3. Systèmes d'équations linéaires

Dans le module précédent, nous avons traité des équations du premier et du second degré à une inconnue réelle. Nous avons également abordé des exemples où il y avait plusieurs inconnues, mais où on se ramenait tout de suite à une seule inconnue. Nous allons maintenant voir ce qui se passe quand on ne peut pas se ramener directement à une seule inconnue. On a alors un ensemble d'équations qui doivent être satisfaites simultanément par les inconnues.

1 Quelques exemples simples

Voici un premier exemple concret, pour fixer les idées.

Exemple 1.1. Dans un restaurant italien, nous avons commandé quatre pizzas identiques et deux cafés. Cela nous a coûté 38 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés. Leur addition était 50,5 euros. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

La résolution suit les mêmes principes que dans le module précédent : on fixe les inconnues et leur dénomination, on pose les équations, on les résout, et on vérifie. Dans le cas présent, cela donne ceci :

1. Choix et dénomination des inconnues : Appelons p le prix d'une pizza et c le prix d'un café.
2. Mise en équations : on a deux conditions, qui sont vérifiées simultanément par les inconnues. L'addition de notre table donne
$$4p + 2c = 38$$
Celle de la table voisine donne
$$5p + 4c = 50,5.$$
Les deux équations doivent être satisfaites simultanément, c'est pourquoi on les écrit l'une au dessus de l'autre et on les rassemble à l'aide d'une accolade "{", comme ceci :
$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p + 2c & = & 38 \\ 5p + 4c & = & 50,5. \end{array}\right.$$
3. Résolution de ce *système* d'équations : c'est l'objet de ce chapitre. On trouvera un seul couple de nombres $(p; c)$ qui rend vraies ces deux égalités simultanément [a] (une solution), à savoir $p = 8,5$ et $c = 2$, ce que l'on écrit aussi [b] $(p; c) = (8,5; 2)$.
4. Vérification des solutions : on assigne les valeurs $8,5$ à p et 2 à c dans les équations de départ et on voit si les égalités qui en résultent sont vraies. Dans notre cas, on a bien $4 \times 8,5 + 2 \times 2 = 38$ et $5 \times 8,5 + 4 \times 2 = 50,5$.

Ce premier exemple donne un système de deux équations à deux inconnues (le prix de la pizza et le prix du café). Il s'agit d'équations linéaires : les seules opérations qui apparaissent dans ces équations sont des multiplications des inconnues par des nombres et des sommes.

Poursuivons cet exemple et supposons que le lendemain, nous mangions dans un autre restaurant italien.

Exemple 1.2. Nous commandons encore quatre pizzas identiques et deux cafés. Mais les quatre convives ont également eu un apéritif identique. Notre addition s'élève à 50 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés et cinq apéritifs (identiques aux nôtres, quelle coïncidence). Leur addition s'élève à 65,5 euros. Quel est le prix d'un café, d'une pizza et d'un apéritif ?

a. On dit aussi que le couple satisfait les équations.
b. J'utilise le point virgule comme séparateur quand il y a risque de confusion avec la virgule des nombres décimaux.

La résolution peut se présenter comme ceci :

1. Choix et dénomination des inconnues : appelons p le prix d'une pizza et c le prix d'un café et a le prix d'un apéritif.
2. Mise en équations : on a deux conditions, qui sont vérifiées simultanément par les inconnues. L'addition de notre table donne
$$4p + 2c + 4a = 50$$
Celle de la table voisine donne
$$5p + 4c + 5a = 65,5.$$
Puisqu'on veut des valeurs de p, c et a qui satisfont simultanément ces deux équations, on écrit le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 4p + 2c + 4a & = & 50 \\ 5p + 4c + 5a & = & 65,5. \end{array}\right.$$
3. On résout, et on vérifie.

Il s'agit ici d'un système de deux équations à 3 inconnues. Il est assez simple de voir que le système n'a pas une solution unique, mais que la solution est fonction (par exemple) du prix de l'apéritif : s'il est offert par la maison, on trouve une solution $(a; c; p) = (0; 2; 11,5)$. Si chaque apéritif coûte 3 euros, on est amené au système
$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 3 \\ 4p + 2c & = & 38 \\ 5p + 4c & = & 50,5. \end{array}\right.$$
On trouve une solution $(a; c; p) = (3; 2; 8,5)$.

Nous vérifierons que chaque valeur de a permet de trouver une unique valeur du couple $(p; c)$ qui satisfait les équations. Il y a donc une infinité de solutions, *paramétrées* par la valeur de a [c].

Finissons maintenant notre semaine gastronomique dans un troisième restaurant.

Exemple 1.3. Le lendemain, on passe une troisième soirée dans un restaurant. On commande toujours quatre pizzas identiques et deux cafés, notre addition se monte à 44 euros. La table voisine commande cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés pour une addition de 58 euros. Une troisième table commande deux pizzas (toujours les mêmes) et un café pour une somme de 25 euros.

En appelant p le prix de la pizza et c le prix d'un café, on obtient le système d'équations :
$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p + 2c & = & 44 \\ 5p + 4c & = & 58 \\ 2p + c & = & 25. \end{array}\right.$$
Il s'agit ici d'un système de 3 équations linéaires à 2 inconnues. Vous pouvez constater directement que ces additions du restaurant posent problème : si pour 4 pizzas et 2 cafés, on paie 44 euros, il semble naturel qu'on paie la moitié c'est à dire 22 euros, pour 2 pizzas identiques et un seul café. Ce système n'admet donc pas de solution : aucun couple de nombres $(p; c)$ ne peut rendre vraies simultanément les trois égalités. On dit que le système est incompatible.

Si dans cet exemple, la troisième addition du restaurant était de 22 euros, on aurait alors, avec les mêmes notations, le système
$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p + 2c & = & 44 \\ 5p + 4c & = & 58 \\ 2p + c & = & 22. \end{array}\right.$$
Ce serait un système de 3 équations à 2 inconnues, mais la troisième équation donnerait la même information que la première. Dans ce cas, nous verrons que l'on peut supprimer cette équation, et que ce système admet une seule solution $(p; c) = (10; 2)$.

Voici quelques exemples de questions supplémentaires, mais je fais maintenant une allergie aux pizzas, donc je donne des exemples théoriques.

c. On aurait pu paramétrer les solutions par les valeurs de p, ou de c.

Exemple 1.4. Déterminer tous les *couples* de nombres (x, y) qui vérifient le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y & = & 7 \\ 4x + 3y & = & 17. \end{array}\right.$$

Il s'agit encore d'un système de deux équations à deux inconnues. On peut vérifier qu'en assignant à x la valeur 2 et à y la valeur 3, les deux égalités constituant le système sont vraies. On dit donc que le couple $(2, 3)$ satisfait les deux équations (quand les inconnues sont x et y, ou x, y et z, on place généralement les valeurs dans l'ordre alphabétique) ou encore que c'est une solution du système.

Exemple 1.5. Déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient les conditions

$$\left\{\begin{array}{lcccl} 2x & + & y & = & 7 \\ & & 2y & = & 6. \end{array}\right. \tag{1}$$

On a ici aussi un système de deux équations à deux inconnues, plus facile que le précédent. En effet, la deuxième équation ne fait pas intervenir l'inconnue x. On peut alors la résoudre et trouver que si (x, y) satisfait les deux conditions, alors on a $y = 3$. En tenant compte de cette information dans la première équation, on voit que le système d'équations peut s'écrire de manière *équivalente*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3 & = & 7 \\ y & = & 3. \end{array}\right.$$

On résout alors la première équation pour obtenir que le système de départ est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3. \end{array}\right.$$

Il y a donc une seule solution au système d'équations (1). L'ensemble des solutions est $\{(2, 3)\}$.

2 Quelques définitions

Formalisons un peu les notions qui ont été introduites dans les exemples, en commençant par une définition un peu formelle de ce qu'est un système d'équations linéaires, encore appelé système linéaire.

Définition 2.1. Un *système linéaire* de p équations à n inconnues est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p, \end{array}\right.$$

où les nombres $(a_{11}, \ldots, a_{pn})$ sont donnés et appelés coefficients du système et où les nombres $(b_1, \ldots, b_p)$ forment le “terme indépendant”. On recherche des nombres inconnus $x_1, \ldots, x_n$ qui satisfont toutes les équations simultanément ; ce sont les inconnues.

Ce qui est important dans cette définition, c'est que les seules opérations utilisées pour former les équations sont des multiplications des inconnues par des nombres réels et des sommes (cela inclut en particulier les divisions et les soustractions).

Nous ne dépasserons pas dans ce module un petit nombre d'inconnues et d'équations (trois ou quatre pour illustrer les méthodes de résolution sur des exemples significatifs). Dans ce cas il est plus facile d'utiliser pour les noter différentes lettres de l'alphabet $(x, y, z, \ldots)$.

Définition 2.2. On appelle solution du système tout n-uple de nombres $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant *simultanément* les p équations. Résoudre le système consiste à trouver *toutes* les solutions.

Nous avons déjà étudié le cas le plus simple d'un système linéaire d'une seule équation à une seule inconnue. Dans ce cas, nous avons déjà constaté que l'ensemble des solutions S du système peut être vide, réduit à un seul élément ou infini.

Définition 2.3. Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit *incompatible*.
Un système admettant une solution unique est dit *déterminé*.
Un système admettant une infinité de solutions est dit *indéterminé*.

Nous admettrons qu'en général, seuls ces trois cas peuvent se présenter. Il n'y a donc pas de système linéaire admettant exactement deux solutions.

Comme dans le cas particulier des équations du premier degré à une inconnue, la résolution des systèmes d'équations est basée sur la notion d'équivalence. Je rappelle dans ce cadre général la définition que nous avons adoptée dans le module précédent.

Définition 2.4. Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits équivalents si ils admettent le même ensemble de solutions. On note alors $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$. Si toute solution de (S_1) est solution de (S_2), on dit que (S_1) implique (S_2) et on note $(S_1) \Rightarrow (S_2)$.

Voici quelques exemples de"types de systèmes" et d'équivalences :

1. Le système d'équations de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} 5x + 4y &= 2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

est déterminé puisqu'il admet comme solution unique $(x, y) = (-2, 3)$. On note $S = \{(-2, 3)\}$.

2. Le système de deux équations à deux inconnues donné par

$$\begin{cases} 5x + 4y &= 2 \\ 10x + 8y &= 4 \end{cases}$$

est équivalent au système [d]

$$5x + 4y = 2$$

puisque la deuxième équation donne la même information que la première. Il est indéterminé puisque chaque valeur assignée par exemple à y permet de trouver une valeur de x qui rend vraie cette équation, à savoir

$$x = \frac{2 - 4y}{5}.$$

Les solutions s'expriment donc en fonction de y de la manière suivante [e]

$$S = \{(\frac{2 - 4y}{5}, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

3. Le système

$$\begin{cases} 5x + 4y &= 2 \\ 10x + 8y &= 5 \end{cases}$$

est incompatible.

3 Méthodes de résolution

Dans ce qui suit, nous allons rappeler deux méthodes pour résoudre les systèmes linéaires, c'est à dire pour trouver l'ensemble des solutions. Elles sont systématiques et ne font appel à aucune technique sophistiquée et consistent à transformer le système de départ par des équivalences pour obtenir un système plus simple, que l'on peut résoudre. La première est appelée méthode des pivots, ou méthode d'élimination de Gauss [f]. La deuxième est appelée méthode par substitution.

Etant donné un système linéaire, nous noterons encore (k) la k-ème équation du système. Si a est un nombre, nous noterons $a.(k)$ l'équation obtenue en multipliant les deux membres de (k) par le nombre a. La méthode de Gauss est basée sur le résultat suivant.

d. Quand il n'y a qu'une seule équation, on ne note pas l'accolade, mais c'est un système quand même, selon notre définition générale.

e. On aurait pu les exprimer en fonction de x.

f. Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855), surnommé le prince des mathématiques, mais certainement pour d'autres découvertes.

Proposition 3.1. *Un système linéaire (S) est équivalent à tout système (S') obtenu*

1. *soit en remplaçant une équation (k) du système (S) par une équation équivalente : soit en additionnant un même nombre aux deux membres, soit en multipliant les deux membres par un même nombre a non nul, pour obtenir $a.(k)$.*
2. *soit en remplaçant une équation (k) du système (S) par $(k)+(l)$, où (l) est une équation de (S) et où $(k)+(l)$ est obtenue en additionnant membre à membre les deux équations (k) et (l) ;*
3. *soit en permutant les équations du système (S).*

Remarque 3.2. En combinant les deux premières équivalences, on voit qu'on peut remplacer l'équation (k) par $(k)+a.(l)$ si a est un nombre non nul. On peut évidemment le faire pour a nul, puisque dans ce cas on ne fait rien. On peut aussi le faire simultanément avec plusieurs équations différentes de (k) et lui ajouter *une combinaison linéaire* des autres équations. Enfin, pour ne pas allonger l'écriture, on peut opérer plusieurs équivalences à la fois.

La preuve de la proposition 3.1 est analogue à celle que nous avons faite dans le cas des équations à une seule inconnue. Je ne la reproduis donc pas, mais j'illustre cette proposition sur quelques exemples d'équivalences.

1. Le système de l'exemple 1.1 peut être modifié comme suit

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p+2c & = & 38 \\ 5p+4c & = & 50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2p+c & = & 19 \\ 5p+4c & = & 50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 19-2p \\ 5p+4c & = & 50,5. \end{array}\right.$$

   En effet, la première équivalence consiste à diviser par 2 (multiplier par $a=\frac{1}{2}$) les deux membres de la première équation, tandis que la deuxième consiste à retrancher $2p$ aux deux membres de la première équation du nouveau système.
2. Le système de l'exemple 1.1 peut également être modifié comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p+2c & = & 38 \\ 5p+4c & = & 50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 8p+4c & = & 76 \\ 5p+4c & = & 50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 8p+4c & = & 76 \\ 3p & = & 25,5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 8p+4c & = & 76 \\ p & = & 8,5. \end{array}\right.$$

   La première équivalence consiste à multiplier par 2 les deux membres de la première équation. La seconde consiste à remplacer la deuxième équation (du nouveau système) par la différence de la première et de la deuxième. La dernière est obtenue en divisant par 3 deuxième équation du nouveau système.
3. Le système de l'exemple 1.3 peut être modifié comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4p+2c & = & 44 \\ 5p+4c & = & 58 \\ 2p+c & = & 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2p+c & = & 22 \\ 5p+4c & = & 58 \\ 2p+c & = & 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2p+c & = & 22 \\ 5p+4c & = & 58 \\ 0 & = & -3. \end{array}\right.$$

   Je vous invite à trouver vous même les équivalences utilisées. La dernière équation du système obtenu n'a pas de solutions. Cela prouve clairement que le système de départ est incompatible, puisqu'il a le même ensemble de solutions que le dernier.

3.1 La méthode d'élimination de Gauss

Décrivons maintenant la méthode d'élimination :

1. On choisit une équation de (S) que l'on conserve comme première équation (disons l'équation (i)). On choisit une inconnue (disons x_j) présente dans cette équation (une inconnue dont le coefficient est simple), que l'on va *éliminer* des autres équations. Le coefficient de l'inconnue choisie dans l'équation choisie est appelé *pivot*.
2. En additionnant un bon multiple de l'équation (i) à (un bon multiple de) l'équation (k) de (S), on obtient un système équivalent où la nouvelle équation (k) ne contient plus l'inconnue x_j. On applique ce procédé à toutes les équations (k), pour $k \neq i$.
3. On obtient ainsi un nouveau système où seule la première équation contient la inconnue choisie et où les $p-1$ dernières équations contiennent une inconnue de moins.

4. On recommence la procédure avec les $p-1$ dernières équations du nouveau système.
5. On arrive à un système dit triangulaire. Il est alors simple de trouver les solutions.

Voici un premier exemple très simple.

Exemple 3.3. Trouver toutes les solutions du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ -x & + & 2y & = & 8. \end{array}\right.$$

1. On choisit le première équation à laquelle on ne touche plus. On choisit l'inconnue x, que l'on va éliminer de la deuxième équation. Le pivot est le coefficient de x dans la première équation, c'est à dire 1. On en profite également pour numéroter les équations.

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} 1x & + & y & = & 7 & \quad (1) \\ -1x & + & 2y & = & 8. & \quad (2) \end{array}\right.$$

2. On remplace l'équation (2) par $(1)+(2)$, pour obtenir l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} 1x & + & y & = & 7 & \quad (1) \\ -1x & + & 2y & = & 8. & \quad (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 7 & \quad (1) \\ & & 3y & = & 15. & \quad (3) \end{array}\right.$$

3. Le système a maintenant une forme triangulaire. La deuxième équation ne contient plus qu'une inconnue, et peut être résolue. On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 7 & \quad (1) \\ & & 3y & = & 15. & \quad (3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 7 & \quad (1) \\ & & y & = & 5. & \quad (4) \end{array}\right.$$

   Il n'est plus utile de rendre le système plus simple : il est triangulaire.
4. On substitue la valeur de y dans l'équation (1), et on obtient le système

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+5 & = & 7 \\ y & = & 5. \end{array}\right.$$

5. L'ensemble des solutions est $\{(2;5)\}$.
6. On vérifie en remplaçant x par 2 et y par 5 dans le premier système.

Voici maintenant un exemple de système de trois équations à trois inconnues.

Exemple 3.4. Résoudre le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 7 \\ -x+2y-z & = & 8 \\ 2x-2y+z & = & -3. \end{array}\right.$$

1. Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & -z & = & 7 & \quad (1) \\ & 3y & -2z & = & 15 & \quad (2) \\ & -4y & +3z & = & -17. & \quad (3) \end{array}\right.$$

On garde l'équation (2) et on remplace (3) par 4.(2)+3.(3) pour éliminer l'inconnue y : on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & -z & = & 7 & \quad (1) \\ & 3y & -2z & = & 15 & \quad (2) \\ & & z & = & 9. & \quad (4) \end{array}\right.$$

Ce système est triangulaire. On trouve la valeur de z à partir de l'équation (4), puis on la substitue pour avoir y dans l'équation (2), et finalement on substitue les deux valeurs dans l'équation (1) pour obtenir la valeur de x. On a donc $S=\{(5;11;9)\}$.

Exemple 3.5. Soit (S) le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrr} x & +2y & +z & & = & -1 & (1)\\ 3x & +11y & +3z & -5t & = & -15 & (2)\\ 2x & -y & & +t & = & 2 & (3)\\ 4x & +3y & +3z & +3t & = & 4. & (4)\end{array}\right.$$

On choisit la première équation et l'inconnue x. Le pivot est 1. On remplace (2) par (2)-3.(1), (3) par (3)-2.(1) et (4) par (4)-4.(1). On obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrr} x & +2y & +z & & = & -1 & (1)\\ & 5y & & -5t & = & -12 & (5)\\ & -5y & -2z & +t & = & 4 & (6)\\ & -5y & -z & +3t & = & 8. & (7)\end{array}\right.$$

On constate bien que x n'apparaît plus dans les trois dernières équations. On choisit l'équation (5) et l'inconnue y. Le pivot vaut 5. On remplace (6) par (6)+(5) et (7) par (7)+(5) et on obtient le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrr} x & +2y & +z & & = & -1 & (1)\\ & 5y & & -5t & = & -12 & (5)\\ & & -2z & -4t & = & -8 & (8)\\ & & -z & -2t & = & -4. & (9)\end{array}\right.$$

On conserve ensuite l'équation (9) et on choisit l'inconnue z pour éviter d'avoir des fractions et on remplace (8) par (8)-2.(9) pour obtenir un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrr} x & +2y & +z & & = & -1 & (1)\\ & 5y & & -5t & = & -12 & (5)\\ & & -z & -2t & = & -4. & (9)\\ & & & 0 & = & 0. & (10)\end{array}\right.$$

La dernière équation peut être supprimée. On constate que, quelle que soit la valeur de t, on pourra trouver z pour satisfaire la troisième équation, puis y, puis x. Le système est donc indéterminé :

- L'équation (9) donne $z = 4 - 2t$;
- L'équation (5) donne $-5y - 2(4 - 2t) - 5t = -12$, donc $y = t - \frac{12}{5}$;
- L'équation (1) donne $x = \frac{-1}{5}$.

On a donc [g].

$$S = \{(x; y; z; t) = (\frac{-1}{5}; t - \frac{12}{5}; 4 - 2t; t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin, une fois que le système est résolu, il est en principe assez simple de vérifier si le résultat est bien une solution du système de départ.

3.2 La méthode de résolution par substitution

L'idée de cette autre méthode, qui est équivalente à la précédente, est également de faire "disparaître" des inconnues.

1. On choisit une équation que l'on résout par rapport à une des inconnues ;
2. On utilise la relation obtenue pour substituer cette inconnue dans *toutes* les autres équations, qui ne la contiennent donc plus.
3. On recommence avec une autre inconnue, dans les équations qui restent.

Attention à ne pas tourner en rond !

Exemple 3.6. Pour résoudre le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y & = & 7\\ -x + 2y & = & 8,\end{array}\right.$$

on peut procéder comme suit :

g. Comme il commence à y avoir beaucoup d'inconnues, il est utile de préciser dans quel ordre on les met. Dans ce cas, on peut ne pas adopter l'ordre alphabétique.

1. On exprime x en fonction de y en résolvant la première équation
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ -x+2y & = & 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -x+2y & = & 8. \end{array}\right.$$
2. On substitue la valeur de x dans la deuxième équation et on simplifie
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -x+2y & = & 8. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -(7-y)+2y & = & 8. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ 3y & = & 15. \end{array}\right.$$
3. La dernière équation ne contient qu'une inconnue et peut donc être résolue :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ 3y & = & 15. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ y & = & 5. \end{array}\right.$$
On substitue la valeur de y dans la première équation et on a finalement
$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ y & = & 5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+5 & = & 7 \\ y & = & 5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 5. \end{array}\right.$$
On a donc finalement $S = \{(2; 5)\}$. On vérifie en assignant la valeur 2 à x et la valeur 5 à y dans le système d'origine, et en constatant que les égalités qui en résultent sont vraies.

La méthode du pivot aurait donné le résultat plus rapidement car les calculs (équivalents) y sont mieux organisés (c'est un fait général). J'ai résolu cet exemple avec le plus grand détail pour insister sur toutes les étapes. Il est clair que plus on progresse et plus on est sûr de soi, moins on doit écrire de détails, mais pour commencer, il vaut mieux en écrire un certain nombre, pour éviter les erreurs.

Voici un deuxième exemple, avec trois équations et trois inconnues.

Exemple 3.7. Si on veut résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+y-z & = & -25 \\ -x+2y+z & = & 15 \\ 2x-3y+2z & = & -16, \end{array}\right.$$
on peut faire comme ceci :

1. On résout une équation pour obtenir la valeur de x en fonction de y et de z [h], par exemple la deuxième :
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+y-z & = & -25 \\ -x+2y+z & = & 15 \\ 2x-3y+2z & = & -16, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3x+y-z & = & -25 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right.$$
2. On conserve la première équation et on substitue la valeur de x dans les deux autres et on simplifie
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3x+y-z & = & -25 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3(2y+z-15)+y-z & = & -25 \\ 2(2y+z-15)-3y+2z & = & -16 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 7y+2z & = & 20 \\ y+4z & = & 14 \end{array}\right.$$
Les deux dernières équations ne contiennent plus l'inconnue x, c'est ce que l'on voulait. On continue avec ces deux équations, qui ne contiennent plus que deux inconnues.
3. On exprime y en fonction de z, dans la dernière équation par exemple :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 7y+2z & = & 20 \\ y+4z & = & 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ 7y+2z & = & 20 \end{array}\right.$$

h. On n'est pas obligé de commencer par x.

4. On conserve la deuxième équation et on substitue la valeur de y dans la troisième, puis on simplifie

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ 7y+2z & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ 7(14-4z)+2z & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ -26z & = & -78. \end{array}\right.$$

5. On trouve $z=3$ dans la dernière équation, que l'on substitue dans la deuxième équation. On en déduit $y=2$, puis $x=-8$ dans la première équation. La solution est donc $(x,y,z)=(-8,2,3)$. On note $S=\{(-8,2,3)\}$.

4 Un exemple en chimie

Déterminer les coefficients stœchiométriques x,y,z,t de la réaction (équilibrée)

$$x\mathrm{CH}_4 + y\mathrm{O}_2 \to z\mathrm{CO}_2 + t\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Le principe fondamental est que le nombre d'atomes est conservé lors de la réaction. En inspectant les réactifs et les produits, on obtient les conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & z & (C) \\ 4x & = & 2t & (H) \\ 2y & = & 2z+t & (O) \end{array}\right.$$

Il est évident qu'on ne peut pas espérer une solution unique. En effet, en multipliant tous les coefficients solutions de ce système par un même nombre, on a encore une solution.

On substitue progressivement en gardant toutes les équations. On écrit donc des systèmes équivalents.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4x & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4z & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Les solutions s'écrivent en fonction de z : on écrit en mathématique

$$S=\{(x;y;z;t)=(z;2z;z;2z) : z\in\mathbb{R}\}.$$

En chimie, il suffit de savoir que $(x;y;z;t)=(1;2;1;2)$ est une solution, on écrit alors

$$\mathrm{CH}_4 + 2\mathrm{O}_2 \to \mathrm{CO}_2 + 2\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Bien sûr, on pourrait utiliser le fait que les solutions sont multiples l'une de l'autre et imposer par exemple $z=1$, pour rendre les choses plus faciles. On trouvera une solution sauf si toutes les solutions satisfont la condition $z=0$. Il suffira alors de la multiplier éventuellement par un nombre adéquat pour obtenir des nombres entiers, comme c'est l'usage en chimie.