1. Nombres et manipulations algébriques

Dans ce chapitre, nous allons rappeler certains ensembles de nombres : les naturels, les entiers, les rationnels et enfin les réels. Il est étonnamment difficile de donner les définitions exactes de ces ensembles. Nous nous contenterons quand c'est possible d'une définition intuitive, basée sur une approche concrète. Il est important de connaître les propriétés des *opérations* définies sur ces ensembles, et les règles conventionnelles de calcul qui y sont associées. Nous les utiliserons pour faire un peu de calcul mental.[a]

Nous rappellerons ensuite les opérations algébriques classiques que sont les racines, et les puissances à exposants naturels, entiers ou fractionnaires. Nous rappellerons également les célèbres produits remarquables.

1 Nombres

Commençons avec quelques ensembles de nombres. Nous rappelons ici les notations et constructions élémentaires, notamment les nombres négatifs et les fractions. Nous dirons également un mot des nombres irrationnels.

1.1 Les nombres entiers naturels

Les nombres *naturels* forment l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

On a également le sous-ensemble $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Je ne donne pas de définition de nombres naturels, mais on en a une conception intuitive qui suffira pour notre propos[b]. Nous connaissons bien les propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres naturels. Ce sont elles que nous utilisons quand nous calculons (surtout mentalement). Il n'est cependant pas inutile de les formaliser, car elles resteront vraies pour des ensembles de nombres plus compliqués.

Proposition 1.1 (Propriétés de l'addition)**.** *Pour tous* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *on a*

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(L'addition est associative) ;*
2. $a + 0 = 0 + a = a$ *(L'addition admet un neutre 0) ;*
3. $a + b = b + a$ *(L'addition est commutative).*

A cause de l'associativité, on peut donner un sens (le sens habituel) aux expressions de la forme $17 + 23 + 52$, puisque le résultat ne dépend pas du groupement des *termes* en $(17 + 23) + 52$ ou $17 + (23 + 52)$.

Ces propriétés peuvent être utilisées pour effectuer des calculs mentaux élémentaires, en décomposant les nombres que l'on doit additionner. Voici un exemple simple. On a

$$273+349 = (200+70+3)+(300+40+9) = (200+300)+(70+40)+(3+9) = 500+110+12 = 622.$$

Vous avez bien sûr reconnu la décomposition habituelle d'un nombre entier en centaines, dizaines et unités. Cela peut être reproduit pour des nombres plus grands. Le calcul mental pour les additions ne

a. A l'heure des ordinateurs, smartphones, ou calculettes, qui a encore besoin de calcul mental ?, me direz-vous. Je répondrai en vous demandant si vous oserez, en public, ou dans votre cabinet de consultation, sortir votre smartphone pour faire une opération telle que 6×32. De plus, une bonne compréhension des opérations de calcul simples permet une utilisation aisée de l'algèbre.

b. "le nombre 7 est un panier avec sept pommes, sans le panier, et sans les pommes" ou "un plateau de 7 verres, sans le plateau et sans les verres". Le nombre 7 est ce qu'il y a de commun entre ces deux situations.

nécessite alors plus que des additions de nombres entre 0 et 9, qu'il faut bien sûr *connaître par coeur*[c], et un peu d'entraînement.

La multiplication de nombres naturel n'est au départ qu'une façon simple d'écrire certaines additions. En effet, par exemple, on note 3×5 l'addition $5 + 5 + 5$. Nous utiliserons également la notation 3.5 quand $\times$ pourra être confondu avec x ; il faut cependant faire attention à ne pas confondre avec 3,5.

Proposition 1.2 (Propriétés de la multiplication)**.** *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a*

1. $(a.b).c = a.(b.c)$ *(La multiplication est associative) ;*
2. $a.1 = 1.a = a$ *(La multiplication admet un neutre 1) ;*
3. $a.b = b.a$ *(La multiplication est commutative).*

Ces propriétés de la multiplication sont intéressantes et permettent de donner un sens aux expressions du type 3.5.12 qui vaut (3.5).12 ou 3.(5.12). On a aussi des propriétés liant la multiplication et l'addition.

Proposition 1.3 (Distributivité)**.** *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a*[d]

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

et

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

On dit que la multiplication *distribue* l'addition. Ces règles de distributivité sont celles qui permettent d'effectuer rapidement des multiplications de nombres entiers (raisonnables). En effet, on peut calculer facilement

$$8.23 = 8.(20 + 3) = 8.20 + 8.3 = 160 + 24 = 184,$$

ou encore

$$18.47 = 18.40 + 18.7 = 18.40 + 10.7 + 8.7 = 720 + 70 + 56 = 846.$$

On peut ainsi multiplier sans trop de difficulté des nombres à deux chiffres, en utilisant cette technique, pour autant que l'on connaisse par coeur, de manière instantanée et infaillible la fameuse table de multiplication que je reproduis ici. Pour trouver 8×7, allez ligne 8, colonne 7 ou ligne 7 colonne 8, par exemple.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Enfin, il est parfois possible de soustraire et de diviser des nombres entiers, mais pas toujours : dans $\mathbb{N}$, le résultat de l'opération $8 - 17$ ou $7 : 2$ n'est pas défini.

On définit la soustraction et la division dans les nombres entiers à partir des opérations d'addition et de multiplication. En effet, on a $15 - 7 = 8$ parce que $8 + 7 = 15$; $15 - 7$ est le nombre qu'il faut ajouter à 7 pour avoir 15. De manière générale, on peut formaliser cette définition comme suit.

Définition 1.4. Soient a, b deux nombres naturels. Le nombre $c = a - b$ est l'unique nombre naturel satisfaisant $b + c = a$. Il n'existe (dans $\mathbb{N}$) que si a est plus grand que b.

c. C'est la table d'addition.
d. Notez que la deuxième formule peut être obtenue à partir de la première par commutativité.

De la même façon, on peut introduire l'opération de division, qui donne lieu aux quotients de nombres naturels.

Définition 1.5. Soit a un nombre naturel et b un nombre naturel *non nul*. Il existe au plus un nombre naturel c tel que $c.b = a$. Si un tel nombre existe, on l'appelle quotient de a par b et on le note $a : b$.

D'après cette définition, on a donc $18 : 6 = 3$ *parce que* $3 \times 6 = 18$.

Je ne donne donc pas de méthode de calcul pour la soustraction et la division : elle sont intimement liées à celles concernant l'addition et la multiplication : par exemple, sachant que $6 \times 8 = 48$, on déduit (en utilisant la commutativité) que $48 : 6 = 8$ et $48 : 8 = 6$. La table de multiplication est donc aussi une "table de division".

Enfin, terminons cette section en mentionnant une représentation géométrique des nombres naturels. On dessine une demi-droite sur laquelle l'*origine* correspond au nombre 0. On y fixe un autre point qui correspond au nombre 1. On reporte ensuite la même distance pour obtenir les points qui représentent les nombres suivants :

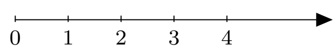


FIGURE 1 – Une représentation des nombres naturels

1.2 Les nombres entiers

Il existe deux grandes extensions (successives) des nombres naturels : les nombres entiers (qui contiennent les nombres négatifs) et les nombres rationnels, qui correspondent aux fractions. Nous allons faire un bref rappel de ces constructions.

On ajoute d'abord les nombres négatifs. L'ensemble $\mathbb{N}$ est alors un sous-ensemble de l'ensemble des nombres entiers (parfois appelés entiers relatifs)

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Je ne ferai pas une longue introduction, ni une justification de toutes les règles de calcul avec les entiers, mais je donne un modèle simple auquel se raccrocher en cas de doute, puis je passe à la définition formelle, et j'en déduis les propriétés.

1.2.1 Un modèle pour les entiers

Pour se donner une idée concrète de ce que représentent les nombres négatifs, on peut penser en termes de dettes et de bénéfices. On peut prendre l'exemple d'un livre de comptes, on celui de mon beau-frère Raoul, qui joue au poker tous les soirs.

Il n'est pas très bon au poker, mais il est organisé, et il note scrupuleusement le résultat financier de ses parties. Il obtient alors le tableau suivant. Il n'a pas noté les unités pour qu'on ne sache pas s'il joue des cacahuètes, des cents ou des euros.

	Lun	Mar	Mer	Jeu	Ven	Sam	Dim	Total
Gain	10		40		10			60
Perte		50		50		10	32	142

(1)

Raoul remarque qu'il n'a pas très bien joué, et se console en contemplant son tableau de gains et de pertes, qui est quand même bien pratique pour savoir où on en est. Il se rend compte qu'il peut faire le compte de ce qu'il a gagné ou perdu de plusieurs manières différentes :

1. Il additionne tous ses gains d'un coté, et reporte 60 sur la ligne des gains, et de l'autre côté reporte 142 sur la ligne des pertes. Au total, il a perdu 82. Le résultat aurait été le même s'il avait totalisé 40 sur la ligne des gains et 122 sur la ligne des pertes.
2. Il remarque que sur les trois premiers jours, ses gains et ses pertes s'équilibrent.

3. Il voit qu'il pourrait finalement n'écrire qu'une ligne en notant par exemple $G10$ pour un gain de 10 et $P50$ pour une perte de 50. Il aurait alors le tableau suivant :

	Lun	Mar	Mer	Jeu	Ven	Sam	Dim	Total
Résultat	$G10$	$P50$	$G40$	$P50$	$G10$	$P10$	$P32$	

(2)

Pour les trois premiers jours, on a alors $G10 + P50 + G40 = 0$.

4. Il constate aussi que ses activités de vendredi et samedi s'équilibrent. On dit que $G10$ et $P10$ sont opposés.
5. Il ne lui reste donc plus que les résultats de jeudi et dimanche et il note $P50 + P32 = P82$, pour dire qu'il a perdu 82.
6. Pour $P10$ ou $G10$, le nombre de cacahuètes (ou d'euros) échangé est 24, on l'appelle *valeur absolue*.

Finalement, on additionne les gains comme des nombres naturels, comme avant donc, et avec les mêmes propriétés. Les propriétés s'étendent assez bien aux pertes. La nouveauté tient au fait que chaque nombre a maintenant un opposé : l'opposé d'un gain est une perte (de même valeur absolue), et l'opposé d'une perte est un gain (de même valeur absolue).

1.2.2 Définition des nombres entiers

On a donc étendu l'ensemble des nombres naturels, et gardé les mêmes propriétés pour l'addition, et la multiplication. Il faut normalement prouver que tout cela est cohérent, et qu'on peut le faire de manière unique. C'est pour cela que la définition est énoncée comme une proposition. La démonstration sort du cadre de ce cours, mais j'espère avoir convaincu le lecteur, avec le modèle concret, qu'il est raisonnable de procéder de la sorte. Bien sûr, pour sortir de l'exemple particulier, on ne note pas les nombres avec un signe G ou un P, mais un signe $+$ ou un signe $-$.

Proposition 1.6. *Il existe un (plus petit) ensemble, noté $\mathbb{Z}$, muni des opérations d'addition $+$ et de multiplication . satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;*
2. *L'addition et la multiplication des entiers naturels sont les opérations que l'on connaît déjà.*

De plus,

3. *$(a + b) + c = a + (b + c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (l'addition est associative) ;*
4. *$a + 0 = 0 + a = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$(l'addition admet un neutre 0) ;*
5. *$a + b = b + a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ (l'addition est commutative) ;*
6. *Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé* l'opposé *de a, tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0, ;$*
7. *$(a.b).c = a.(b.c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (la multiplication est associative) ;*
8. *$a.1 = 1.a = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ (la multiplication admet un neutre 1) ;*
9. *$a.b = b.a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ (la multiplication est commutative).*
10. *on a $a.(b + c) = a.b + a.c$ et $(b + c).a = b.a + c.a$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (distributivité).*

Il ne faut pas être effrayé par cette liste de conditions : nous les connaissons bien. Il est plus important de se focaliser sur ce qui change. Les deux premières conditions sont nouvelles et présentent l'ensemble $\mathbb{Z}$. La condition la plus importante est la condition 6. Il y a aussi un détail qui a son importance : on a demandé toutes ces conditions pour tous les éléments de $\mathbb{Z}$, pour pouvoir calculer comme on le faisait avec les nombres naturels. C'est ce qui va engendrer des propriétés qui n'apparaissent pas directement dans le modèle concret.

Les conditions (1), (2) et (6) impliquent que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est (au moins) l'union des nombres naturels, et de leurs opposés. A priori, il faut encore ajouter les opposés des opposés des naturels et ainsi de suite, mais on a les conséquences suivantes de la définition, qui nous sauvent la mise.

Proposition 1.7.

1. *L'entier 0 est le seul neutre pour l'addition ;*

2. *Tout nombre $a \in \mathbb{Z}$ admet un seul opposé ;*
3. *On a $-(-a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$;*

Démonstration. Supposons avoir un autre nombre a qui serait neutre pour l'addition. Alors on a d'une part $0 + a = a$, car 0 est neutre, et d'autre part $0 + a = 0$ car a est neutre. On obtient donc $a = 0$.

Pour la deuxième condition, choisissons un nombre $a \in \mathbb{Z}$ et supposons qu'il admet pour opposés les nombres a' et a''. On peut alors calculer $a' + a + a''$ (c'est bien défini car l'addition est associative). Mais d'une part, c'est $(a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$, et d'autre part, c'est $a' + (a + a'') = a' + 0 = a'$. On a donc $a' = a''$.

Puisque l'opposé d'un nombre est unique, on doit juste démontrer que a satisfait les conditions pour être l'opposé de $-a$: L'opposé de $-a$ est le seul nombre, appelons le b, satisfaisant $(-a) + b = b + (-a) = 0$. Cette condition est satisfaite par a. □

En utilisant cette proposition, on constate qu'il n'y a pas besoin de fabriquer artificiellement les opposés des nombres $-2, -7, -100$ et de les inclure dans l'ensemble $\mathbb{Z}$: ils y sont déjà, puisqu'on a $-(-100) = 100$, $-(-7) = 7$ etc... On a donc[e]

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

Il faut aussi savoir que les nombres naturels peuvent s'écrire de deux façons : soit comme avant 7, 14, 342, soit précédés du signe + pour bien insister sur appartenance à $\mathbb{N}$. On pourra donc écrire +7, +14 ou +342 si nécessaire. Seul 0 fait exception : il est à la fois positif et négatif.

Il faut encore savoir que les éléments de $\mathbb{N}_0$ sont les *entiers strictement positifs*, et les éléments de $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ sont les *entiers strictement négatifs*. On définit également $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Citons encore un certain nombre de conséquences un peu plus surprenantes de la définition.

Proposition 1.8. *Les propriétés suivantes sont satisfaites dans $\mathbb{Z}$.*

1. *0 est absorbant : on a $0.a = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$;*
2. *La formule $-a = (-1).a$ est valide pour tout $a \in \mathbb{Z}$;*
3. *Si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tels que $a.b = 0$, alors soit $a = 0$, soit $b = 0$.*

Démonstration. Soit a un nombre. On a $1.a = a$. On a aussi $(1 + 0).a = 1.a = a$ (car $1 + 0 = 1$). Mais par distributivité, on a

$$a = (1 + 0).a = 1.a + 0.a = a + 0.a$$

On peut ajouter $-a$ aux deux membres de cette égalité, et on obtient le résultat demandé : $0.a = 0$.

Pour la deuxième propriété, étant donné un nombre $a \in \mathbb{Z}$, il faut montrer que $(-1).a$ satisfait les conditions pour être l'opposé de a. Mais on a, encore par distributivité :

$$a + (-1).a = (1.a + (-1).a) = (1 + (-1)).a = 0.a = 0,$$

en utilisant la définition de -1 pour l'avant dernière égalité et le fait que 0 est absorbant pour la dernière. EN utilisant la commutativité de l'addition, on a aussi $(-1).a + a = 0$, ce qui achève la preuve, vu l'unicité de l'opposé de a. □

Je ne démontre pas la dernière propriété car elle fait intervenir une définition plus constructive des nombres entiers, que je n'ai pas donnée. Elle deviendra assez claire une fois que l'on aura les fractions à notre disposition.

1.2.3 Quelques calculs et quelques règles

Il est maintenant largement temps de faire quelques calculs. Quand on a des nombres -15, -4, 7 etc... on peut donc les additionner et les multiplier. Il y a deux façons de faire : soit on se réfère au modèle concret, et on obtient le résultat de manière intuitive, sauf pour la multiplication de nombres négatifs, soit on applique la définition ou ses corollaires, qui sont des règles de calcul et on obtient le résultat dans tous les cas. Il est utile de les connaître toutes les deux : le modèle concret est plus simple, et permet de ne pas se tromper, mais il est plus long à mettre en oeuvre surtout dans des expressions compliquées. Il est de plus difficile à utiliser dans des expressions littérales, où les nombres

e. Ce n'est pas la façon usuelle de l'écrire, mais c'est équivalent.

sont remplacés par des lettres (on peut toujours l'utiliser en remplaçant les lettres par des nombres arbitraires mais cela va être très, très long). Dans ce dernier cas, il vaut mieux utiliser les propriétés des opérations qui découlent de la définition.

1. *Addition de nombres positifs* : D'après la définition, on fait comme avant, dans les nombres naturels : on a
$$15 + 17 = 32,$$
que 15 et 17 soient considérés comme des nombres naturels, ou comme des nombres entiers positifs. C'est conforme au modèle concret : un gain de 15 suivi d'un gain de 17 donne un gain de 32.
2. *Addition de nombres négatifs* : Calculons $(-15)+(-17)$. Selon le modèle concret, on a une perte de 15 et une perte de 17. Cela donne une perte totale de 32, et donc on a [f]
$$-15 + (-17) = -32.$$
Vérifions-le à partir de la définition ou de ses conséquences. Il y a plusieurs façons de le voir : premièrement, on a
$$(-15 + (-17)) + 32 = (-15) + (-17) + (15 + 17) = (-15 + 15) + (-17 + 17) = 0,$$
ce qui montre que $-15 + (-17)$ est l'opposé de 32, c'est à dire -32. Une autre façon de le voir est d'utiliser la distributivité : on a
$$-15 + (-17) = (-1).15 + (-1).17 = (-1).(15 + 17) = (-1).32 = -32.$$
3. *Addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif (I)* : On applique le même principe que plus haut pour calculer la somme de 17 et de -15. On a, en utilisant la définition,
$$17 + (-15) = (15 + 2) + (-15) = (15 + (-15)) + 2 = 0 + 2 = 2.$$
C'est conforme au modèle concret : un gain de 17, suivi d'une perte de 15, donnent un gain total de 2. Remarquons que nous aurions pu écrire, puisque 17 et plus grand que 15, par définition de la soustraction dans les nombres naturels :
$$17 + (-15) = (15 + (17 - 15)) + (-15) = 17 - 15.$$
4. *Addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif (II)* : Passons maintenant au calcul de la somme de -17 et 15. On procède encore de la même façon, en appliquant la définition, et ce que nous avons vu sur la somme de deux entiers négatifs. On a
$$(-17) + 15 = ((-15) + (-2)) + 15 = (-15 + 15) + (-2) = -2.$$
C'est bien sûr conforme à notre modèle concret : Une perte de 17 suivi d'un gain de 15 donnent une perte totale de 2.

Si on veut vraiment formaliser ces additions, il faut faire appel à la notion de valeur absolue. Elle est heureusement facile à définir.

Définition 1.9. Pour $a \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue de a, notée $|a|$, est le nombre positif (entier naturel) parmi a et $-a$.

On a donc par exemple $|7| = 7$ et $|-3| = 3$. Un nombre entier est donc univoquement déterminé par sa valeur absolue et son signe, 0 étant le seul nombre dont la valeur absolue est 0.

Proposition 1.10. *Soient a, b deux nombres entiers.*

1. *Si a et b sont de même signe, alors $a + b$ a ce signe et on a $|a + b| = |a| + |b|$.*
2. *Si a et b sont de signe contraire, si ils ont la même valeur absolue, alors $a + b = 0$. Sinon, si $|a| > |b|$, alors $a + b$ a le même signe que a et $|a + b| = |a| - |b|$. Le dernier cas se traite de manière symétrique.*

f. On met des parenthèses car les signes + et − ne peuvent pas se suivre.

Passons maintenant au produit de nombres entiers.

1. *Produit de deux entiers positifs* : On fait comme avant (dans les nombres naturels), comme indiqué dans la définition.
2. *Produit d'un nombre positif par un négatif* : d'après notre modèle, $3 \times (-5)$ correspond à trois pertes de 5, ou encore $(-5) + (-5) + (-5)$. On a donc
$$3 \times (-5) = -15.$$
On peut aussi le montrer à l'aide de la définition ou de ses conséquences, on a
$$3 \times (-5) = 3 \times ((-1) \times 5) = (-1) \times (3 \times 5) = -15.$$
3. *Produit de deux nombres négatifs* : C'est le seul point qui n'est pas pris en compte par le modèle concret. Calculons $(-3) \times (-5)$. On a par exemple
$$(-3) \times (-5) = (-1) \times (3 \times (-5)).$$
Donc $(-3) \times (-5)$ est l'opposé de $3 \times (-5) = -15$ et vaut donc 15. On a donc sur cet exemple montré la célèbre formule :

"Moins par moins donne plus."

Notons que nous avons constaté également sur l'exemple précédent.

"Moins par plus donne moins."

Formalisons ces constatations dans un théorème, dont la démonstration suit les mêmes lignes que celles des exemples précédents. Ce théorème sera fondamental quand il s'agira d'étudier le signe d'expressions algébriques.

Théorème 1.11. *Dans $\mathbb{Z}$, le produit de deux nombres de même signe est un nombre positif, tandis que le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.*

Avant de formaliser ces constatations dans des règles de calcul dans $\mathbb{Z}$, étendons à $\mathbb{Z}$ la définition que nous avons adoptée pour la soustraction et la division.

Définition 1.12. Soient a, b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Le nombre $c = a - b$ est l'unique nombre entier satisfaisant $b + c = a$. Il existe toujours puisqu'on a
$$a - b = a + (-b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

C'est donc la même définition, mais avec un changement important : la différence des nombres a et b est toujours définie. Il est aussi important de remarquer que cette définition s'applique à tous les nombres entiers, et pas seulement aux positifs. On a donc par exemple
$$18 - 7 = 18 + (-7) = 11, \quad 18 - (-34) = 18 + 34 = 52, \quad -18 - (-34) = -18 + 34 = 16,$$
et
$$-18 - 34 = -18 + (-34) = -52, \quad 18 - 34 = 18 + (-34) = -16.$$
On peut remarquer que dans $-18 - 34$, les deux signes $-$ n'ont pas la même origine : le premier permet de désigner l'opposé du nombre 18, tandis que le deuxième désigne la soustraction de deux nombres entiers. Cela n'engendre pas de confusion si on tient compte de la priorité des opérations, dont nous reparlerons plus tard.

La division ne donne pas lieu ici à de nouvelles propriétés, mais on doit quand même l'étendre à l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Définition 1.13. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}_0$. Il existe au plus un nombre naturel c tel que $c.b = a$. Si un tel nombre existe, on l'appelle quotient de a par b et on le note $a : b$. L'opération " :" est appelée division.

Voici quelques exemples.

$$18 : 3 = 6, \quad (-18) : 3 = -6, \quad 18 : (-3) = -6, \quad (-18) : (-3) = 6.$$

On peut vérifier chacune de ses divisions en se ramenant à la définition. Par exemple, pour la dernière, le résultat est obtenu en constatant que $6.(-3) = -18$.

On peut aussi se demander pourquoi j'ai mis des parenthèses (nous y reviendrons plus en détail). Dans les calculs ci-dessus, $(-18) : 3$ représente le quotient de l'entier -18 par l'entier 3, si on avait écrit $-18 : 3$, on aurait aussi pu l'interpréter comme $-(18 : 3)$, à savoir l'opposé du quotient de 18 par 3. Cela n'a pas d'importance car le résultat est toujours -6. Nous pourrons donc écrire $-18 : 3$ sans parenthèses.

Rassemblons toutes ces constatations dans une proposition, qui peut bien sûr être démontrée.

Proposition 1.14.

1. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{Z}$, *on a* $-(a + b) = (-a) + (-b)$ *;*
2. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{Z}$, *on a* $-(a - b) = ((-a) + b) = b - a$ *;*
3. *Pour tous* $a, b \in \mathbb{Z}$, *on a* $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$ *;*
4. *Pour tous* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}_0$, *on a* $(-a) : b = a : (-b) = -(a : b)$, *pour autant que l'un de ces quotients existe (auquel cas ils existent tous), et en particulier, on a*[g] $(-a) : (-b) = a : b$.

On peut prolonger la représentation géométrique que nous avons donnée pour les nombres naturels (voir figure 1). C'est une question de conventions, mais il y a des raisons pour représenter les nombres entiers de la sorte. On positionne les nombres négatifs de sorte qu'un nombre et son opposé soient placés de manière symétrique par rapport à 0 comme indiqué à la figure 2 :

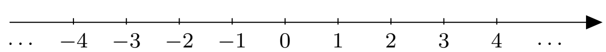


Figure 2 – Une représentation des nombres entiers.

1.3 Nombres rationnels

L'introduction des entiers, donc de l'ensemble $\mathbb{Z}$, permet de modéliser des situations plus variées (gains et pertes, températures, etc...) que ce que nous pouvions faire avec les seuls entiers naturels. Cela a permis aussi de définir la soustraction de deux nombres quelconques, ce qui peut être un avantage dans beaucoup de calculs.

On peut cependant remarquer de manière pragmatique qu'il y a encore beaucoup de "trous" dans notre représentation géométrique des nombres. De manière équivalente, la division n'est pas définie pour tous les nombres entiers : dans $\mathbb{Z}$, $3 : 2$ n'est pas défini. En particulier, si on doit, pour résoudre un problème, chercher un (ou plusieurs) nombre(s) x satisfaisant $3x - 2 = 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Ceci justifie l'extension suivante de l'ensemble des nombres entiers, qui mènera à l'ensemble des nombres rationnels.

Cet ensemble aura une structure plus riche que celle de $\mathbb{Z}$, puisque tout élément non nul y admettra un inverse pour la multiplication.

1.3.1 Un modèle simple pour les nombres rationnels

Vous connaissez ce modèle simple depuis l'école primaire. Il s'agit des fractions. On visualise les fractions comme des parts de tarte. Cela dit, les tartes, c'est rond, donc on ne visualise pas bien. Je vous suggère donc d'utiliser des gâteaux rectangulaires pour visualiser des fractions. Cela permet de visualiser aisément l'égalité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Passons sans plus de formalités au rappel des opérations sur les fractions.

g. Donc "moins par moins donne plus", ici aussi.

Pour additionner les fractions, on commence par le cas simple : celui où les fractions ont même dénominateur. Pour $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}_0$, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{(a+c)}{b} = \frac{a+c}{b},$$

et

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{(a-c)}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Attention : les “barres de fraction” cachent des parenthèses (implicites).

On traite ensuite le cas compliqué : celui où les dénominateurs différents. On se ramène au cas précédent via l'équivalence des fractions : pour $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}_0$, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} + \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d + c\,b}{b\,d}.$$

De même on a

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} - \frac{c\,b}{d\,b} = \frac{a\,d - c\,b}{b\,d},$$

pour tous $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}_0$.

On peut multiplier des fractions par des nombres entiers ou même par d'autres fractions. Sans entrer dans les détails, et en supposant que toutes les expressions qui suivent sont définies, on a

$$r.\frac{a}{b} = \frac{r.a}{b}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

et

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}.$$

En ce qui concerne la division, on généralise la définition de la division des nombres entiers. On tient alors compte de la relation

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1$$

et on constate que la division par une fraction non nulle est toujours définie et qu'on a de manière générale

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}.$$

En particulier, puisque tout nombre entier est une fraction, on a aussi :

$$(\frac{a}{b}) : r = \frac{a}{b\,r}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}_0.$$

1.3.2 Définition formelle des rationnels

Passons maintenant à une définition, qui est ici encore exprimée sous forme de résultat mathématique, car il faut vérifier que ce que l'on désire de manière intuitive peut effectivement être défini de manière cohérente. La démonstration dépasse ici encore le cadre du cours.

Proposition 1.15. *Il existe un (plus petit) ensemble, noté $\mathbb{Q}$, muni d'une opération d'addition $+$ et de multiplication . satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;*
2. *L'addition et la multiplication des entiers sont les opérations que l'on connaît déjà.*

De plus,

3. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *pour tous* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *(l'addition est associative) ;*
4. $a+0 = 0+a = a$ *pour tout* $a \in \mathbb{Q}$*(l'addition admet un neutre 0) ;*
5. $a+b = b+a$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{Q}$ *(l'addition est commutative) ;*
6. *Pour tout* $a \in \mathbb{Q}$*, il existe un nombre noté* $-a$ *et appelé* l'opposé *de* a*, tel que* $a + (-a) = (-a) + a = 0, ;$
7. $(a.b).c = a.(b.c)$ *pour tous* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *(la multiplication est associative) ;*

8. *$a.1 = 1.a = a$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$ (la multiplication admet un neutre 1) ;*
9. *$a.b = b.a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$ (la multiplication est commutative).*
10. *Pour tout nombre $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, il existe un nombre noté $\frac{1}{a}$ et appelé* l'inverse *de a, tel que $a.(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}).a = 1, ;$*
11. *on a $a.(b+c) = a.b + a.c$ et $(b+c).a = b.a + c.a$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (distributivité).*

Ici encore, la liste des propriétés ne doit pas vous effrayer, ce sont exactement les mêmes que celles dans $\mathbb{Z}$, à deux différences près : la condition (10) est nouvelle, et toutes les conditions sont imposées pour les éléments de $\mathbb{Q}$.

Concrètement, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est construit à partir des fractions. Il faut simplement considérer que les fractions équivalentes déterminent le même nombre rationnel. On peut donc écrire

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0\},$$

en gardant en tête que tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit alors de plusieurs façons comme une fraction.

1.4 Nombres réels

Nous venons de définir des ensembles de nombres qui permettent, dans la représentation géométrique de bien remplir la droite. Cependant, il manque encore certains nombres qui apparaissent dans des problèmes géométriques simples par exemple. Si on trace un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont de longueur unitaire (1 mètre pour fixer les idées), alors le théorème de Pythagore (dont nous reparlerons) permet de démontrer que la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est un nombre positif x tel que $x.x = 2$. On peut démontrer qu'un tel nombre ne peut pas s'écrire comme une fraction (ce fait est connu depuis Pythagore). Un tel nombre peut cependant être approché aussi près que l'on veut par des nombres rationnels plus petits ou plus grands. On dit que c'est un nombre réel, mais irrationnel. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais citons simplement qu'un nombre réel est un nombre admettant un développement décimal éventuellement illimité, et éventuellement non périodique. Parmi les nombres réels, les rationnels sont ceux qui admet un développement décimal limité ou illimité et périodique. Citons comme exemple de nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et tous ses multiples rationnels, $\sqrt{3}$ et tous ses multiples rationnels, π, e... On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_0$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On a donc construit les ensembles par inclusions successives :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

et on a aussi étendu successivement les opérations, du plus petit au plus grand ensemble, en préservant les propriétés importantes, que nous rappelons ici.

Proposition 1.16. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération d'addition $+$ et de multiplication $.$ satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;*
2. *L'addition et la multiplication des rationnels sont les opérations que l'on connaît déjà.*

De plus,

3. *$(a+b)+c = a+(b+c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (l'addition est associative) ;*
4. *$a+0 = 0+a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$(l'addition admet un neutre 0) ;*
5. *$a+b = b+a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (l'addition est commutative) ;*
6. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé* l'opposé *de a, tel que $a+(-a) = (-a)+a = 0, ;$*
7. *$(a.b).c = a.(b.c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (la multiplication est associative) ;*
8. *$a.1 = 1.a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (la multiplication admet un neutre 1) ;*
9. *$a.b = b.a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (la multiplication est commutative).*
10. *Pour tout nombre $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un nombre noté $\frac{1}{a}$ et appelé* l'inverse *de a, tel que $a.(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}).a = 1, ;$*

11. on a $a.(b+c) = a.b + a.c$ et $(b+c).a = b.a + c.a$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (distributivité).

Remarque 1.17. Ici encore, il n'est pas utile d'étudier tout cela par coeur : ce sont les mêmes conditions que pour les rationnels.

J'attire votre attention sur la propriété 11. Elle permet de distribuer un facteur sur les termes d'une somme, quand on la lit de gauche à droite. Ce n'est généralement pas le sens le plus utile. Si on la lit de droite à gauche, elle permet de *mettre en évidence* le facteur commun au deux termes de la somme. Cela simplifie généralement les expressions algébriques que l'on considère en les exprimant comme un produit.

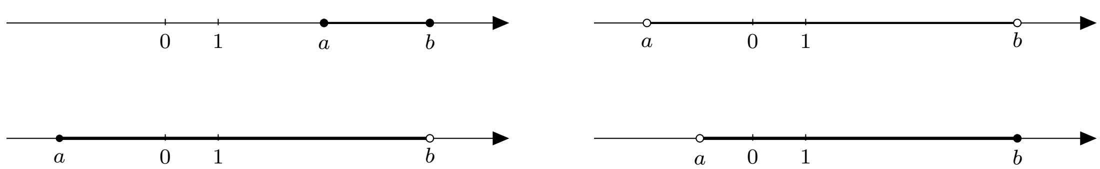
Il est clair que toutes les conséquences que nous avons tirées dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Q}$ de ces propriétés restent vraies dans $\mathbb{R}$. Nous n'en obtiendrons pas de nouvelles comme nous l'avons fait dans le cas des deux extensions précédentes, puisque les nombres que nous avons ajouté n'ont rien de particulier.

Pour nous consoler, nous introduisons quelques sous-ensembles particuliers de nombres réels et les puissances de nombres réels, puis nous énonçons et démontrons de nouvelles propriétés, qui sont valables pour tous les nombres réels, et que nous aurions pu donner plus tôt dans le cadre des entiers ou des rationnels.

Définition 1.18. Soient $a < b$ deux nombres réels. On définit les *intervalles*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé) ;
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert) ;
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ (intervalle semi-ouvert) ;
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ (intervalle semi-ouvert).

Ces intervalles sont tous bornés. Ils sont traditionnellement représentés sur la droite réelle comme suit :



Il y a également des intervalles non bornés :

Définition 1.19. Soient a un nombre réel. On définit les intervalles ouverts

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad \text{et} \quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

et les intervalles fermés

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \quad \text{et} \quad]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}.$$

Les représentations graphiques présentées ci-dessus s'étendent bien entendu aux intervalles non bornés. Passons maintenant aux produits remarquables.

Proposition 1.20. *Les identités suivantes sont valables pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$;
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

Démonstration. Il suffit d'utiliser la propriété de distributivité à plusieurs reprises dans tous les cas. Traitons le premier : nous considérons des nombres réels a et b et nous posons $A = a + b$. Le membre de gauche est donc égal à $A(a+b)$. On a donc au total, en utilisant la distributivité

$$(a+b)^2 = A(a+b) = Aa + Ab = (a+b)a + (a+b)b.$$

On continue à développer par distributivité et on a

$$(a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2,$$

et la preuve de ce cas est terminée. □

Plus généralement, on a la formule suivante, parfois appelée règle de la double distributivité.

Proposition 1.21. *On a*
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$
pour tous réels a, b, c, d.

Mentionnons également les identités concernant les cubes.

Proposition 1.22. *Les identités suivantes sont valables pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *;*
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *;*
3. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ *;*
4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ *;*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la distributivité pour développer le membre de l'identité qui s'exprime comme un produit. Considérez que c'est un exercice. □

Il est également utile d'étendre la définition de la valeur absolue aux nombres réels.

Définition 1.23. Si a est un nombre réel, on appelle valeur absolue de a le nombre positif dans $\{-a, a\}$. On la note $|a|$.

On a donc $|a| = a$ si et seulement si a est positif ou nul. On a $|a| = -a$ si et seulement si a est négatif ou nul. On peut résumer ces informations de la manière suivante
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0; \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$$
D'un point de vue géométrique, quand les nombres réels sont représentés sur une droite, on se rend compte que la valeur absolue de a représente la distance (euclidienne) de a à 0. De manière plus générale, si a et b sont deux nombres réels, on voit que $|b-a|$ représente la distance de a à b. La proposition suivante montre que la valeur absolue a bien des propriétés qu'on souhaite pour pouvoir définir une distance, nous y reviendrons plus tard.

Proposition 1.24.

1. *On a* $|a| \geqslant 0$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *;*
2. *On a* $|a| = 0$ *si et seulement si* $a = 0$ *;*
3. *Pour tous* a, b *réels, on a* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

En ce qui concerne la valeur absolue d'un produit :

Proposition 1.25. *Pour tous réels* a *et* b*, on a* $|a\,b| = |a|\,|b|$.

La valeur absolue permet d'exprimer facilement certains ensembles de nombres.

- Pour tout $a > 0$, on a $\{x \in \mathbb{R} : |x| < a\} =]-a, a[$;
- Pour tout $a > 0$, on a $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\} =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$;

Si on remplace les inégalités strictes $<$ par des inégalités larges $\leqslant$, alors les intervalles ouverts sont remplacés par les intervalles fermés correspondants. De plus De plus si a est strictement négatif, le premier ensemble est vide tandis que le deuxième est égal à $\mathbb{R}$.

2 Puissances entières

2.1 Puissances à exposant naturel et notation scientifique

Voici la définition des puissances à exposant naturel.

Définition 2.1. Pour tout nombre a et tout naturel $n \in \mathbb{N}_0$, on a
$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$
On pose de plus $a^0 = 1$, pour $a \neq 0$. Dans l'expression a^n, a est la *base* et n est *l'exposant*.

Pour $a = 0$ et $n \neq 0$, la définition donne $a^n = 0$. Il est alors facile de démontrer les propriétés suivantes, pour des bases non nulles.

Proposition 2.2. *Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. *si* $m \geqslant n$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
4. $(ab)^m = a^m b^m$.

Démonstration. Il suffit dans tous les cas de revenir à la définition. Pour le premier cas, on a par exemple

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

On a donc un produit de $m+n$ facteurs égaux à a. Ce nombre est par définition a^{m+n}. Les autres cas se traitent de la même manière, en utilisant la commutativité de la multiplication pour le dernier. □

Remarque 2.3. Il est important de noter que ces identités se lisent dans les deux sens : de gauche à droite et de droite à gauche, selon l'utilisation que l'on veut en faire. Par exemple, la dernière implique que l'on peut transformer 18^4 en $2^4 \cdot 9^4$ si c'est utile, mais que l'on peut aussi transformer $2^4 \cdot 9^4$ en 18^4, si on en a besoin.

Ces propriétés sont particulièrement utiles quand on considère des puissances de 10, puisque nous comptons généralement dans le système décimal. Cela donne lieu à la notation scientifique (pour les nombres supérieurs à 1 ou inférieurs à -1). On constate en effet que

$$100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \ldots \qquad 1000\,000 = 10^6, \quad 1000\,000\,000 = 10^9, \text{ etc.}$$

On peut alors écrire [h] $200 = 2 \times 10^2$, 7millions $= 7 \times 10^6$, mais aussi $3400 = 3,4 \times 1000 = 3,4 \times 10^3$, $-27000 = -2,7 \times 10^4$ ou $-340 = -3,4 \times 10^2$ etc...

Définition 2.4. Pour tout nombre x tel que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$, il existe un nombre a tel que $1 \leqslant a < 10$ et un naturel n tel que

$$x = a \times 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la *mantisse*, et n l'*exposant*.

La notation scientifique est fréquemment utilisée en sciences pour noter des grands nombres et connaître directement leur *ordre de grandeur*. Elle permet également de multiplier facilement de tels nombres.

Remarque 2.5. Il est important de pouvoir passer facilement de la notation classique à la notation scientifique et vice-versa. Ici encore il y a deux sens de transformation et cela peut engendrer des erreurs. Bien sûr, il s'agit simplement de multiplier ou de diviser par des puissances de 10, ce qui se fait bien sûr en déplaçant la virgule.

Voici quelques exemples et exercices résolus. A faire

2.2 Puissances à exposants entiers et notation scientifique

Nous venons de voir la notation scientifique pour les grands nombres. Il semble utile de l'étendre aux nombres dont la valeur absolue est comprise entre 0 et 1. L'idée est de compléter la suite des puissances de 10

$$1 = 10^0, \quad 10 = 10^1, \quad 100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \quad 10\,000 = 10^4, \quad 100\,000 = 10^5 \ldots$$

en incluant les fractions

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \quad \frac{1}{100} = 10^{-2}, \quad \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \quad \frac{1}{10\,000} = 10^{-4}, \quad \frac{1}{100\,000} = 10^{-5}, \ldots$$

h. En tenant compte de la priorité des opérations, voir plus bas.

que l'on peut lire

$$0,1 = 10^{-1}, \quad 0,01 = 10^{-2}, \quad 0,001 = 10^{-3}, \quad 0,0001 = 10^{-4}, \quad 0,00001 = 10^{-5}, \ldots$$

Cela permet d'écrire par exemple $0,00043 = 4,3 \times 10^{-4}$, et suggère la définition générale.

Définition 2.6. Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Remarque 2.7. Cette notation avec des exposants négatifs est également utilisée en sciences pour les unités. Par exemple, on peut note les unités des l'accélération par $m.s^{-2}$ et il s'agit de mètres par secondes au carré ($\frac{m}{s^2}$).

Notons également que la définition de a^{-n} indique que les nombres a^{-n} et a^n sont inverses l'un de l'autre. On a donc directement la relation

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}},$$

pour $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les propriétés des exposants entiers sont identiques à celles des exposants naturels.

Proposition 2.8. *Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
4. $(ab)^m = a^m b^m$.

La seule différence avec la proposition 2.2 est la disparition de la condition pour la troisième relation, puisque $m - n$ est toujours défini pour m et n dans $\mathbb{Z}$. On prouve ces relations en revenant à la définition et en distinguant selon les signes de m et n.

On peut alors prolonger la notation scientifique pour des nombres compris entre -1 et 1. On a la même définition, à un détail près, que je vous laisse chercher.

Définition 2.9. Pour tout nombre x non nul, il existe un nombre a tel que $1 \leqslant a < 10$ et un entier n tel que

$$x = a \times 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la *mantisse*, et n l'*exposant*.

3 Priorité des opérations

Quand on a plusieurs additions à effectuer, l'associativité de l'opération d'addition permet de donner une valeur unique à l'expression $3 + 7 + 18 + \pi$, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les additions de deux termes. Il en est de même pour les multiplications du type 18.7.4.22. Quand on mélange des opérations, ce n'est plus le cas. En effet, si on considère l'expression $3.17 + 8$, on peut a priori effectuer la multiplication puis l'addition, ou l'addition puis la multiplication. Dans le premier cas, on obtient 59, et dans le deuxième 75. Il faut donc décider d'une *convention* pour ordonner ces opérations. Il en va de même pour les exposants, puisque 3.10^4 donne des résultats différents selon que l'on évalue le produit d'abord ou l'exposant d'abord. Il en va de même pour des expressions de la forme $12 - 6 + 4$, ou $12 : 6.4$.

Nous avons la liste de règles suivantes.

1. **Règle pour additions et soustractions** La règle pour évaluer l'expression $12 - 6 + 4$ est dictée par le sens commun. J'ai 12 euros, j'en perds 6, puis j'en regagne 4. Le résultat de l'évaluation est donc 10, et correspond à $(12 - 6) + 4$, où les parenthèses indiquent des "blocs" à évaluer en premier.

   Règle 3.1. *Dans une expression ne contenant que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite. On peut toutefois modifier l'ordre des termes, à condition de les déplacer avec le signe qui les précède.*

Par exemple, on peut effectuer le calcul suivant :

$$17 - 3 + 34 - 10 = 14 + 34 - 10 = 48 - 10 = 38,$$

mais on a aussi

$$17 - 3 + 34 - 10 = 17 + 34 - 3 - 10.$$

Ce n'est pas étonnant, puisqu'une soustraction n'est qu'une addition déguisée : on a

$$17 - 3 + 34 - 10 = 17 + (-3) + 34 + (-10).$$

Par contre, on n'aurait pas eu le même résultat en évaluant d'abord $3 + 34 - 10 = 37$ et en soustrayant le résultat de 17.

2. **Règle pour les multiplications et divisions** En règle générale, les mathématiciens écriront fort peu souvent des expressions du type $12 : 6.4$. Convenons cependant que cette expression n'est pas très éloignée de $12 - 6 + 4$, que nous venons de traiter. Nous adoptons donc exactement la même convention.

   Règle 3.2. *Dans une expression ne contenant que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite. On peut toutefois modifier l'ordre des termes, à condition de les déplacer avec le signe qui les précède.*

   Il faut cependant remarquer en permutant les facteurs de l'opération, avec leur signe, qu'on ne commence en général pas par une division. On a donc

$$12 : 6.4 = 2.4 = 8,$$

   et aussi

$$12 : 6.4 = 12.4 : 6.$$

   Ici encore, ce n'est pas étonnant puisque la division est une multiplication déguisée :

$$12 : 6.4 = 12.\left(\frac{1}{6}\right).4.$$

3. **Règle concernant l'addition et la multiplication** La règle est assez simple en ce qui concerne les expressions du type $4.7 + 6$.

   Règle 3.3. *Dans une expression ne contenant que des multiplications/divisions et des additions/soustractions, on effectue les multiplications/divisions d'abord.*

   Par exemple, on a $4.7 + 6 = 28 + 6 = 34$, ou encore $52 : 4 + 5 = 13 + 5 = 18$. Ou de même $6 + 4.7 = 6 + 28 = 34$, et $5 + 52 : 4 = 13 + 5 = 18$

4. **Règles concernant les puissances** On rencontre assez fréquemment en sciences des expressions du type $3,5.10^6 - 2.10^4$, ou 3.10^2. On doit aussi donner une règle de priorité pour effectuer les opérations (essayez avec 3.10^2 de multiplier d'abord ou de calculer l'exposant d'abord). On convient d'effectuer d'abord les exposants.

   Règle 3.4. *Dans une expression ne contenant des puissances (exposants) et d'autres opérations, on évalue d'abord les puissances.*

5. **Règle concernant les parenthèses** Il arrive que l'on veuille effectuer des opérations dans un ordre différent de celui qui est prescrit par les règles qui viennent d'être énoncées. Comme nous l'avons déjà fait, on utilise des parenthèses pour redéfinir l'ordre, au moyen de la règle suivante.

   Règle 3.5. *Dans une expression contenant des parenthèses, on effectue d'abord les opérations dans les parenthèses. Cette règle s'applique à plusieurs reprises s'il y a plusieurs parenthèses emboîtées.*

   On a par exemple $(3 + 6).5 = 9.5 = 45$. D'autre part, dans l'expression $(3.4) + 5$, les parenthèses sont inutiles, puisque la multiplication doit être effectuée en premier, que les parenthèses soient présentes ou non. On a aussi, en appliquant

$$((14 - (17 - 5.3).2).3 = (14 - (2).2).3 = 10.3 = 30.$$

6. **Parenthèses implicites** Certains symboles mathématiques impliquent un usage de parenthèses implicites. C'est le cas de la barre de fraction horizontale. On a donc

$$\frac{18}{4+2} = \frac{18}{(4+2)} = \frac{18}{6} = 3.$$

   Cela a des implications importantes en termes de simplifications des fractions. En effet, dans la fraction $\frac{16}{4+2}$, on ne peut pas simplifier le 16 et le 4, pour écrire $\frac{4}{1+2}$, parce qu'on doit d'abord effectuer la somme au dénominateur. Cela paraît évident, mais cela l'est peut-être moins avec des expressions littérales du type $\frac{x}{x^2+1}$: on ne peut pas simplifier !

   La même remarque vaut pour les racines (voir plus bas) : on a par exemple $\sqrt{9+3} = \sqrt{(9+3)}$, donc on *ne peut pas* écrire que cette expression vaut $\sqrt{9}+3 = 6$!

Cette liste de règles semble longue à retenir, mais voici un moyen mnémotechnique : retenez

P E (M D) (A S) :

Parenthèses puis Exposants puis Multiplications et Divisions puis Additions et Soustractions, sans oublier les parenthèses implicites.

4 Racines et exposants fractionnaires

Rappelons ici les définitions et propriétés des racines, en commençant par la plus célèbre, la racine carrée (positive).

4.1 La racine carrée

Définition 4.1. La racine carrée du nombre réel a est l'unique nombre *positif* x satisfaisant $x^2 = a$. Elle est notée $\sqrt{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

La précision sur le signe du nombre x dans la définition est nécessaire, car si x est tel que $x^2 = a$, alors $-x$ a également cette propriété.[i] Voici également quelques exemples : $\sqrt{25} = 5$ car 5 est positif et $5^2 = 25$, de même $\sqrt{121} = 11$ car 11 est positif et $11^2 = 121$.

Les racines carrées se comportent bien vis à vis des produits, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.2. *Pour tous $a, b \geqslant 0$, on a*

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
2. *si* $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration. Par définition, $\sqrt{ab}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut ab. Il suffit de montrer que $\sqrt{a}\sqrt{b}$ a également ces propriétés. Il est positif car $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ le sont et on a

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

On prouve la deuxième égalité de la même manière. □

Proposition 4.3. *Pour tout nombre réel a, on a*

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

4.2 La racine cubique

Définition 4.4. La racine cubique du nombre réel a est l'unique nombre réel x satisfaisant $x^3 = a$. Elle est notée $\sqrt[3]{a}$. Elle existe toujours.

i. C'est ce qui conduit à l'erreur classique qui consiste à écrire par exemple $\sqrt{25} = \pm 5$.

4.3 Racines p-èmes

Les racines carrées et cubiques sont les prototypes pour les racines p-èmes, où p est un naturel supérieur ou égal à 2. Sans surprise, les définitions diffèrent quelque peu selon que p est pair ou impair.

Définition 4.5 (Racines p-èmes, p pair)**.** Si p est pair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre *positif* x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

Définition 4.6 (Racines p-èmes, p impair)**.** Si p est impair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle existe toujours.

Voici les propriétés classiques des racines. Leur expression algébrique est la même que p soit pair ou impair, mais leur domaine d'application n'est pas le même. C'est ce qui explique la longueur de ce résultat.

Proposition 4.7.

1. *Si p est naturel pair,*
   - *On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \geqslant 0$;*
   - *On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \geqslant 0$, $b > 0$;*
2. *Si p est naturel impair,*
   - *On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$;*
   - *On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$;*
3. *Si p ou q est pair, on a*
$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \textit{pour tout } a \geqslant 0.$$
4. *Si p et q sont impairs, on a*
$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \textit{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

4.4 Exposants fractionnaires

Soit a un nombre positif ou nul. On généralise la relation $(a^m)^n = a^{mn}$ aux rationnels. On définit donc $a^{\frac{1}{n}}$ de façon telle que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$. On a donc la définition suivante.

Définition 4.8. Pour tout $a \geqslant 0$, et tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Cette définition s'étend tout de suite à des exposants fractionnaires plus généraux.

Définition 4.9. Pour tout $a \geqslant 0$, et tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose
$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Remarque 4.10. On peut montrer que pour tout $a \geqslant 0$, on a aussi $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

On a donc des exposants fractionnaires positifs. Mais on sait déjà comment définir des exposants négatifs.

Définition 4.11. Pour tout $a > 0$, et tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose
$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{(\sqrt[q]{a})^p}.$$

Remarque 4.12. On a alors aussi pour tout $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}_0$,
$$a^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Cette remarque se généralise pour les fractions (positives).

5 Exercices résolus

1. Evaluer les expressions suivantes, mentalement. .

(a) $6 \times 53 - 24$
(b) $18 \times 8 - 24 \times 3$
(c) 6×324
(d) 8×142
(e) $123 - 24 \times 4$

Solutions :

(a) On calcule $300 + 18 - 24 = 294$.
(b) Cela vaut $80 + 64 - 72 = 72$.
(c) Cela vaut $1800 + 120 + 24 = 1944$.
(d) Cela vaut $800 + 320 + 16 = 1136$.
(e) Cela vaut $123 - 96 = 27$.

2. Evaluer les expressions suivantes, en utilisant la priorité des opérations.

(a) $8 - (10 - 3) + 2 \times 8$
(b) $(-14 : (-7))^3$
(c) $8,4 - (1,8 + 1,2) \times 2,5$
(d) $12 + 3 \times 7 - 2^3 : 4 + 3$
(e) $(16 + 3 \times 2^4) : 4^2$

Solutions :

(a) Cela vaut $8 - 7 + 16 = 17$.
(b) Cela vaut $2^3 = 8$.
(c) Cela vaut $8,4 - 7,5 = 0,9$.
(d) Cela vaut $12 + 21 - 8 : 4 + 3 = 12 + 21 - 2 + 3 = 34$.
(e) Cela vaut $(16 + 3 \times 16) : 16 = 4$.

3. Effectuer les produits et réduire (x et y sont des nombres réels)

(a) $(-3).(2x - y) + 4.(2x + y)$
(b) $(2x - 1)(y + 2)$
(c) $(2x - 1)^2$

Solutions :

(a) L'expression vaut $-6x + 3y + 8x + 4y = 2x + 7y$.
(b) On distribue pour obtenir $2xy + 4x - y - 2$.
(c) On applique la formule pour obtenir $4x^2 - 4x + 1$.

4. Factoriser les expressions suivantes (x et y sont des nombres réels)

(a) $4x^2 - 9$
(b) $6 - 3y^2$
(c) $(x + 3)(x - 2) + (x + 3)$
(d) $(2x + 3)^2 - 10$

Solutions :

(a) On reconnaît une différence de deux carrés et on obtient $(2x + 3)(2x - 3)$.
(b) On met 3 en évidence, et le nombre 2 est aussi un carré. On obtient donc la réponse $3(\sqrt{2} + y)(\sqrt{2} - y)$.
(c) On met $(x + 3)$ en évidence, sans oublier que $x + 3 = (x + 3).1$, on on obtient la réponse $(x + 3)[(x - 2) + 1] = (x + 3)(x - 1)$.
(d) Le nombre 10 est un carré, donc on obtient la solution $(2x + 3 + \sqrt{10})(2x + 3 - \sqrt{10})$.

5. Donner l'expression décimale des nombres suivants :

(a) $0,0012.10^4$
(b) $0,00234.10^7$
(c) $(1,3.10^4).(1,1.10^{-2})$

Solutions :

(a) On recule la virgule de 4 rangs vers la droite et on obtient la réponse : 12.
(b) On recule la virgule de 7 rangs vers la droite, après avoir ajouté les zéros nécessaires, et on obtient la réponse : $0,0023400.10^7 = 023400$.
(c) On multiplie les mantisses : $1,3.1,1 = 1,43$. Le produit des puissances est égal à 10^2. Le produit est donc égal à 143.

6. Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :

(a) $23\,000\,000$ (b) 384000 (c) $0,0000024.10^7$

Solutions :

(a) On compte le nombre de rangs à parcourir avec la virgule pour avoir un nombre entre 1 et 10, et on en trouve 7. On trouve donc la réponse $2,3.10^7$. On peut vérifier en faisant l'opration dans l'autre sens.

(b) De la même façon, on trouve $3,84.10^5$.

(c) Ce nombre vaut $2,4.10^{-6}.10^7 = 2,4.10$.

7. Evaluer les expressions suivantes (sans calculatrice) :

(a) $\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\,\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ (b) $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}$ (c) $(\frac{1}{9})^{\frac{5}{2}}$ (d) $64^{-\frac{2}{3}}$

Solutions :

(a) Vu les propriétés de la racine cubique, l'expression vaut $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$.

(b) Vu la définition des exposants négatifs et la dernière remarque du cours, cette expression vaut $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

(c) Par définition, cette expression vaut $(\sqrt{\frac{1}{9}})^5 = (\frac{1}{3})^5 = \frac{1}{243}$.

(d) Vu la définition des exposants négatifs et la dernière remarque du cours, cette expression vaut $(\frac{1}{64})^{\frac{2}{3}}$, c'est à dire $\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2} = \frac{1}{16}$.