque $H(x_0) = F(x_0) = r$, on doit avoir $c = 0$, ce qui prouve l'unicité. □

Cette proposition justifie l'introduction d'une nouvelle notation.

**Définition 1.4.** Si $F$ et $G$ sont définies sur un même intervalle $I$, on note

$$F \simeq G$$

si il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + c$ sur $I$.[d]

La proposition suivante sera utile pour les applications que nous ferons du calcul des primitives.

**Proposition 1.5.** *Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, alors il existe une primitve $F$ de $f$ sur $]a,b[$ telle que $F$ soit continue sur $[a,b]$.*

L'idée de la preuve est de considérer une primitive $F$ de $f$ sur $]a,b[$ et de la prolonger sur $[a,b]$ en définissant sa valeur en $a$ et en $b$ par $F(a) = \lim_{x\to a^+} F(x)$ et $F(b) = \lim_{x\to b^-} F(x)$. Il faut juste prouver que ces limites existent et sont des nombres réels. C'est le point délicat de la preuve.

## 1.2 Méthodes de calcul des primitives

Nous disposons d'une liste de primitives de fonctions élémentaires. A partir de cette liste, les méthodes de calcul qui suivent permettent de calculer des primitives de fonctions plus élaborées. Ces méthodes sont basées sur les méthodes de calcul des dérivées, évidemment. Quelle que soit la méthode utilisée, on peut vérifier le résultat, en dérivant la fonction obtenue. Commençons par un résultat sur les combinaisons linéaires.

**Proposition 1.6** (Combinaisons linéaires)**.** *Si $f$, $g$ sont primitivables sur $]a,b[$ et $r, s \in \mathbb{R}$, alors $rf + sg$ est primitivable sur $]a,b[$ et on a*

$$\int (rf+sg)(x)\,\mathrm{d}x \simeq r\int f(x)\,\mathrm{d}x + s\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

*sur $]a,b[$.*

*Démonstration.* On calcule la dérivée de $r\int f(x)\,\mathrm{d}x + s\int g(x)\,\mathrm{d}x$ en appliquant la règle de dérivation des combinaisons linéaires. □

Ceci permet de calculer les primitives de combinaisons linéaires de fonctions élémentaires.

**Exemple 1.7.**

1. $\int 3x^3 + 4x^2 + 1\,\mathrm{d}x \simeq 3\int x^3\,\mathrm{d}x + 4\int x^2\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x \simeq 3\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + x$, sur $\mathbb{R}$ ;
2. $\int \frac{3}{1+x^2} + x^5\,\mathrm{d}x \simeq 3\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int x^5\,\mathrm{d}x \simeq 3\mathrm{arctg}(x) + \frac{x^6}{6}$, sur $\mathbb{R}$.
3. $\int 3\sin(x) - 3x^2 + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \simeq -3\cos(x) - x^3 - \frac{1}{x}$, sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$.

La méthode suivante, appelée primitivation par parties, est basée sur la règle de dérivation des produits.

**Théorème 1.8** (Primitivation par parties)**.** *Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $I = ]a,b[$ et si $fDg$ est primitivable sur $I$ alors $gDf$ est primitivable sur $I$ et on a*

$$\boxed{\int g(x)\,Df(x)\,\mathrm{d}x \simeq f(x)g(x) - \int Dg(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{sur} ]a,b[.} \tag{1}$$

d. La notation devrait faire référence à l'intervalle $I$, mais cette imprécision ne posera pas de problème. Vous pouvez aussi écrire $G = F + c$.

*Démonstration.* Il suffit de dériver le membre de droite de l'égalité à démontrer et de constater que c'est bien la fonction $g\,Df$, sur $]a,b[$. □

Cette technique est utilisée pour calculer des primitives de fonctions qui s'expriment comme un produit. Les hypothèses ne doivent pas vous faire peur : elles sont là pour garantir que toutes les expressions dans (1) soient bien définies.

Il faut bien sûr que le résultat après application de la proposition précédente soit plus simple que le calcul de départ. Le mieux est de se poser la question à l'avance, pour ne pas travailler pour rien.

Il y a d'autres cas plus spécifiques où cette méthode peut être appliquée avec succès : dans la primitivation des fonctions réciproques, dont la dérivée est plus simple à manipuler. C'est le cas pour arc sinus et arc tangente, mais aussi pour le logarithme que nous reverrons plus bas.

Voici deux exemples. J'en profite également pour vous proposer une façon d'ordonner le calcul pour appliquer la proposition.

**Exemple 1.9.**

1. Trouver la primitive $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

   On sait que cette fonction est primitivable. L'idée est d'utiliser la primitivation par parties pour faire disparaître le facteur $x$ dans la fonction à primitiver.

   $$\begin{array}{lll} \text{On pose} & g(x)=x, & Df(x)=\sin(x). \\ \text{On obtient} & Dg(x)=1, & f(x)=-\cos(x), \end{array}$$

   on a donc

   $$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) - \int 1\,(-\cos(x))\,\mathrm{d}x \simeq -x\cos(x)+\sin(x).$$

   Il est fortement conseillé de vérifier le résultat.

2. Calculer la primitive $\int x^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

   Ici encore la fonction est continue et admet donc une primitive. On constate que s'il n'y avait pas le facteur $x^2$, le calcul serait plus aisé. On va donc utiliser la primitivation par parties pour faire baisser le degré en $x$. Il faudra utiliser le procédé deux fois [e].

   $$\begin{array}{lll} \text{On pose} & g(x)=x^2, & Df(x)=\sin(3x). \\ \text{On obtient} & Dg(x)=2x, & f(x)=-\frac{\cos(3x)}{3}, \end{array}$$

   on a donc

   $$\int x^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} - \int 2x(-\frac{\cos(3x)}{3})\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$

   On peut constater que cela donne bien le résultat attendu : dans la primitive qui reste à calculer, il n'y a plus de terme du second degré en $x$. On recommence le procédé :

   $$\begin{array}{lll} \text{On pose} & g(x)=x, & Df(x)=\cos(3x). \\ \text{On obtient} & Dg(x)=1, & f(x)=\sin(3x)/3, \end{array}$$

   donc finalement

   $$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{x\,\sin(3x)}{3} - \int \frac{\sin(3x)}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x\,\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9}.$$

   On a donc finalement

   $$\int x^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x \simeq -\frac{x^2\cos(3x)}{3} + \frac{2x\,\sin(3x)}{9} + \frac{2\cos(3x)}{27}.$$

e. Nous n'avons pas encore revu comment primitiver $\sin(3x)$ mais une primitive n'est pas difficile à deviner. Si vous ne voyez pas, allez revoir la méthode suivante, à savoir la substitution.

On peut bien sûr vérifier le résultat en dérivant la fonction obtenue. On doit constater des simplifications qui conduisent à la bonne dérivée.

La méthode de calcul suivante s'appelle la primitivation par substitution. Elle est basée sur le calcul des dérivées des fonctions composées.

**Théorème 1.10** (Primitivation par substitution)**.** *Si la fonction $g$ est dérivable sur $]a,b[$ et si la fonction $f$ admet une primitive $F$ sur un $J$ tel que $g(]a,b[) \subset J$, alors la fonction*

$$h : ]a,b[ \to \mathbb{R} : x \mapsto f(g(x))Dg(x)$$

*est primitivable sur $]a,b[$ et on a*

$$\boxed{\int f(g(x))Dg(x)\,\mathrm{d}x \simeq F(g(x)), \quad \textit{sur}\, ]a,b[.} \tag{2}$$

*Démonstration.* Ici encore, il suffit de constater que le membre de droite de l'égalité est dérivable et de calculer sa dérivée. □

Comme dans la méthode précédente, les hypothèses du théorème sont là pour que les expressions dans (2) soient bien définies.

Pour appliquer ce théorème, il faut repérer dans la fonction à primitiver une fonction composée ($f \circ g$) et constater que cette composée est multipliée par la dérivée de $g$. Il faut alors primitiver $f$ pour obtenir $F$ et appliquer le résultat. Nous avons en fait déjà utilisé ce principe dans des exemples immédiats. Voici comment cela fonctionne dans quelques cas simples.

**Exemple 1.11.**

1. Calcul de la primitive $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$ :
   On sait que la fonction $\cos(3x)$ est primitivable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$. C'est la composée $f \circ g$, où $g(x) = 3x$ et $f(t) = \cos(t)$ pour tous $t, x \in \mathbb{R}$. On a $Dg(x) = 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f$ est primitivable sur $\mathbb{R}$ et admet $F(t) = \sin(t)$ comme primitive. On a donc

   $$\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\sin(3x).$$

2. Calcul de la primitive $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$ :
   Ici encore, la fonction considérée est bien primitivable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. En définissant la fonction $g$ par $g(x) = 1 + x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $Dg(x) = 2x$, et donc

   $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \simeq \int \frac{1}{2}Dg(x)\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

   On est alors dans les conditions du théorème si on considère la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$, qui admet pour primitive la fonction $F$ définie par $F(t) = 2t^{\frac{1}{2}}$. On obtient alors

   $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \simeq \int \frac{1}{2}Dg(x)\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2}(2\sqrt{g(x)}) \simeq \sqrt{1+x^2}.$$

   On peut encore une fois vérifier le résultat en dérivant le membre de droite.

3. Calcul de la primitive $\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$ sur $]-1,1[$ :
   On vérifie que la fonction est primitivable puisqu'elle est continue. Ensuite, on est confronté à une fonction réciproque. La technique est d'utiliser une primitivation par parties pour travailler avec la dérivée de la fonction arcsin, plutôt que la fonction elle-même.

   $$\begin{array}{lll} \text{On pose} & g(x) = \arcsin(x), & Df(x) = 1. \\ \text{On obtient} & Dg(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & f(x) = x, \end{array}$$

ce qui donne

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \simeq x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \simeq x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2},$$

en procédant comme dans l'exemple précédent.

Le résultat précédent, bien qu'il puisse être utilisé tel quel, peut être écrit de manière à organiser le calcul et à voir apparaître la fonction $f$ à primitiver. Il suffit d'écrire la relation (2) de manière adéquate.

Si on écrit $F(u) = \int f(u)\mathrm{d}u$, le membre de droite de (2) est obtenu en rempaçant $u$ par $g(x)$. On peut faire de même dans le membre de gauche et le théorème précédent peut être écrit comme ceci :

$$\text{On pose} \quad u = g(x)$$

$$\text{et} \quad \mathrm{d}u = Dg(x)\mathrm{d}x$$

Alors $\int f(g(x))Dg(x)\,\mathrm{d}x$ s'écrit $\int f(u)\mathrm{d}u$. Après avoir fait cette substitution, on calcule la primitive, et on remplace $u$ par $g(x)$.

**Exemple 1.12.** 1. Calcul de la primitive $\int \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$ :
On sait que la primitive existe car la fonction considérée est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On pose} \quad u = \sin(x)$$

$$\text{et} \quad \mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x$$

On substitue ceci dans la primitive pour et on est amené à calculer

$$\int u^3\mathrm{d}u \simeq \frac{u^4}{4}$$

On remplace alors $u$ par $\sin(x)$ et on obtient

$$\int \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{\sin^4(x)}{4}.$$

2. Calcul de la primitive $\int x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$ :
Ici aussi, la fonction est primitivable parce qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. On voit qu'il y a une fonction composée, multipliée par la dérivée adéquate, à une constante près.

$$\text{On pose} \quad u = x^3$$

$$\text{et} \quad \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$$

On est amené à calculer la primitive

$$\int \frac{1}{3}\cos(u)\mathrm{d}u \simeq \frac{1}{3}\sin(u).$$

On remplace enseuite $u$ par $x^3$ et on obtient

$$\int x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{3}\sin(x^3).$$

On peut vérifier le résultat en le dérivant.

Il arrive qu'aucune des techniques ci-dessus ne donne de bons résultats. Par exemple, pour appliquer la primitivation par substitution, il faut avoir une fonction composée. Si ce n'est pas le cas, on peut forcer toute fonction $f$ à être une composée. Cette idée donne lieu à la primitivation par changement de variables.

La technique est semblable à celle de primitivation par substitution, mais elle est plus difficile à mettre en oeuvre puisque l'opération à effectuer ne se voit pas à priori. Il y a des ensembles de primitives bien connus que l'on peut calculer ainsi. Ils remplissent des livres entiers. Je vous donne le résultat pour que vous ne soyez pas surpris si vous le rencontrez et un exemple classique, mais je ne vais pas plus loin, car je pense que cela sort du cadre de ce cours préparatoire.

**Théorème 1.13** (Primitivation par changement de variables)**.** *Si* $g : ]a', b'[ \to ]a, b[$ *est dérivable et si* $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *est primitivable et admet la primitive* $F$*, alors*

$$\int f(g(t))Dg(t)\,\mathrm{d}t \simeq F \circ g.$$

*Si* $g$ *est une bijection dérivable entre* $]a', b'[$ *et* $]a, b[$*, dont la dérivée ne s'annule pas sur* $]a', b'[$*, alors on a*

$$F \simeq \left(\int f(g(t))Dg(t)\,\mathrm{d}t\right) \circ g^{-1}, \quad sur ]a, b[. \tag{3}$$

*Démonstration.* La première partie du résultat est simplement la primitivation par substitution. On a ensuite $F = (F \circ g) \circ g^{-1}$. □

Nous utilisons une notation similaire à celle de la primitivation par substitution. Pour calculer $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{array}{ll} \text{On pose} & x = g(t) \\ \text{et} & \mathrm{d}x = Dg(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On calcule la primitive ainsi obtenue, puis on remplace $t$ par $g^{-1}(x)$.

Voici deux exemples :

**Exemple 1.14.** Calculer $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ sur $]-1, 1[$ :

$$\begin{array}{ll} \text{On pose} & x = \sin(t), \quad t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \text{On écrit} & \mathrm{d}x = D(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \cos(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

On est amené à caluler

$$\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t \simeq \int \cos^2(t)\mathrm{d}t \simeq \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t \simeq \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}.$$

Il reste à remplacer $t$ par sa valeur en terme de $x$, i.e. $t = \arcsin(x)$. On obtient donc

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

# 2 Logarithme népérien, exponentielle et Cie

Nous avons vu jusqu'à présent les puissances fractionnaires. Par exemple, nous avons ainsi pu définir

$$3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = (\sqrt[100]{3})^{141} = \sqrt[100]{3^{141}}.$$

De manière générale, pour tous nombres $p, q$ naturels non nuls, on a

$$3^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{3})^p = \sqrt[q]{3^p}.$$

Dans cette section, nous allons étendre cette expression pour laisser l'exposant varier dans tous les nombres réels. On construira ainsi la fonction qui à tout $x$ associe $3^x$ [f]. Pour ce faire, je fais un petit détour par les logarithmes.

f. Faites attentions à la différence avec la fonction qui à tout $x$ associe $x^3$.

## 2.1 Le logarithme népérien

Il existe plusieurs définitions de la fonction logarithme népérien. [g] Je vous donne ici la définition la plus économique, basée sur un théorème d'existence de primitives de fonctions continues 1.3.

On considère la fonction

$$f : ]0, +\infty[ \to ]0, +\infty[ : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. Elle y est donc primitivable.

**Définition 2.1.** La fonction *logarithme népérien* ln est l'unique fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ dont la dérivée satisfait $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1.

La proposition suivante donne la propriété fondamentale du logarithme népérien, qui sera généralisée pour tous les logarithmes que nous allons introduire, et qui est la raison même de son invention.

**Proposition 2.2** (Propriété fondamentale)**.** *Pour tous $a, b > 0$, on a*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \textit{et} \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b).$$

*On na également* $\ln(1) = 0$.

*Démonstration.* Pour $a > 0$, considérons la fonction

$$g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(ax).$$

On a $g'(x) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x}$. Donc $g$ et ln on la même dérivée sur $]0, +\infty[$. Il existe donc une constante $c$ telle que $g(x) = \ln(x) + c$ sur $]0, +\infty[$. En $x = 1$, on a $\ln(a) = g(1) = \ln(1) + c$, donc $c = \ln(a)$, ce montre la première relation. La deuxième relation s'écrit aussi $\ln(\frac{a}{b}) + \ln(b) = \ln(a)$ et est donc une conséquence de la première. □

On a ensuite les propriétés de la fonction ln.

**Proposition 2.3.** *La fonction*

$$\ln : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$$

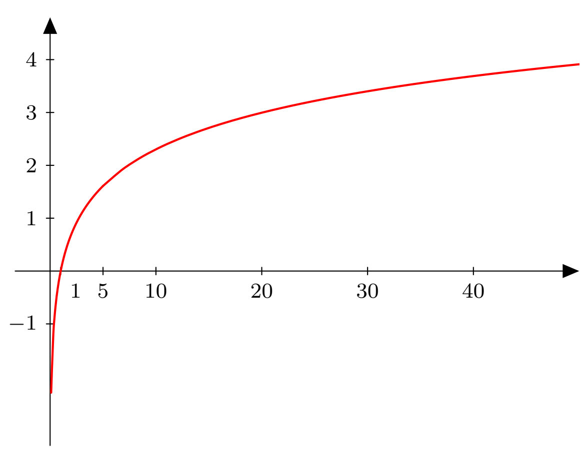
*est définie et continue sur* $]0, +\infty[$*. Elle est strictement croissante et on a*

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

*Donc la fonction* ln *définit une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Par définition, la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc elle y est définie et continue. Par définition aussi, sa dérivée est strictement positive, donc ln est strictement croissante. Le reste de la preuve n'est pas difficile, mais je ne veux pas alonger ce chapitre. □

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien est la suivante.




g. Découverte par John Napier of Merchiston, mathématicien, physicien, astronome et astrologue Ecossais (1550 -1617).

Les propriétés que nous venons d'énoncer pour le logarithme népérien permettent d'introduire la fonction exponentielle.

**Définition 2.4.** La fonction exponentielle

$$\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[ : x \mapsto \exp(x)$$

est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

La fonction exponentielle jouit des propriétés suivantes, que l'on peut déduire des propriétés de la fonction ln.

**Proposition 2.5** (Propriété fondamentale)**.** *On a* $\exp(\ln(z)) = z$ *pour tout* $z > 0$ *et* $\ln(\exp(z)) = z$ *pour tout* $z \in \mathbb{R}$. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad et \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

*et* $\exp(0) = 1$.

*Démonstration.* Les deux premiers points sont des conséquences directes de la définition. Pour les autres, on se ramène aux propriétés analogues de la fonction logarithme. Puisque cette dernière est une bijection à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \ln(x_1)$ et $y = \ln(y_1)$, pour $x_1$ et $y_1$ dans $]0, +\infty[$. On a alors $x_1 = \exp(x)$ et $y_1 = \exp(y)$. Le membre de gauche de la première égalité vaut alors $\exp(\ln(x_1)+\ln(y_1)) = \exp(\ln(x_1y_1)) = x_1y_1$, qui vaut par définition $\exp(x)\exp(y)$. Puisque $\exp(x) \neq 0$, la deuxième égalité est équivalente à $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Mais par la première égalité, on a $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0)$. De plus on a $\exp(0) = 1$ puisque $\ln(1) = 0$. □

En ce qui concerne la croissance et la dérivabilité de l'exponentielle, les résultats sont les suivants.

**Proposition 2.6.** *La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$D(\exp(x)) = \exp(x)' = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

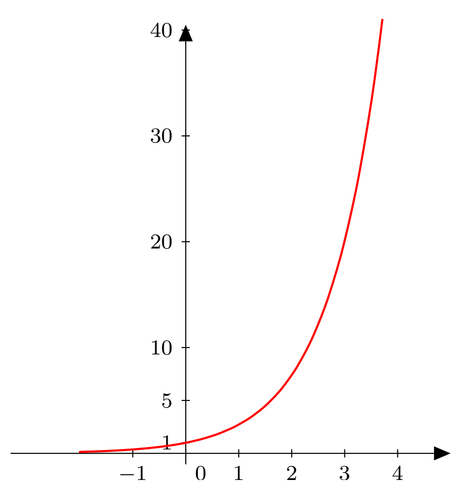
*La fonction exponentielle est strictement croissante et on a* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

*Démonstration.* La dérivabilité de la fonction exponentielle résulte du théorème de la fonction inverse. Ce même théorème permet de calculer sa dérivée. On a en effet

$$D(\exp(x)) = D(\ln^{-1}(x)) = \frac{1}{D\ln(y)}|_{y=\ln^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{y}}|_{y=\exp(x)} = \exp(x).$$

Ceci permet de montrer la croissance de la fonction, puisque sa dérivée est strictement positive. Pour les limites, on procède comme pour le logarithme, mais je vous passe les détails. □

La représentation graphique de la fonction exponentielle est la suivante.



Terminons cette section par l'introduction des fonctions exponentielles et logarithmiques de base quelconque.

**Définition 2.7.** Pour tout $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$, on définit la fonction exponentielle de base $a$ par

$$a^{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a)).$$

**Remarque 2.8.** On peut maintenant donner un sens à toute expression du type $a^b$ quel que soit $a > 0$. Par exemple $3^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \ln(3))$.

Dans le cas où $b$ est entier positif, $a^b = \exp(b \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^b$ coincide avec la puissance $b$-ème. Il en est de même si $b$ est entier négatif ou même rationnel. Je vous laisse le soin de vous en convaincre. L'expression que nous venons de définir généralise donc, pour $a > 0$, toutes celles qui ont été introduites auparavant.

**Définition 2.9.** Le nombre $e$ est l'unique nombre tel que $\ln(e) = 1$. On a alors $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.

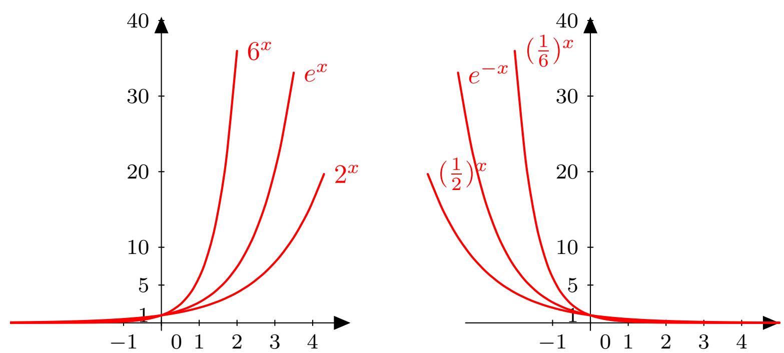
Les propriétés des fonctions exponentielles de base quelconque s'obtiennent à partir de celles de exp et ln.

**Proposition 2.10.** *Les propriétés de la fonction exponentielle de base a dépendent de a :*

- *Pour tout $a \in ]0, 1[$, la fonction $a^x$ est décroissante et vaut 1 en 0. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa limite en $-\infty$ vaut $+\infty$ et sa limite en $+\infty$ vaut 0.*
- *Pour tout $a \in ]1, +\infty[$, la fonction $a^x$ est croissante et vaut 1 en 0. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa limite en $-\infty$ vaut 0 et sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$.*

*Enfin, on a $(a^x)' = a^x \ln(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Voici les représentations graphiques de quelques fonctions exponentielles.




Puisque toutes ces fonctions sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, on peut définir les fonctions réciproques, qui ne sont rien d'autre que les fonctions logarithmiques de base quelconque.

**Définition 2.11.** Pour tout $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$, la fonction logarithme de base $a$, notée $\log_a$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base $a$.

Cette fonction peut s'exprimer en fonction de la fonction ln, et ses propriétés s'en déduisent.

**Proposition 2.12.** *La fonction*

$$\log_a : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} : x \to \log_a(x)$$

*est une bijection. Elle est strictement croissante pour $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$. On a*

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{et} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

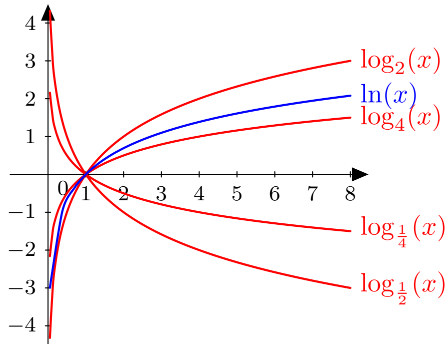
*pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in ]0, +\infty[$. De plus on a*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},$$

*pour tout $x \in ]0, +\infty[$.*

*Démonstration.* Démontrons seulement la dernière identité. Tout le reste en découle directement ou est une conséquence de la définition. On a $y = \log_a(x)$ si et seuelement si $x = a^y = e^{y \ln(a)}$. On a donc $y = \log_a(x)$ si et seulement si $\ln(x) = y \ln(a)$, ce qui donne l'identité annoncée. □

Voici ce que cela donne pour la représentation graphique.

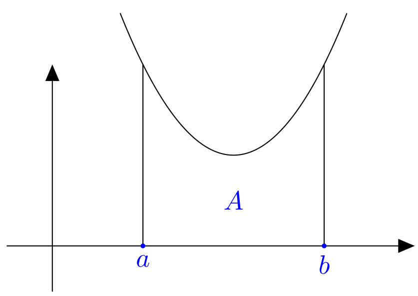



Les propriétés que nous venons de lister pour les fonctions logarithmes et exponentielles permettent de résoudre des équations mettant en jeu des puissances ou des logarithmes.

Elles permettent également d'envisger d'autres primitives, puisque nous connaissons les dérivées de fonctions supplémentaires.

# 3 Intégrale d'une fonction continue sur un fermé $[a, b]$

A titre d'introduction, considérons une fonction $f$ continue et à valeurs positives sur $[a, b]$.

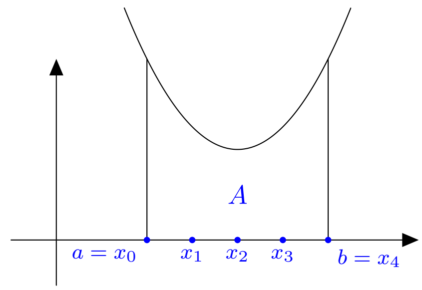



Supposons qu'on veuille déterminer l'aire $A$ de la région (que nous notons aussi $A$) du plan déterminée par l'axe des abscisses, les deux droites du plan d'équation $y = a$ et $y = b$ et le graphe de la fonction en question (ici une fonction du second degré).

Plusieurs méthodes existent pour donner une valeur approchée de cette aire. Les plus connues sont basées sur une approximation par des aires de rectangles.

## 3.1 Les sommes de Darboux

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous-intervalles en y fixant $n-1$ points $x_1 < \cdots < x_{n-1}$. On peut poser $a = x_0$ et $b = x_n$ et on a donc un *découpage* de l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ :




Puisque $f$ est continue sur $[a, b]$, elle est continue sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ $(i \leqslant n)$. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un minimum global sur cette intervalle, réalisé en un point $m_i$, et un maximum global sur cet intervalle, réalisé en un point $M_i$. On peut alors approcher l'aire à calculer en considérant la somme des aires des rectangles dont la base est $[x_{i-1}, x_i]$ et la hauteur donnée par $f(m_i)$. On définit ainsi la quantité

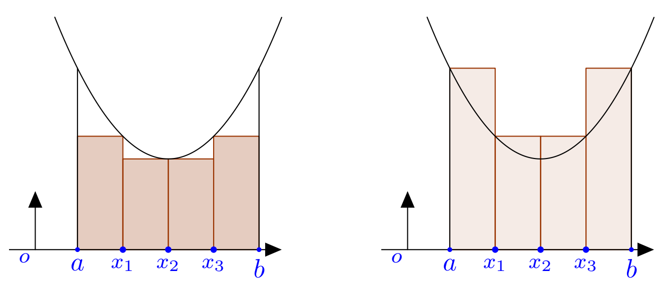
$$s(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i.$$

Ce quantité est inférieure à l'aire à calculer, puisque sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $f(m_i)(x_i - x_{i-1})$ est l'aire d'un rectangle dont la base est $(x_i - x_{i-1})$ et la hauteur est $f(m_i)$. Le rectangle ainsi construit est inclus dans la portion de plan veut on doit calculer l'aire.

De la même manière, on peut introduire la quantité

$$S(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$

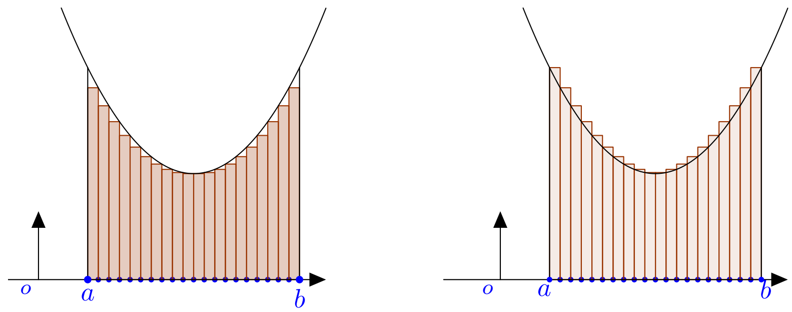
Cette quantité est cette fois supérieure à l'aire que nous souhaitons calculer. Voici ce que cela donne pour le modeste découpage que nous avons illustré plus haut.




On voit que l'approximation est grossière, et on constate que l'aire des rectangles est trop petite sur la figure de gauche et trop grande pour celle de droite : on a l'inégalité

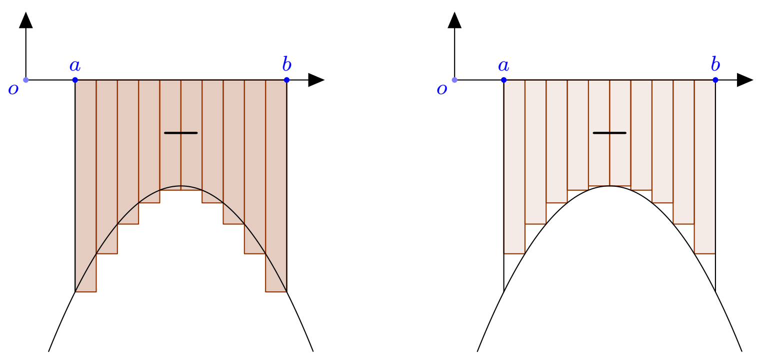
$$s(x_0, \ldots, x_4) \leqslant A \leqslant S(x_0, \ldots, x_4).$$

On affine alors le découpage de l'intervalle $[a, b]$ en y ajoutant des points. Voici ce que cela peut donner.




On constate que l'erreur commise en remplaçant l'aire à calculer par la somme des aires des rectangles devient plus petite. En fait, elle peut être rendue arbitrairement petite, pour autant qu'on puisse découper l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de longueur suffisamment petite.

Avant de rendre ces notions plus formelles, passons au cas de fonctions à valeurs négatives sur $[a, b]$ et au cas de fonctions de signe non constant. La clef pour étendre le calcul précédent est de considérer une aire signée : si la fonction est strictement négative sur l'intervalle $[a, b]$, on affectera un signe négatif à l'aire calculée et on parlera d'aire signée $A$.



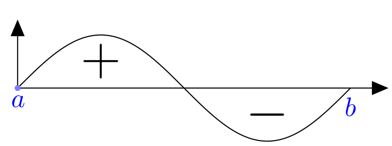

Avec cette définition, l'aire signée est encore approchée (inférieurement) par

$$s(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i,$$

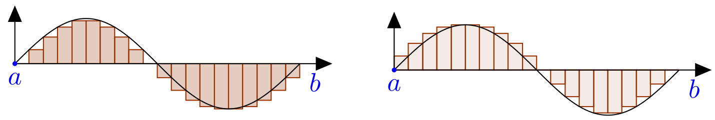
puisque $f(m_i)$ est un nombre négatif qui est l'opposé de la hauteur du rectangle, et supérieurement par

$$S(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$

Enfin, quand la fonction $f$ change de signe sur l'intervalle $[a, b]$, on convient de calculer la partie positive de l'aire, déterminée par la fonction au dessus des intervalles où elle prend des valeurs positives et d'ajouter la partie négative, déterminée par la restriction de la fonction sur les intervalles où elle prend des valeurs négatives. L'aire signée est encore approchée par les formules ci-dessus pour $s$ et $S$. Voici l'exemple de la fonction sin, sur l'intervalle $[a, b] = [0, 2\pi]$.




Les rectangles correspondants sont les suivants.




En résumé, nous avons la définition suivante.

**Définition 3.1.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

- Un découpage $D$ de l'intervalle $[a, b]$ est donné par $n - 1$ points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ satisfaisant $a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$. On pose $a = x_0$ et $b = x_n$.
- La largeur du découpage $D$ est le nombre $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_n\}$, c'est donc la plus grande largeur des rectangles que nous avons associés au découpage.
- La somme inférieure associée à un découpage $D = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ est

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i,$$

  où $f(m_i)$ est la valeur minimale de $f$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$
- La somme supérieure associée à un découpage est

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i,$$

  où $f(M_i)$ est la valeur maximale de $f$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$

On peut maintenant passer à la définition de l'intégrale. Elle est basée sur la constatation que nous avons faite plus haut que l'aire peut être approchée aussi précisément que l'on veut par les sommes inférieures et supérieures, pour autant que l'on découpe l'intervalle assez finement.

**Définition 3.2.** Une fonction $f$ est intégrable sur $[a, b]$ si pour toute suite de découpages $D_n$ $(n \in \mathbb{N})$ de $[a, b]$ dont la largeur tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, les sommes inférieures $s(D_n)$ et les sommes supérieures $S(D_n)$ convergent vers la même limite $l$. Cette limite est appelée intégrale de $f$ sur $[a, b]$ et est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Remarque 3.3.** Je ne vous ai pas parlé de la notion de convergence d'une suite de nombres. On peut voir cette notion comme un cas particulier de limite des valeurs d'une fonction : une suite (numérique réelle) $(c_n, n \in \mathbb{N})$ est une fonction dont le domaine est $\mathbb{N}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$) : à chaque nombre $n$ elle associe un nombre $c_n$. On peut donc lui appliquer la notion de limite en l'infini vue pour les fonctions : on a

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \ell$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon.$$

On peut se demander si avec une définition aussi restrictive, il existe des fonctions intégrables. C'est l'objet du résultat suivant.

## 3.2 Sommes de Riemann

La définition que nous venons de voir pour l'intégrale est intéressante, mais difficile à mettre en oeuvre puisque pour chaque intervalle du découpage, il faut rechercher la valeur maximale de $f$ et la valeur minimale. Nous allons voir une définition plus efficace, basée sur les sommes de Riemann. L'idée simple est que le choix de $m_i$ dans $[x_{i-1}, x_i]$ donne toujours une valeur trop petite pour la somme inférieure des aires des rectangles $s$ et que le choix de $M_i$ donne une valeur trop grande. On peut remplacer ces choix en fixant un nombre $r_i$ dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, pour tout $i \leqslant n$.

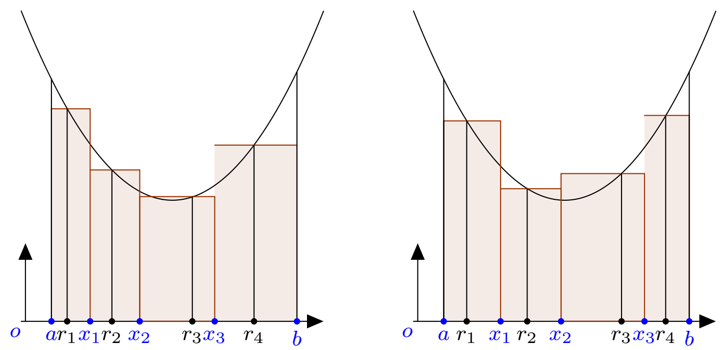
**Définition 3.4.** 1. Un découpage de Riemann de l'intervalle $[a, b]$ est donné par $n - 1$ points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ satisfaisant $a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$ [h], et $n$ points $r_1, \ldots, r_n$ tels que $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \leqslant n$.

h. On pose ici aussi $a = x_0$ et $b = x_n$.

2. On note ce découpage $D = [a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b; r_1, \ldots, r_n]$
3. La largeur $L(D)$ du découpage $D$ ci-dessus est la largeur du découpage $[a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b]$.
4. La somme de Riemann associée à ce découpage et à la fonction $f$ est

$$S_{\mathcal{R}}(D; f) = S_{\mathcal{R}}(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b, r_1, \ldots, r_n, f) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta x_i.$$

Voici deux découpages de Riemann correspondant à $n = 4$, pour la fonction que nous avons considérée plus haut.




Nous pouvons maintenant formaliser la définition d'intégrale de Riemann.

**Définition 3.5** (Intégrabilité)**.** Une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si pour toute suite de découpages de Riemann $D_n$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a, b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} L(D_n) = 0$, la suite $S_{\mathcal{R}}(D_n; f)$ tend vers une limite finie.

**Remarque 3.6.** On peut montrer que si $f$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors toutes les limites correspondant à tous les choix possibles de suites de découpages sont égales. Cela a un intérêt dans les applications. Ceci permet d'introduire la définition d'intégrale de Riemann.

**Définition 3.7.** Si $f$ est une fonction définie et Riemann-intégrable sur $[a, b]$, on appelle *intégrale de Riemann* de $f$ sur $[a, b]$ la valeur commune des limites de $S_{\mathcal{R}}(D_n; f)$ pour toute suite $D_n$ de découpages de Riemann dont la largeur tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. On note cette valeur

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Remarque 3.8.**

1. On peut montrer que dans le cas d'une fonction continue ou monotone sur un intervalle $[a, b]$, les deux notions intégrabilité que nous avons définies sont équivalentes, et les intégrales correspondantes sont égales.
2. Dans ce qui suit, nous utiliserons plus simplement les termes intégrable et intégrale plutôt que Riemann-intégrable et intégrale de Riemann. Cependant, il faut savoir qu'il existe d'autres notions d'intégrabilité et d'intégrale, la plus célèbre étant celle de Lebesgue.
3. Si nous avons motivé au départ l'introduction de la notion d'intégrabilité et de celle d'intégrale comme un calcul d'aire, nous n'avons besoin dans la définition que des valeurs de $f$ qui permettent de définir le nombre $S_{\mathcal{R}}(D_n; f)$ pour tout découpage $D_n$. Dans les applications, il arrive très souvent que ce nombre ait une signification et que l'intégrale, qui en est la limite, soit intéressante indépendemment de toute considération géométrique.
4. Dans l'expression $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la variable $x$ est dite muette. On pourrait très bien noter la même expression $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Les définitions que nous avons données ne nécessitent pas que la fonction $f$ considérée soit continue.

6. On peut montrer des exemples relativement simples de fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ qui ne sont pas intégrables.

D'après la remarque précédente, il est utile de savoir si une fonction est ou non intégrable. Voici un résultat qui nous donne une classe importante de telles fonctions.

**Proposition 3.9.** *Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$. Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Je ne donne maintenant que deux exemples de calcul d'intégrales à partir de la définition. Les propriétés et le lien qui unit les concepts de primitive et d'intégrale nous permettront ensuite de faire les calculs de manière beaucoup plus simple.

**Exemple 3.10.**

1. Calcul de l'intégrale de la fonction constante définie par $f(x) = c$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Cette fonction est continue et donc intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Il suffit de considérer une suite de découpages $D_n$ particuliers dont la largeur tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Pour ce faire, pour tout $n \geqslant 1$, on construit un découpage $D_n$ de l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous-intervalles de même longueur, en posant $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On pose ensuite par exemple $r_i = x_{i-1}$. On obtient directement
   $$\begin{aligned} S_{\mathcal{R}}(D_n; f) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} c(a + i\,\frac{b-a}{n} - (a + (i-1)\,\frac{b-a}{n})) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} = c(b-a), \end{aligned}$$
   comme attendu.
2. Calcul de l'intégrale de la fonction définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Cette fonction est également intégrable. On peut considérer la même suite $D_n$ de découpages que ci-dessus (puisque ce choix n'a pas d'importance). On obtient alors
   $$\begin{aligned} S_{\mathcal{R}}(D_n; f) &= \sum_{i=1}^{n}(a + i\,\frac{b-a}{n})(a + i\,\frac{b-a}{n} - (a + (i-1)\,\frac{b-a}{n})) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a + i\,\frac{b-a}{n})\,\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$
   Cela donne finalement
   $$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$
   qui correspond bien à l'aire du trapèze de hauteur $b - a$ et de bases $a$ et $b$ quand $0 \leqslant a < b$.

Ces exemples démontrent clairement qu'il est nécessaire d'avoir une méthode de calcul pour traiter des fonctions plus compliquées. Donnons d'abord deux définitions supplémentaires et quelques propriétés.

**Définition 3.11.** On pose pour tous $a < b \in \mathbb{R}$ et tout $f$
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les propositions suivantes sont assez naturelles au vu de la définition. Elles découleront aussi de la méthode de calcul des intégrales qui va être exposée sous peu.

**Proposition 3.12** (Linéarité)**.** *Pour toutes fonctions $f$ et $g$ intégrables sur $[a, b]$ et toute constante $c \in \mathbb{R}$, les fonctions $f + g$ et $cf$ sont intégrables, et on a*
$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Proposition 3.13** (Comparaison)**.** *Si $f$ et $g$ sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x\in[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

**Proposition 3.14** (Décomposition)**.** *Si $f$ est définie sur $[a,b]$ et si $c$ est compris strictement entre $a$ et $b$, alors $f$ est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $f$ est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Passons maintenant au théorème fondamental du calcul intégral, qui fait le lien entre intégration et primitivation et permet de calculer aisément les intégrales de fonctions continues sur un intervalle de la forme $[a,b]$. Rappelons tout d'abord que toute fonction $f$ continue sur un intervalle $[a,b]$ admet une primitive sur $]a,b[$ qui est continue sur $[a,b]$. C'est une telle primitive (définie à une constante près) qui est utilisée dans le théorème que voici.

**Théorème 3.15.** *[Théorème fondamental du calcul intégral] Si $f$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et si $F$ est une primitive de $f$ sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

**Remarque 3.16.**

1. On constate que si $G$ est une autre primitive de $f$ sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, alors on a $G(x)=F(x)+c$ pour tout $x\in]a,b[$, où $c$ est une constante, et donc, par continuité en $a$ et en $b$, on a $G(a)=F(a)+c$ et $G(b)=F(b)+c$, qui donne $G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$. Le membre de droite ne dépend donc pas de la primitive choisie (tout comme le membre de gauche, évidemment).
2. Si on ne prend pas soin d'avoir une primitive de $f$ continue sur $[a,b]$, il faut remplacer dans le théorème 3.15 le nombre $F(b)-F(a)$ par $\lim_{x\to b^-}F(x)-\lim_{x\to a^+}F(x)$.
3. La preuve n'est pas difficile. Elle fait usage du théorème des accroissements finis, mais nous commençons tous à trouver que ce module est un peu long.

**Définition 3.17.** Soit $g$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, on définit

$$[g]_a^b = \lim_{x\to b^-} g(x) - \lim_{x\to a^+} g(x)$$

quand ces limites existent et si la différence peut avoir un sens.

Bien sûr quand $g$ est continu à droite en $a$ et à gauche en $b$, on trouve $[g]_a^b = g(b)-g(a)$. Dans tous les cas, cette expression permet d'écrire pour une fonction $f$ continue sur $[a,b]$ le théorème fondamental sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b,$$

où $F$ est une primitive de $f$ sur $]a,b[$.

Le théorème fondamental, encore appelé théorème d'intégration par variation d'une primitive, montre que la connaissance de primitives d'une fonction $f$ permet de calculer son intégrale. Réciproquement, l'intégrale permet d'obtenir une primitive, comme le montre le résultat suivant, corollaire immédiat du théorème fondamental.

**Proposition 3.18.** *Si $f$ est continue sur $]a,b[$, alors pour tout $x_0\in]a,b[$, la fonction $F$ définie par*

$$F:]a,b[\to\mathbb{R}: x\mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est l'unique primitive de $f$ sur $]a,b[$ qui s'annule en $x=x_0$.*