4. Géométrie vectorielle et analytique

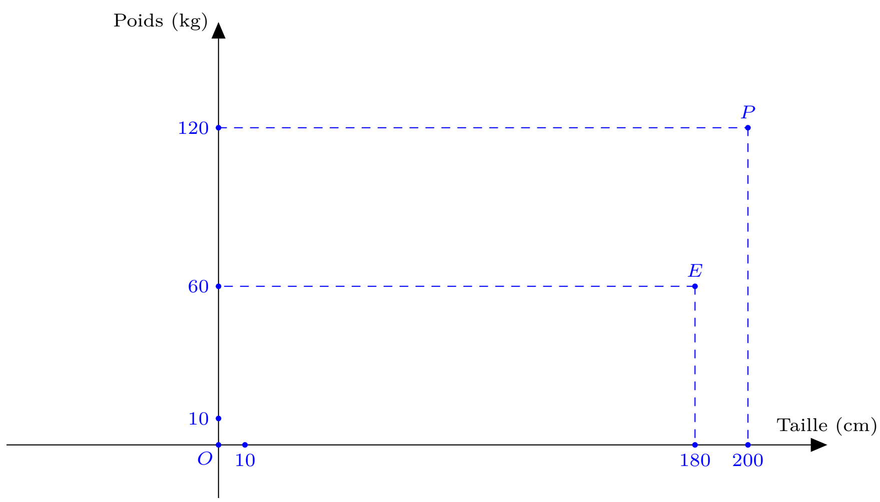
1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons revoir des notions de géométrie. Il ne sera pas question ici de faire beaucoup de géométrie synthétique, mais nous rappellerons les principales propriétés qui sont nécessaires pour introduire la géométrie analytique. L'approche est basée sur la géométrie vectorielle. Ce choix s'explique par l'importance de la géométrie vectorielle en physique.

Nous allons revoir l'approche des vecteurs suivie en mathématique (vecteurs déterminés par deux points, vecteurs liés, vecteurs libres) et nous ferons le lien avec la notion de vecteur utilisée en physique (vecteur déterminé par un direction, un sens et une norme).

Il est cependant important d'être prudent à propos du contexte dans lequel ces notions coïncident : dans beaucoup d'applications de la géométrie, la notion de norme de vecteur n'est simplement pas définie. Dans de tels contextes, il est important de pouvoir travailler *sans la notion de norme*. Ces contextes ne sont pas si étranges que cela comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.1. Dans cette situation classique en sciences, on représente un diagramme taille/poids. Le poids est représenté en kg et la taille en cm. Le point E représente un élève de taille standard, tandis que le point P représente un grand professeur de mathématiques. On demande la distance d du point E au point P.



Si on se souvient du cours de mathématiques sur le théorème de Pythagore, on répond facilement et s'en y prendre garde

$$d(E,P) = \sqrt{(200-180)^2 + (120-60)^2} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10}.$$

On peut cependant se poser une question sur le sens de cette formule : quelles seront les unités de la réponse ? En effet, sous la racine on a additionné des kg^2 et des cm^2. Même si on peut dessiner une flèche de E à P, elle n'a donc pas de longueur.

De même, un changement d'unités sur les axes provoque des changements apparents de direction de la droite EP.

Nous avons cependant parfois besoin d'utiliser la puissance du calcul vectoriel dans de telles situations. Il est donc nécessaire de définir les vecteurs dans un cadre *non métrique*. Remarquons toutefois qu'on peut, dans l'exemple précédent, mesurer une distance si les points E et P déterminent une droite parallèle aux "axes". C'est ce qui est utilisé en statistique pour calculer la droite des moindres carrés, mais nous y reviendrons.

Remarque 1.2. Dans ce chapitre, j'ai donné pas mal de détails et fait beaucoup de preuves. Comme dans les autres modules, cette option est justifiée par ma conviction que les preuves permettent de mieux comprendre les définitions et l'articulation entre les différentes notions. Si l'une d'entre elles vous semble trop difficile, n'hésitez pas à la passer et à y revenir ensuite, si vous en ressentez le besoin.

2 Points, droites, plans et leurs premières propriétés

Commençons par revoir les objets familiers de la géométrie que sont les points, les droites et les plans. Dans l'exposé classique de la géométrie, depuis Euclide, on ne donne pas une définition exacte de ces objets, mais plutôt une représentation, pour pouvoir travailler avec ces objets et se convaincre aisément des propriétés fondamentales qu'ils doivent posséder. Ces propriétés fondamentales sont énoncées sous forme de postulats ou axiomes. Nous n'allons pas revoir tous ces axiomes : cela dépasse largement le cadre de ce cours [a]. Mais cela nous forcera à admettre certaines propriétés, et impliquera certaines limitations à l'exposé. Avant de commencer, insistons sur le fait que certaines propriétés dépendent du fait que l'on se situe en géométrie plane ou en géométrie dans l'espace. Si tel est le cas, on précisera le contexte dans lequel on se trouve.

Définition 2.1.
1. Un *point* est un objet géométrique qui n'a pas d'extension dans l'espace : il n'a pas d'épaisseur et pas de longueur ("un point est ce qui ne comporte aucune partie").
2. Une *droite* est un ensemble de points alignés, qui n'a pas de "largeur", et qui s'étend à l'infini dans les deux sens. On peut la **visualiser** à l'aide d'un stylo, ou d'une latte, prolongés à l'infini "par la pensée".
3. Un *plan* est un ensemble infini de points. Il n'est pas courbe. On peut le **visualiser** comme la surface d'une table, prolongée à l'infini "par la pensée".

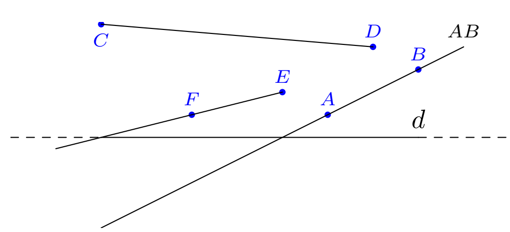
Donnons tout de suite des propriétés fondamentales des droites et plans.

Postulat 2.2. Par deux points distincts A et B, il passe une et une seule droite. Cette droite est notée AB. Par trois points A, B, C de l'espace, non alignés (non sur une même droite) il passe un et un seul plan. On le note ABC.

La donnée d'un ou de deux points sur une droite permet de définir des demi-droites ou des segments de droites.

Définition 2.3.
1. L'ensemble des points d'une droite compris entre deux points A et B (inclusivement) de cette droite est appelé *segment de droite* (ou segment). On le note $[A, B]$. Alors A et B sont les *extrémités* du segment $[A, B]$.
2. Chaque point A d'une droite détermine deux parties sur cette droite. Ces parties sont les *demi-droites* issues de A. La demi-droite déterminée par A et contenant $B \neq A$ est notée $[A, B$. Le point A est alors l'origine de la demi-droite $[A, B$.

Voici une représentation graphique de ces objets :



On a pêle-mêle une droite d, une droite AB, un segment $[A, B]$, une demi-droite $[E, F$, etc...

a. Les axiomes d'Euclide ont été remis en question et améliorés par de grands mathématiciens, en particulier au début du 20e siècle. On peut par exemple citer David Hilbert, qui formula vers 1900 ses propres axiomes.

2.1 Positions relatives de droites dans le plan

La position de deux droites dans le plan [b] est réglée par la définition suivante.

Définition 2.4. Dans le plan, deux droites d_1 et d_2 dont l'intersection est un singleton $\{I\}$ sont dites sécantes (au point I). Dans le cas contraire, elles sont dites parallèles, et on note $d_1 /\!/ d_2$.

Il y a donc deux cas exclusifs : des droites d'un plan sont soit parallèles, soit sécantes, par définition. Il faut cependant être attentif au fait que d'après cette définition, des droites égales (confondues) sont parallèles. En ce qui concerne la parallélisme, on peut citer le postulat le plus célèbre.

Postulat 2.5. Par un point (extérieur) à une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite. [c]

Cette situation est représentée dans la figure suivante : à gauche, une droite et un point extérieur à la droite et à droite, la même figure avec la parallèle en question.

Le parallélisme des droites a les propriétés suivantes, que l'on peut visualiser assez facilement.

Proposition 2.6.

- *Une droite d est parallèle à elle-même (le parallélisme est réflexif).*
- *Si d_1 est parallèle à d_2, alors d_2 est parallèle à d_1 (le parallélisme est symétrique).*
- *Si d_1 est parallèle à d_2 et si d_2 est parallèle à d_3 alors d_1 est parallèle à d_3 (le parallélisme est transitif).*

On dit que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.

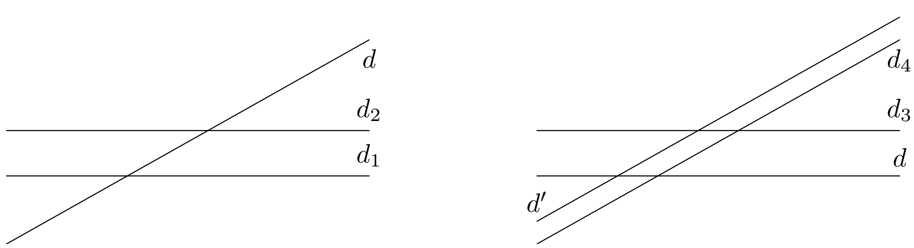
Démonstration. Les deux premiers points de cette proposition découlent directement de la définition du parallélisme. Pour le troisième, supposons que d_1 ne soit pas parallèle à d_3 et montrons qu'on arrive à une contradiction. Si d_1 et d_3 ne sont pas parallèles, en particulier elles sont distinctes. Mais elles sont aussi sécantes en un point P. Alors par P, il passe deux parallèles à d_2, à savoir d_1 et d_3. Cela est contradictoire avec le postulat d'Euclide énoncé ci-dessus. [d] □

On déduit de la transitivité du parallélisme la propriété suivante, en utilisant le fait que des droites sont sécantes ou parallèles, le "ou" étant exclusif. Je vous laisse la démonstration en exercice.

Proposition 2.7.

1. *Dans le plan, si deux droites sont parallèles, alors toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.*
2. *Dans le plan, si deux droites sont sécantes, toute parallèle à l'une est sécante à l'autre.*

Ces situations peuvent être représentées par la figure suivante.



A gauche, les droites d_1 et d_2 sont parallèles. La droite d est sécante avec d_1. Elle est donc sécante avec d_2, et vice-versa. A droite, les droites d_3 et d_4 sont sécantes. La droite d est parallèle à d_3, donc elle est sécante à d_4, et d' est parallèle à d_4, donc sécante à d_3.

Remarque 2.8. Cette propriété n'est vraie que dans le plan. Elle est en effet basée sur la transitivité du parallélisme, qui reste vraie dans l'espace, mais aussi sur le fait qu'il n'y a que deux positions relatives pour deux droites dans le plan. Ce fait n'est plus vrai dans l'espace, et on peut se convaincre facilement (avec trois stylos), que les propriétés qui viennent d'être énoncées ne sont plus valables.

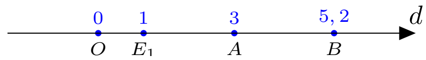
b. En géométrie plane, on se place dans un plan fixé une fois pour toutes, qu'on appelle "le plan".

c. J'ai indiqué le mot extérieur entre parenthèses, car il n'est pas fondamental pour nos travaux de faire la différence.

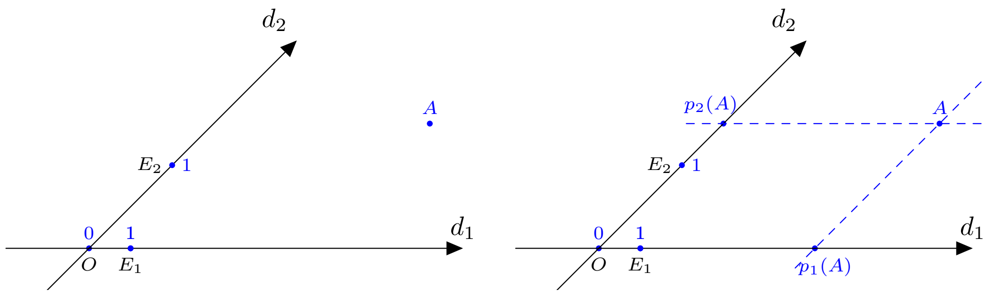
d. Si dans le postulat, on demande que le point soit extérieur à la droite, il faut prouver que P n'appartient pas à d_2, ce que je vous laisse comme exercice.

2.2 Repères cartésiens du plan

Nous avons appris à représenter les nombres naturels, entiers, rationnels puis réels sur une droite. Pour cela, il était nécessaire de placer une origine, correspondant au nombre 0, et un point marquant l'unité, correspondant au nombre un. On a ainsi établi une correspondance entre les points de "la droite" et les nombres réels.

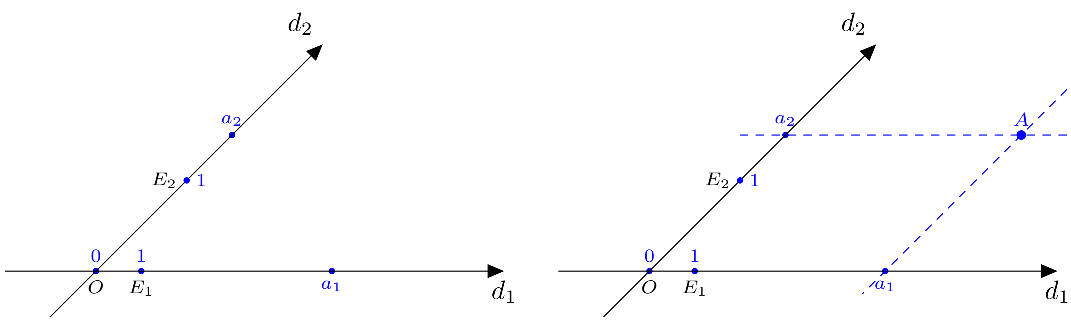


La notion de repère cartésien du plan prolonge cette idée pour les points du plan. Voici l'idée : on se donne deux droites d_1 et d_2 *sécantes*. On note O le point d'intersection. On se donne des points unités E_1 sur d_1 et E_2 sur d_2, qui permettent de *graduer* (et donc d'orienter) ces droites.



Etant donné un point A du plan, on peut tracer la parallèle à d_2 passant par A. Elle coupe d_1 en un point $p_1(A)$ (la projection de A sur d_1 parallèlement à d_2). De même, la parallèle à d_1 contenant A coupe d_2 en un point $p_2(A)$. Le point $p_1(A)$ correspond via la graduation à un nombre a_1 et $p_2(A)$ correspond à un nombre a_2. On a donc associé à A un couple de nombres (a_1, a_2).

Réciproquement, étant donné un couple de nombres (a_1, a_2), on peut faire le chemin inverse : utiliser ces nombres pour marquer des points sur les droites d_1 et d_2, tracer des parallèles à d_1 et à d_2, et déterminer un unique point d'intersection, comme ceci :



Voici une définition formelle et un peu de vocabulaire.

Définition 2.9. Un repère cartésien du plan est la donnée :

1. D'un couple de droites (d_1,d_2) sécantes en un point O. Ce point est l'origine du repère tandis que d_1 et d_2 en sont les axes ;
2. D'un point E_1 distinct de O sur la droite d_1 ;
3. D'un point E_2 distinct de O sur la droite d_2.

La donnée des points E_1 et E_2 permet d'*orienter* les axes d_1 et d_2, et d'y établir une *graduation*.

Définition 2.10. Pour tout point A du plan,

1. La parallèle à l'axe d_2 menée par A coupe l'axe d_1 en un point $p_1(A)$ appelé projection de A sur d_1, parallèlement à d_2.
2. La parallèle à l'axe d_1 tracée par A coupe l'axe d_2 en un point $p_2(A)$ appelé projection de A sur d_2, parallèlement à d_1.

3. Les nombres réels a_1 et a_2 associés à $p_1(A)$ et $p_2(A)$ sur leurs axes gradués sont *l'abscisse* et *l'ordonnée* de A. On note $A : (a_1, a_2)$, ou même $A(a_1, a_2)$.
4. Le couple (a_1, a_2) forme les *coordonnées* de A dans le repère.

Par habitude, on note parfois x l'abscisse et y l'ordonnée d'un point du plan. On note aussi x le premier axe du repère et y le second. On parle alors abusivement de l'axe des x et de l'axe des y.

L'association point du plan – couple de coordonnées est une bijection (on dit aussi parfois "correspondance biunivoque"). Cette bijection permet de représenter de manière géométrique une situation où il n'y a que des nombres, et de traiter de manière algébrique une situation géométrique.

3 Calcul vectoriel

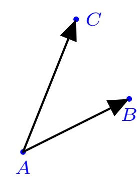
Comme annoncé dans l'introduction, je présente ici les notions de vecteurs dans un contexte non métrique.

3.1 Vecteurs liés en un point

Les définitions suivantes sont valides dans le plan ou dans l'espace.

Définition 3.1. Un vecteur lié au point A est un couple (A, B). De manière équivalente, il est défini par un segment orienté de A vers B. On le note également $\overrightarrow{AB}$ et on le représente par une flèche de A à B. Il y a un vecteur particulier (A, A) qui est appelé vecteur nul. Il est noté $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{0}$.

Voici une représentation de deux vecteurs liés en A.



En physique, on peut penser le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme la force qu'il faut appliquer à une boule de billard située au point A pour l'envoyer au point B. Le point A est alors le point d'appui de la force.

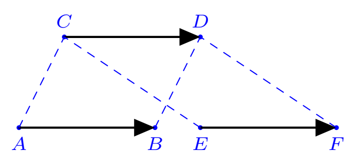
En mathématique, on parlera plutôt d'une translation qui applique le point A sur le point B. Le point A est alors le point auquel on applique la translation.

3.2 Vecteurs libres

Les idées de force et de translation évoquées ci-dessus donnent naissance à la notion de vecteur libre : si on applique la même force à une boule de billard située à un autre endroit sur la table (supposée infinie), on observera un résultat similaire. Rappelons qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme[e] si on a $AB \mathbin{/\!/} CD$ et $BC \mathbin{/\!/} AD$.

Définition 3.2. Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme, ou s'ils sont équipollents à un même troisième. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.

Voici des vecteurs équipollents entre eux. Remarquez que pour (A, B) et (C, D), on trace facilement le parallélogramme, de même que pour (C, D) et (E, F). Par contre, pour (A, B) et (E, F), on doit passer par (C, D) car A, B, E et F sont alignés, d'où la condition supplémentaire dans la définition.



Attention, dans la situation représentée ici, on n'a pas $(A, B) \uparrow (D, C)$: l'ordre a de l'importance.

La notion d'équipollence permet de définir les vecteurs libres.

e. On suppose que les points A, B, C et D ne sont pas alignés.

Définition 3.3. Un vecteur libre est un ensemble de vecteurs liés équipollents entre eux. Chacun de ces vecteurs liés est un représentant du vecteur libre en question. On note aussi $\overrightarrow{AB}$ le vecteur libre représenté par (A, B).

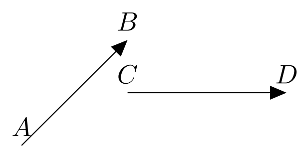
On note également les vecteurs libres par des lettres surmontées d'une flèche : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$,...

Il y a un lien important entre les vecteurs liés en un point et les vecteurs libres. Etant donné un vecteur lié en A (disons $\overrightarrow{AB}$), il représente un vecteur libre (formé des vecteurs équipollents à $\overrightarrow{AB}$). Intuitivement, on a libéré le vecteur lié $\overrightarrow{AB}$ et il peut se "déplacer" en restant parallèle à lui même (en restant équipollent à $\overrightarrow{AB}$. Réciproquement, étant donné un vecteur libre $\overrightarrow{v}$, on l'attrape (intuitivement toujours) et on le lie en A, obtenant ainsi le vecteur lié en A qui représente $\overrightarrow{v}$. Cette correspondance est parfaite : c'est une bijection.

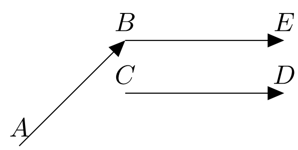
3.3 Addition et multiplication scalaire de vecteurs

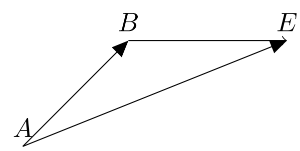
Rappelons maintenant les définitions de l'addition et de la multiplication des vecteurs libres par des nombres. On transpose ces opérations pour les vecteurs liés en utilisant la bijection qui vient d'être évoquée entre vecteurs libres et vecteurs liés en un point.

Soient des vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, dont des représentants sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:



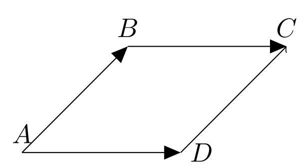
On considère l'unique point E du plan tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ (figure de gauche) :





La *somme* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur libre représenté par $\overrightarrow{AE}$ (figure de droite). On la note $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

On vérifie que la somme est indépendante du choix des vecteurs utilisés pour représenter $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Il est également clair que le vecteur livre $\overrightarrow{0}$ représenté par $\overrightarrow{CC}$ est neutre pour l'addition, et que celle-ci est commutative, comme le montre le graphique suivant :



Le vecteur $\overrightarrow{v}$ représenté par $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ représenté par $\overrightarrow{AB}$ pour l'addition, puisqu'on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$. On le note naturellement $-\overrightarrow{u}$.

Enfin, on peut démontrer que l'addition ainsi définie est associative. Il est aussi utile de noter que l'addition des vecteurs se présente souvent sous une forme simple, qui porte le nom de relation de Chasles[f].

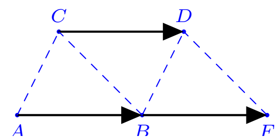
Proposition 3.4 (Relation de Chasles)**.** *Pour tous points A, B, C du plan ou de l'espace, on a*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

f. C'est ce que nous avons pris comme point de départ de notre définition de la somme.

Passons maintenant à la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. En ce qui concerne les nombres entiers, la multiplication remplace simplement l'addition : on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout vecteur libre $\overrightarrow{u}$:

$$n\overrightarrow{u} = \underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n\,\text{termes}}.$$



Dans cette figure, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est représenté par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$. On a donc $2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AF}$.

On étend cette définition en posant $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $(-n)\overrightarrow{u} = -(n\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement, on étend la multiplication aux nombres rationnels en définissant, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}_0$ $\frac{p}{q}\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur $\overrightarrow{v}$ satisfaisant $q\overrightarrow{v} = p\overrightarrow{u}$ [g]. Là, on doit encore étendre aux nombres réels, mais c'est plus délicat. Je vous passe les détails.

On peut démontrer que les opérations que nous venons d'introduire ont de bonnes propriétés. Je ne donne pas la démonstration, mais je vous fais remarquer que la plupart des propriétés sont bien connues (voir le chapitre sur les nombres), et permettent de calculer avec des vecteurs.

Proposition 3.5. *Les opérations que nous venons d'introduire sur les vecteurs libres ont les propriétés suivantes* [h].

1. *L'addition de deux vecteurs est un vecteur et la multiplication d'un vecteur par un nombre est un vecteur ;*
2. *L'addition est associative : on a* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ *pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ *;*
3. *L'addition admet un élément neutre* $\overrightarrow{0}$ *satisfaisant* $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ *pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *;*
4. *Tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *admet un opposé* $-\overrightarrow{u}$ *pour l'addition, satisfaisant* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *;*
5. *L'addition est commutative : on a* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ *pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *;*
6. *La multiplication scalaire distribue l'addition des vecteurs : on a* $r(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = r\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v}$ *pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $r \in \mathbb{R}$ *;*
7. *La multiplication scalaire distribue l'addition des réels : on a* $(r + s)\overrightarrow{u} = r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{u}$ *pour tous* $r, s \in \mathbb{R}$ *et tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *;*
8. *On a* $r(s\overrightarrow{u}) = (rs)\overrightarrow{u}$ *pour tous* $r, s \in \mathbb{R}$ *et tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *;*
9. *On a* $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ *pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$*.*

En combinant les deux opérations, on peut former des multiples et des sommes de plusieurs vecteurs. Les règles de priorité concernant les additions, multiplications et parenthèses sont celles déjà rencontrées dans es chapitres précédents. Voici une définition formelle concernant cette construction. On remarquera que vu l'associativité de l'addition, il n'est en général pas nécessaire d'utiliser des parenthèses.

Définition 3.6. La combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ avec les coefficients réels $r_1, \ldots, r_n$ est le vecteur

$$\overrightarrow{u} = r_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + r_n\overrightarrow{u_n}.$$

3.4 Composantes de vecteurs dans un repère et opérations

Plaçons nous dans le plan, et considérons un repère du plan déterminé par une origine O et deux droites sécantes en O sur lesquelles on a porté deux points, E_1 et E_2 fixant les unités. Les trois points définissant le repère permettent de définir des vecteurs libres $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$ [i].

g. Son existence découle du théorème de Thalès.

h. En mathématiques, tout ensemble (non vide) muni de deux opérations ayant ces propriétés est appelé espace vectoriel.

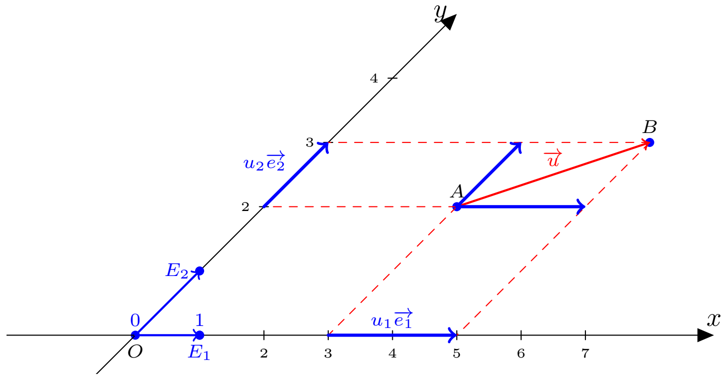
i. Ces vecteurs sont parfois appelés vecteurs de base, et le couple $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une *base* des vecteurs du plan.

Proposition 3.7. *Tout vecteur (libre) $\overrightarrow{u}$ du plan se décompose de manière unique comme*

$$\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2},$$

où u_1, u_2 sont des nombres réels. On note $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$. Ce sont les composantes de $\overrightarrow{u}$ dans le repère.

Démonstration. L'existence d'une décomposition se comprend facilement : puisque les axes du repère se coupent, on peut toujours tracer des parallèles à ces axes pour former des parallélogrammes. Si on se donne un vecteur libre $\overrightarrow{AB}$, il suffit alors de faire en sorte que $[A, B]$ soit une diagonale du parallélogramme ainsi construit, comme dans la figure suivante :



Bien sûr, il y a des cas particuliers quand le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est parallèle à un des axes : dans ce cas le parallélogramme ainsi construit est plat, mais alors on voit que l'on peut en construire un autre qui prendra le relais. Enfin, quand $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est alors nul, mais dans ce cas, c'est $0\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2}$. Cette décomposition est indépendante du représentant utilisé pour les calculer.

En ce qui concerne l'unicité de la décomposition, on remarque que si on avait un vecteur qui s'écrivait de deux façons distinctes comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$, par exemple

$$\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} = u_1'\overrightarrow{e_1} + u_2'\overrightarrow{e_2},$$

alors on aurait $(u_1 - u_1')\overrightarrow{e_1} = (u_2' - u_2)\overrightarrow{e_2}$, mais on voit qu'aucun multiple de $\overrightarrow{e_1}$ ne peut être multiple de $\overrightarrow{e_2}$, sauf les multiples nuls. On a donc $u_1 = u_1'$ et $u_2 = u_2'$. □

Les composantes de vecteurs jouent un rôle très important dans la suite de ce cours, en particulier à cause de leur comportement vis-à-vis des combinaisons linéaires.

Proposition 3.8. *Si $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$ et $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} : (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \quad \text{et} \quad r\overrightarrow{u} : (ru_1, ru_2). \tag{1}$$

En particulier pour tous $r, s \in \mathbb{R}$,

$$r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} : (ru_1 + sv_1, ru_2 + sv_2).$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$, alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1)\overrightarrow{e_1} + (u_2 + v_2)\overrightarrow{e_2}, \quad \text{et} \quad r\overrightarrow{u} = (ru_1)\overrightarrow{e_1} + (ru_2)\overrightarrow{e_2},$$

et on a bien ce qu'il fallait. □

Les opérations présentées en (1) sont suffisamment importantes pour justifier une définition.

Définition 3.9. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est formé par les couples de nombres réels :

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Il est muni d'une addition et d'une multiplication par les réels définies par (1) :

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2),$$

pour tous $r, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Ces opérations sur $\mathbb{R}^2$ ont les mêmes propriétés que les opérations sur les vecteurs du plan, et en font donc un espace vectoriel. On peut alors y définir les combinaisons linéaires, et traduire la proposition 3.8 :

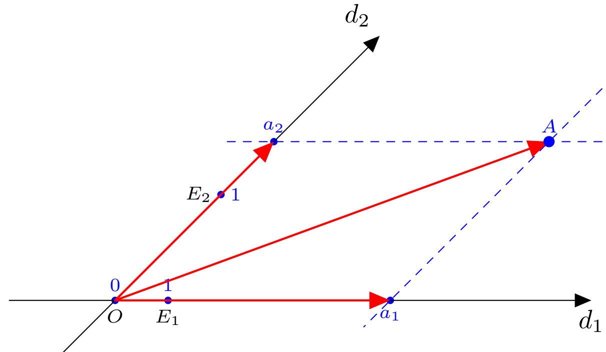
"*Les composantes d'une somme de vecteurs sont la somme des composantes, les composantes d'un multiple d'un vecteur sont données par le multiple de ses composantes.*"

Exemple 3.10. Si dans un repère, on a $\overrightarrow{u} : (4,5)$ et $\overrightarrow{v} : (2,3)$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} : (4,5) + (2,3) = (6,8)$. De même, $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} : (8,10) - (6,9) = (2,1)$.

Cette définition des composantes permet de faire le lien avec les coordonnées des points qui permettent de représentent un vecteur libre.

Proposition 3.11. *Dans un repère d'origine O, les coordonnées du point A sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans ce repère.*

La preuve consiste à se rappeler les deux définitions. Faisons-le via une représentation graphique, où les deux notions apparaissent :



On a $A : (a_1, a_2)$ et on constate que $\overrightarrow{OA} = a_1\overrightarrow{OE_1} + a_2\overrightarrow{OE_2}$. Cela vient du fait que l'on a construit les coordonnées et la somme des vecteurs avec des parallélogrammes.

Ce résultat nous permet de calculer rapidement les composantes de vecteurs dans un repère.

Proposition 3.12. *Si les points A et B sont donnés par leurs coordonnées dans un repère, disons $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$, alors les composantes de $\overrightarrow{AB}$ dans ce repère sont*

$$\overrightarrow{AB} : (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$ [j]

Démonstration. La relation de Chasles nous donne $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. On obtient le résultat en utilisant la proposition 3.8. □

Exemple 3.13. Si dans un repère, on a $A : (1,2)$, $B : (4,5)$ et $C : (-1,4)$ et $D : (7,8)$, alors on a $\overrightarrow{AB} : (3,3)$, $\overrightarrow{AC} : (-2,2)$ et $\overrightarrow{AD} : (6,6)$. On remarque donc que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Les points A, B et D sont alignés. Cette constatation sera utile pour écrire des équations de droites. On peut aussi calculer les composantes de $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. On trouve $(0,12)$.

Définition 3.14. Soit $[A,B]$ un segment de droite. Le milieu de $[A,B]$ est l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$. On constate donc que M est le milieu de $[A,B]$ si, et seulement si, on a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Quand les points A et B sont donnés par leurs coordonnées dans un repère, il est facile de trouver les coordonnées du milieu M du segment $[A,B]$.

Proposition 3.15. *Si, dans un repère du plan, on a $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$, alors dans ce repère, si M est le milieu de $[A,B]$, on a $M : (\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$.*

j. Vous pouvez retenir que $\overrightarrow{AB}$, c'est $B - A$. C'est abusif, car il n'y pas de soustraction définie sur les points, mais c'est quand même l'opération qui est faite sur les coordonnées.

Démonstration. On exprime la condition $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ pour un point M ayant pour coordonnées (m_1, m_2). On obtient la relation

$$(m_1 - a_1, m_2 - a_2) = (b_1 - m_1, b_2 - m_2),$$

qui permet de calculer m_1 et m_2 et d'obtenir le résultat attendu. □

Exemple 3.16. Dans un repère du plan, si on a les points $A : (1, 2)$ et $B : (3, 0)$, alors le milieu du segment $[A, B]$ est le point $M : (\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}) = (2, 1)$.

4 Equations de droites dans le plan

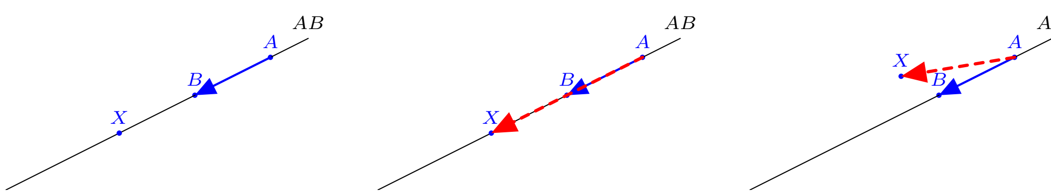
Nous allons maintenant voir comment déterminer une droite à l'aide d'équations, dans un repère du plan. Nous avons déjà rencontré deux façons de se donner une droite : soit en se donnant deux points distincts de cette droite (c'est la droite déterminée par deux points), soit en se donnant un point et une droite parallèle à la droite en question (c'est le postulat célèbre d'Euclide). Ces deux possibilités vont donner lieu à des techniques pour écrire des équations de droites assez semblables. Il est utile de pouvoir écrire des équations à partir de données de nature géométrique et réciproquement, de pouvoir déterminer des caractéristiques géométriques à partir des équations. Pour plus de simplicité, je resterai dans le plan, mais il est facile de voir quels raisonnements s'adaptent à la géométrie dans l'espace.

Je crois utile de préciser ce que sont les équations paramétriques et les équations cartésiennes des droites, et quelle est leur utilité. Sans poser une définition formelle, les équations paramétriques permettent de générer (fabriquer) des coordonnées des points de la droite en assignant des valeurs au paramètre.

Les équations cartésiennes, quant à elles, sont des conditions nécessaires et suffisantes sur les coordonnées d'un point quelconque pour qu'il appartienne à la droite. Elles permettent donc de déterminer facilement si un point appartient à la droite, à partir de ses coordonnées.

4.1 Droite donnée par deux points

On se donne une droite par deux de ses points A et B (distincts). Il faut exprimer qu'un point X appartient à la droite AB. Et l'idée se voit [k] :



Donc on a $X \in AB$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AX}$ est multiple de $\overrightarrow{AB}$. Formellement, on a donc l'équivalence (logique) :

$$\boxed{X \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = r\overrightarrow{AB}.}$$

C'est une *équation paramétrique vectorielle* de la droite AB. Cette équation n'est pas unique, puisque mon voisin peut choisir un autre couple de points de la droite. Il aura une autre condition, mais elle sera équivalente à la mienne.

On peut bien sûr exprimer cette équation dans un repère du plan, à partir des coordonnées de A, B et X. On obtient des ainsi des équations paramétriques cartésiennes. Si dans un repère, on a $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$ (avec $A \neq B$) alors on a toujours, pour un point X quelconque ayant pour coordonnées (x, y) :

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : (x - a_1, y - a_2) = r(b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

k. Et elle peut être démontrée, puisque c'est comme cela que nous avons défini la multiplication scalaire des vecteurs par des nombres.

En développant et en exprimant que deux couples sont égaux si chacune de leurs composantes sont égales, on obtient :

$$\boxed{X : (x,y) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x - a_1 & = & r(b_1 - a_1) \\ y - a_2 & = & r(b_2 - a_2) \end{array} \right.} \tag{2}$$

Ce sont *des équations paramétriques cartésiennes* de AB, qui règlent bien la première question que l'on s'est posée : si on donne des valeurs particulières à r, on trouve des coordonnées de points de AB.

Exemple 4.1. Soient les points A et B donnés par leurs coordonnées dans un repère cartésien : $A : (1,2)$ et $B : (-3,3)$. On a alors

$$X : (x,y) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x - 1 & = & -4r \\ y - 2 & = & r \end{array} \right. \tag{3}$$

De même, si $C : (-3,2)$, on a

$$X : (x,y) \in AC \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{lcl} x - 1 & = & -4r \\ y - 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ces équations sont utiles, mais elles ne permettent pas, sans un minimum de réflexion, de déterminer si le point $D : (9,0)$ ou le point $E : (8,1)$ appartient à AB. Pour résoudre cette question, il faut exprimer une condition équivalente, en éliminant l'utilisation du paramètre r. On peut le faire à la main dans le premier exemple : (x,y) étant fixé, s'il existe un nombre, disons r_0, qui rend vraies les deux égalités, alors on a

$$r_0 = \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{1}.$$

Dès lors, les deux fractions qui apparaissent doivent être égales. Réciproquement, si elles sont égales, leur valeur commune rend vraies les égalités apparaissant dans (3). On a donc une équation de AB :

$$AB \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{1}.$$

On peut maintenant vérifier que $X : (9,0)$ appartient à cette droite, puisque $\frac{9-1}{-4} = \frac{0-2}{1} = -2$.

Dans le deuxième cas, on ne peut pas procéder de la même façon, mais on constate que si $y-2=0$, alors on peut trouver une valeur de r rendant vraie la première équation, et que si $y-2 \neq 0$, une telle valeur n'existe pas. La droite AC admet donc pour équation $y-2=0$. On note

$$AC \equiv y - 2 = 0.$$

En toute généralité, on procède de la même façon pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.2. *Soient A et B donnés par leurs coordonnées $A : (a_1,a_2)$ et $B : (b_1,b_2)$ distincts, alors trois cas peuvent se produire :*

- *Si $b_1 - a_1 \neq 0$ et $b_2 - a_2 \neq 0$: alors*

$$\boxed{X : (x,y) \in AB \Leftrightarrow \frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}.} \tag{4}$$

- *Si $b_1 = a_1$, alors $b_2 - a_2 \neq 0$. Alors AB est parallèle à l'axe des ordonnées et*

$$\boxed{X : (x,y) \in AB \Leftrightarrow x - a_1 = 0.} \tag{5}$$

- *Si $b_2 = a_2$, alors $b_1 - a_1 \neq 0$. Alors AB est parallèle à l'axe des abscisses et*

$$\boxed{X : (x,y) \in AB \Leftrightarrow y - a_2 = 0.} \tag{6}$$

Il n'est pas utile de retenir les trois cas : on peut se dire qu'on applique le cas général (4), et que quand un dénominateur s'annule, on remplace l'équation par l'annulation du numérateur correspondant. On peut aussi écrire (4) sous la forme suivante, qui donne dans tous les cas la bonne équation :

$$\boxed{AB \equiv (b_2 - a_2)(x - a_1) = (b_1 - a_1)(y - a_2)}.$$

Quand $b_1 - a_1 \neq 0$, on retrouve l'équation familière :

$$\boxed{AB \equiv y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1).}$$

Dans ce cas, le nombre

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

est appelé pente de la droite AB ou encore coefficient angulaire. Dans tous les cas, on constate également que la droite AB admet une équation cartésienne de la forme

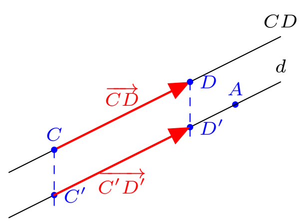
$$AB \equiv ax + by + c = 0,$$

où a et b sont deux nombres tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. C'est l'équation générale d'une droite. Dans le cas où la droite admet une pente, l'équation peut être écrite (en utilisant des équivalences) sous la forme

$$AB \equiv y = mx + p.$$

4.2 Droite déterminée par un point et un vecteur directeur

Passons maintenant à la deuxième façon de se donner une droite. On se donne donc une droite CD et un point A. Il existe une seule droite d contenant A et parallèle à CD. On dit que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de d (puisqu'il en détermine la direction). De manière générale, un vecteur directeur d'une droite d est un vecteur libre représenté par un couple de points de la droite. Voici une représentation de cette situation.



Le vecteur libre $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ est aussi représenté par $\overrightarrow{C'D'}$, où C' et D' appartiennent à d. Il nous suffit donc de reprendre les développements précédents en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur libre $\overrightarrow{v}$.

Rappelons le cas de l'équation cartésienne.

Proposition 4.3. *Soient un point A et un vecteur $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ donnés par leurs coordonnées et composantes $A : (a_1, a_2)$ et $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$. Trois cas peuvent se produire concernant la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$:*

– *Si $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$: alors*

$$\boxed{X : (x, y) \in d \Leftrightarrow \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}.} \tag{7}$$

– *Si $v_1 = 0$, alors $v_2 \neq 0$. Alors d est parallèle au deuxième axe et*

$$\boxed{X : (x, y) \in d \Leftrightarrow x - a_1 = 0.} \tag{8}$$

– *Si $v_2 = 0$, alors $v_1 \neq 0$. Alors d est parallèle au premier axe et*

$$\boxed{X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow y - a_2 = 0.} \tag{9}$$

Les mêmes remarques que celles formulées ci-dessus s'appliquent : il suffit de retenir le cas général, et de voir ce qu'il faut faire quand une composante du vecteur directeur s'annule. On peut aussi remarquer que si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de d, tout multiple de $\overrightarrow{v}$ l'est aussi. On peut aussi écrire une équation qui prend tous les cas en compte.

$$\boxed{AB \equiv v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2)}.$$

4.3 Equation générale d'une droite

Nous venons de voir que toute droite admet une équation du type

$$ax + by + c = 0,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$. Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une telle équation est une droite. On peut le montrer en trouvant deux points A et B dont les coordonnées satisfont l'équation et en écrivant l'équation de AB.

Proposition 4.4. *L'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont $ax + by + c = 0$ est une droite, dont la pente est donnée (si $b \neq 0$) par $m = -\frac{a}{b}$ et dont un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{v} : (-b, a)$.*

Démonstration. Si $b \neq 0$, on vérifie que les coordonnées des points A et B définies par $A : (0, -\frac{c}{b})$ et $B : (1, -\frac{a+c}{b})$ satisfont l'équation. On a $\overrightarrow{AB} : (1, -\frac{a}{b})$. Donc on a

$$AB \equiv \frac{x - 0}{1} = \frac{y + \frac{c}{b}}{-\frac{a}{b}},$$

avec la convention adéquate si $a = 0$. Cette équation, assortie de cette convention, est visiblement équivalente à $ax + by + c = 0$. Le vecteur $b\overrightarrow{AB} : (b, -a)$ est aussi un vecteur directeur de cette droite.

Si $b = 0$, alors $a \neq 0$, et on peut faire de même avec les points $A : (-\frac{c}{a}, 0)$ et $B : (-\frac{c}{a}, 1)$. On voit que $(0, 1)$ est un vecteur directeur de cette droite, de même que $(0, a)$. Quand elle existe, on trouve facilement la pente proposée dans l'énoncé. □

Cette proposition montre également que les composantes des vecteurs directeurs de la droite

$$d \equiv ax + by + c = 0 \tag{10}$$

sont exactement les solutions de l'équation

$$ax + by = 0. \tag{11}$$

Enfin, dans le cas où l'équation se présente sous la forme $y = mx + p$, on applique la méthode générale pour voir qu'un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{v} : (1, m)$.

4.4 Conditions de parallélisme

Puisque les équations cartésiennes permettent de déterminer parfaitement les droites, il doit être possible d'exprimer le parallélisme à l'aide de ces équations. Dans la section précédente, nous avons déjà constaté le phénomène suivant.

Proposition 4.5. *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles admettent les mêmes ensembles de vecteurs directeurs.*

En utilisant le fait que les vecteurs directeurs d'une droite sont tous multiples l'un de l'autre, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.6. *Les droites $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si, et seulement si, (a', b') est multiple de (a, b). En particulier, les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, on a $m = m'$.*

Démonstration. Un vecteur directeur de d est donné par $\overrightarrow{v} : (-b, a)$, tandis qu'un vecteur directeur de d' est donné par $\overrightarrow{v'} : (-b', a')$. Dire que ces vecteurs sont multiples l'un de l'autre est équivalent à dire que (a, b) est multiple de (a', b'). Pour le cas particulier, on applique le cas général à $(1, m)$ et $(1, m')$. Ils sont multiples l'un de l'autre si, et seulement si, $m = m'$. □

Cette proposition permet de déterminer facilement si deux droites sont ou non parallèles. Dans le cas où on doit écrire l'équation d'une droite parallèle à $d \equiv ax + by + c = 0$, on peut choir le multiple égal à 1, et toute parallèle d' à d admet donc une équation du type $d' \equiv ax + by + c' = 0$. En particulier, l'équation (11) est l'équation de la droite parallèle à d caractérisée par (10), et passant par l'origine du repère.

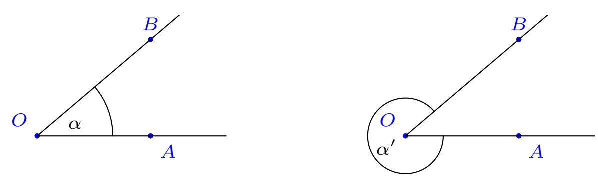
Exemple 4.7. Les droites $d \equiv 3x - 2y = 6$ et $d' \equiv 9x - 6y + 3 = 0$ sont parallèles. La droite d'' parallèle à d et passant par le point $A : (2, 2)$ admet une équation de la forme $3x - 2y = k$, où k est un nombre réel (vu le parallélisme) et on doit avoir $k = 2$ puisque A appartient à d''.

5 Géométrie métrique

Nous avons jusqu'à présent considéré la partie de la géométrie qui ne fait pas intervenir les notions d'angles et de distance. Comme nous l'avons dit, cette partie sert lorsqu'il s'agit de représenter géométriquement des couples de nombres qui ne sont pas naturellement exprimés dans les mêmes unités (pensez aux fonctions et à leurs représentations graphiques). Quand on aune situation bidimensionnelle où les couples de nombres sont exprimés dans les mêmes unités, par exemple lorsqu'une force agit sur les points du plan ou de l'espace, ou quand on est dans une situation purement géométrique, les notions d'angle et de distance peuvent être définies. On est donc dans un cadre plus restreint, où ce que nous avons revu dans les sections précédentes s'applique, mais où il y a de nouveaux objets. Je vais me placer dans le cadre des situations purement géométriques, et vous référer au cours de physique pour les applications physiques. Sachez cependant que si je parle de la longueur d'un vecteur, qui se confond avec sa norme en géométrie, en physique, on ne garde que la dénomination de norme et, quand il s'agit d'une force, cette norme représente l'intensité de la force.

5.1 Théorème de Pythagore, repère orthonormé et calcul des distances

Dans le plan, un angle (non orienté) est une portion de plan déterminée par deux demi-droites de même origine :



Il y en a deux, et on doit préciser lequel on considère, généralement en dessinant un arc de cercle. L'angle (non orienté) est indépendant de l'ordre dans lequel on précise les demi-droites. Il se mesure en degrés, avec un rapporteur. Il y a bien sûr des cas particuliers importants :

- L'angle nul correspond à des demi-droites confondues. Cette situation correspond aussi à l'angle plein : 360° ;
- L'angle plat correspond à deux demi-droites distinctes $[O, A$ et $[O, B$ telles que A, O, B soient alignés. Il vaut 180° ;
- Un angle droit correspond à 90° (ou 270°).

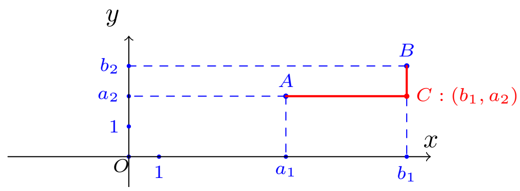
Deux droites sécantes définissent quatre angles. Elles sont perpendiculaires si ces angles sont droits.

En géométrie, la distance entre deux points A et B dans le plan ou dans l'espace est mesurée avec une latte graduée. Elle s'exprime en cm, m, ... On la note $d(A, B)$ ou encore $\overline{AB}$. Un premier lien important entre distances et angles est donné par le théorème de Pythagore.

Théorème 5.1 (Pythagore)**.** *Un triangle ABC est rectangle en C si, et seulement si on a*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

On souhaite utiliser ce théorème pour calculer des distances entre points, il est utile d'avoir des droites perpendiculaires. C'est pourquoi on définit la notion de repère orthonormé du plan. C'est un repère dont les axes sont perpendiculaires et où les points E_1, E_2 marquant les unités sont à la même distance de O.



Les longueurs des segments $[A, C]$ et $[C, B]$ sont données par $|b_1 - a_1|$ et $|b_2 - a_2|$ respectivement. En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.2. *Dans un repère orthonormé du plan, la distance du point A ayant pour coordonnées (a_1, a_2) au point B ayant pour coordonnées (b_1, b_2) est donnée par*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{12}$$

Exemple 5.3. Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre $A : (-2, 4)$ et $B : (3, 5)$ est

$$\sqrt{(3 - (-2))^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{26}.$$

5.2 La notion métrique de vecteur, la norme et les angles

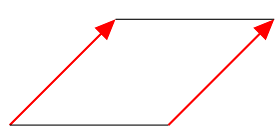
En géométrie métrique, si on se donne un vecteur par un couple de points $\overrightarrow{AB}$, on peut lui associer la distance de A à B. Elle se calcule dans un repère orthonormé par la formule (12). Elle est appelée longueur ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et notée $|\overrightarrow{AB}|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$. On a donc $\overline{AB} = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \|\overrightarrow{AB}\|$. Cette définition s'applique aux vecteurs libres, puisque si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent le même vecteur libre, ils ont les mêmes composantes dans un repère orthonormé quelconque et donc la formule (12) conduit au même résultat.

En sciences, on parle rarement de longueur, mais bien de norme. Si $\overrightarrow{v}$ modélise une force, alors sa norme est son intensité (et s'exprime donc dans les unités adéquates).

Nous avons défini un vecteur libre comme un ensemble de couples équipollents. En géométrie euclidienne (métrique), puisqu'on a la notion de norme à disposition, on peut utiliser une autre caractérisation des parallélogrammes : c'est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Un vecteur non nul est caractérisé par :

1. sa direction (une droite dont c'est un vecteur directeur) ;
2. sa norme ;
3. son sens.

Voici une représentation de ce fait.



On peut également définir l'angle entre deux vecteurs libres non nuls. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, étant donné un point A fixé, il existe un point B et un point C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. L'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est alors l'angle (non orienté) entre $[A, B$ et $[A, C$. Bien sûr, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas représentés par des vecteurs liés aux même point, il est bien difficile de dire quel angle on choisit. Il faut alors une convention et on décide de choisir le plus petit. Les propriétés classiques des angles, sur lesquelles nous reviendrons dans le module suivant, permettent de démontrer que le résultat est indépendant du point A. Voici une représentation graphique de cette définition.

A gauche : les vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. A droite : ces vecteurs représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, les demi-droites correspondantes et l'angle α.

Cette notion d'angle permet de définir l'orthogonalité (la perpendicularité) des vecteurs.

Définition 5.4. Des vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si l'angle qu'ils définissent vaut 90°. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Si on se place dans un repère orthonormé, il n'est pas difficile de vérifier l'orthogonalité de vecteurs, en appliquant le résultat suivant.

Proposition 5.5. *Des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnés par leurs composantes dans un repère orthonormé $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$ sont orthogonaux si, et seulement si, on a*

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0. \tag{13}$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors la condition (13) est satisfaite. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls, alors on peut les lier au point $A = O$, l'origine du repère. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $B : (u_1, u_2)$ et de même $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ pour $C : (v_1, v_2)$. Si les demi-droites $[A, B$ et $[A, C$ sont perpendiculaires, alors par le théorème de Pythagore, on a

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

On développe cette condition et on trouve

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2, \tag{14}$$

ce qui conduit au résultat annoncé.

Réciproquement, si la condition (13) est satisfaite, alors (14) est satisfaite. Dès lors, soit $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, soit ces vecteurs définissent un triangle ABC tel que

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. □

Cette condition d'orthogonalité de vecteurs permet d'écrire facilement la condition de perpendicularité de droites données par leurs équations cartésiennes dans un repère orthonormé.

Proposition 5.6. *Si on se place dans un repère orthonormé, les droites $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si, et seulement si, on a*

$$a\,a' + b\,b' = 0.$$

En particulier, des droites d et d' ayant pour équations respectives (toujours dans un repère orthonormé) $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, on a

$$m\,m' + 1 = 0.$$

Démonstration. Vu la définition des angles de vecteurs et la définition de la perpendicularité des droites, on a que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Les droites données dans l'énoncé ont pour vecteurs directeurs $(-b, a)$ et $(-b', a')$. On leur applique la proposition précédente et on obtient que ces vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si,

$$(-b)(-b') + aa' = 0.$$

Le cas particulier en découle directement. □

Exemple 5.7. Si on se place dans un repère orthonormé, les droites $d \equiv 12x - 22y + 3 = 0$ et $d' \equiv 11x + 6y = 2$ sont perpendiculaires. Les droites $d_1 \equiv y = 2x + 4$ et $d_2 \equiv -\frac{1}{2}x + 1$ sont perpendiculaires. Les droites $d_3 \equiv y = 4x + 3$ et $d_4 \equiv x = -\frac{1}{4}y + 2$ ne le sont pas.

5.3 Les cercles et leurs équations

Il sera utile pour la suite, et notamment en trigonométrie, d'écrire l'équation de certains cercles. Commençons par rappeler la définition.

Définition 5.8. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble de tous les points X du plan qui sont à une distance r de C.

Dans un repère orthonormé du plan, si $C : (c_1, c_2)$, alors un point X de coordonnées (x, y) est sur le cercle en question si, et seulement si on a

$$d(X, C)^2 = r^2.$$

On obtient donc une équation cartésienne du cercle :

$$\mathcal{C} \equiv (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$