5. Trigonométrie

1 Introduction

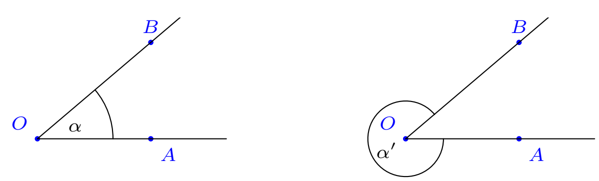
Nous allons revoir ici les notions élémentaires de trigonométrie. Elles sont utiles en physique, par exemple pour le calcul de la composition de forces, ou encore en optique. Les relations de trigonométrie que nous allons voir découlent directement de la définition des sinus et cosinus d'un angle. Elles permettent de donner des relations entre des distances et des angles, qui permettent de faire une économie de mesures ou de formuler des lois physiques. Enfin, les fonctions trigonométriques, qui pourront être définies à partir des notions introduites ici permettront de modéliser les phénomènes périodiques.

Nous commençons par rappeler quelques notions sur les angles non orientés et orientés, puis la description d'angles en termes de radians et enfin nous donnons les définitions des nombres trigonométriques. Nous passons ensuite en revue la relation fondamentale de la trigonométrie, les relations entre nombres trigonométriques (pour les angles dits associés), ainsi que l'utilisation de la trigonométrie dans les triangles rectangles.

2 Angles non orientés du plan

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent la notion d'angle non orienté du plan. Je vous la rappelle et je donne les propriétés qui avaient été annoncées dans le module précédent.

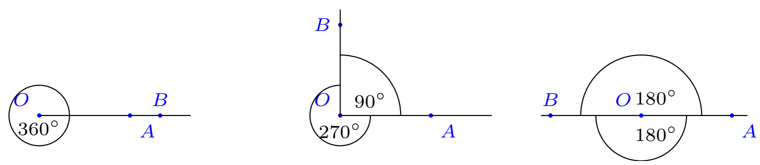
Dans le plan, un angle (non orienté) est une portion de plan déterminée par deux demi-droites de même origine :



Bien sûr, deux demi-droites de même origine déterminent deux angles, comme le montre la figure précédente. On précise lequel on considère, généralement en dessinant un arc de cercle, comme cela a été fait ci-dessus.

La mesure d'un angle est appelée amplitude. On mesure un angle à l'aide d'un rapporteur. Cette mesure est exprimée en degrés et est indépendante de l'ordre dans lequel on précise les demi-droites qui définissent l'angle.

Voici quelques angles particuliers et leur mesure :



- L'angle nul correspond à des demi-droites confondues. Cette situation correspond aussi à l'angle plein : $360°$;
- L'angle plat correspond à deux demi-droites distinctes $[O, A$ et $[O, B$ telles que A, O, B soient alignés. Il vaut $180°$;
- Un angle droit correspond à $90°$ (ou $270°$).

Remarque 2.1. On constate que la somme des amplitudes des deux angles déterminés par deux demi-droites vaut toujours 360°. On obtient donc l'amplitude de l'un en fonction de l'amplitude de l'autre, et on n'a donc besoin que de connaître par exemple la plus petite des deux. C'est pourquoi on définit parfois (dans d'autres références) l'angle non orienté comme un angle dont l'amplitude est comprise entre 0° et 180°. L'angle est alors toujours le “plus petit” des deux angles que nous avons représentés. C'est ce qui nous a permis de définir l'angle non orienté de deux vecteurs dans le plan.

La géométrie du triangle nous permet de visualiser facilement des angles de 60° et 30°. En effet, puisque la somme des amplitudes des angles (intérieurs) d'un triangle vaut 180°, les trois angles d'un triangle équilatéral ont une amplitude de 60°, et en considérant la bissectrice d'un angle d'un tel triangle, qui n'est autre que la médiane issue du sommet considéré, on obtient des angles de 30°, comme le montre la figure suivante.

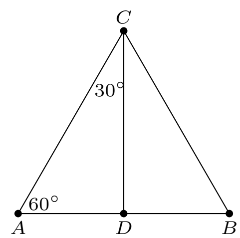


FIGURE 1 – Un triangle équilatéral et des angles de 60° et 30°.

Enfin, il est utile pour les applications en physique de se rappeler que certaines situations géométriques planes donnent lieu à des angles de même amplitude. C'est le cas quand deux droites parallèles du plan sont coupées par une troisième droite, dite sécante. Voici une représentation de ce phénomène.

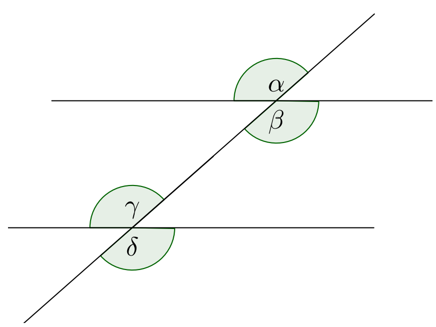


FIGURE 2 – Des angles égaux déterminés par une sécante sur des parallèles.

Dans cette situation, les angles α et β sont dits *opposés par le sommet*, les angles α et γ, de même que les angles β et δ sont dits *correspondants*, les angles β et γ sont *alternes-internes*, tandis que les angles α et δ sont *alternes-externes*.

Nous pouvons constater sur cette représentation la proposition suivante. Il est utile de pouvoir reconnaître quand la situation géométrique se présente et d'en déduire l'égalité des angles qui y apparaissent.

Proposition 2.2. *Une sécante détermine avec deux droites parallèles des angles opposés par le sommet, alternes internes, correspondants et alternes externes de même amplitude.*

Il y a bien d'autres situations où l'on retrouve des angles égaux en géométrie. C'est notamment le cas quand on est en présence de triangles *isométriques* ou *semblables*. On peut parfois démontrer que des angles sont soit égaux, soit supplémentaires [a], c'est le cas notamment pour les angles dont les côtés sont parallèles deux à deux ou perpendiculaires deux à deux.

Proposition 2.3. *Des angles à côtés parallèles sont soit égaux, soit supplémentaires. Des angles à côtés perpendiculaires sont soit égaux, soit supplémentaires.*

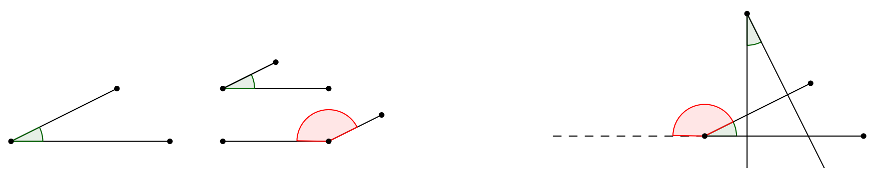


Figure 3 – Des angles à côtés parallèles et des angles à côtés perpendiculaires

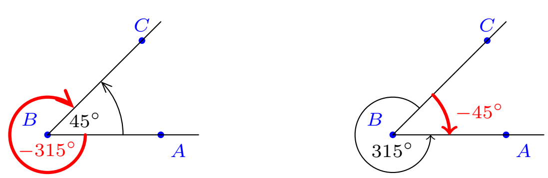
3 Angles orientés du plan

On définit classiquement deux sens de rotation dans le plan. Le sens *positif* est par convention le sens contraire des aiguilles d'une montre et le sens *négatif* est le sens des aiguilles d'une montre. On définit alors les angles orientés en utilisant ce sens de rotation : les angles ont une amplitude positive quand on tourne dans le sens positif et négative si on tourne dans le sens négatif.

L'angle $\widehat{ABC}$ a une amplitude de 45 degrés, puisqu'on tourne de la demi-droite $[B, A$ vers la demi-droite $[B, C$ dans le sens positif. L'angle $\widehat{CBA}$ a une amplitude de 315 degrés puisqu'on tourne de la demi-droite $[B, C$ vers la demi-droite $[B, A$ dans le sens positif.

Les exemples ci-dessus montrent bien que l'ordre a maintenant de l'importance puisque les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBA}$ ont maintenant des amplitudes différentes.

Cependant nous avons, comme pour les angles non orientés, le choix de tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour aller de la demi-droite $[B, A$ vers la demi-droite $[B, C$. On représente cette situation de la manière suivante.



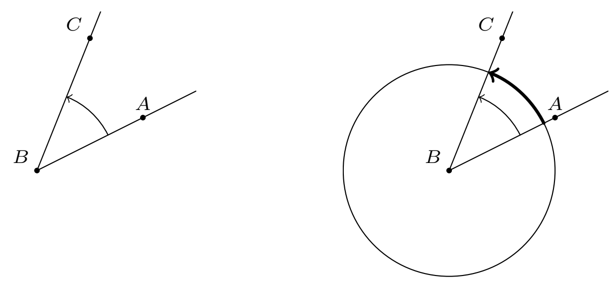
L'angle que l'on considère est marqué par un arc orienté rouge et plus épais. Son amplitude est négative puisqu'on suit le sens des aiguilles d'une montre. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut alors $-315°$ et l'angle $\widehat{CBA}$ vaut également $-45°$.

a. Des angles sont supplémentaires si la somme de leurs amplitudes vaut 180°.

Remarque 3.1. Si on se limite à la situation géométrique représentée par les demi-droites, rien ne permet de choisir entre l'arc dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre. C'est pourquoi on peut décider *par convention* de toujours choisir l'arc suivant le sens trigonométrique positif, et calculer l'angle orienté entre 0° et 360°. L'autre mesure est alors obtenue en retranchant 360° à cette mesure. Ce choix n'aura pas de conséquences pour la théorie qui suit.

4 Degrés et radians

Avant d'en arriver à la définition des nombres trigonométriques, il est encore nécessaire de rappeler une autre façon de mesurer des angles. Si on se donne un angle $\widehat{ABC}$, on peut tracer un cercle de rayon 1 centré en B. L'angle intercepte alors un arc de cercle. La longueur de l'arc de cercle est alors proportionnelle à la mesure de l'angle. Cette longueur est la mesure de l'angle en radians.



Puisque la mesure des angles reste inchangée quand on leur applique une translation ou une rotation, on peut également convenir de tracer une fois pour toutes le cercle de rayon 1 centré en un point O donné, de fixer un point sur le cercle (disons E_1) qui nous servira d'origine et de *déplacer* tous les angles sur le cercle comme indiqué dans la figure suivante. Cette donnée d'un cercle, muni d'un point origine, est équivalente à la donnée d'un cercle et d'un repère orthonormé (positif) dont l'origine est le centre du cercle. Ce cercle de rayon 1, accompagné d'un repère orthonormé est appelé *cercle trigonométrique*.

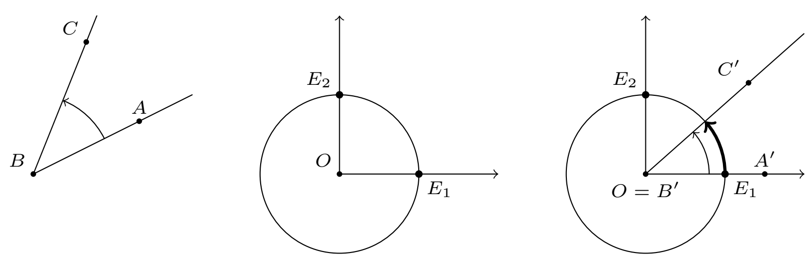


FIGURE 4 – Un angle, le cercle trigonométrique, et enfin l'angle (orienté) déplacé sur ce cercle

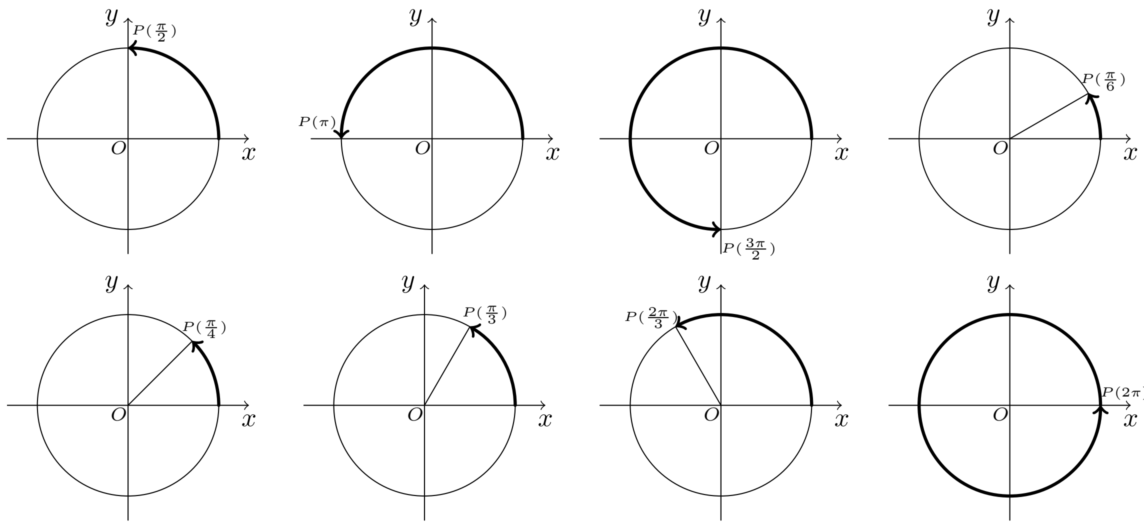
On constate qu'un angle de 180° correspond à la longueur d'un demi-cercle, c'est à dire à une longueur d'arc égale à π, puisque le cercle est de rayon 1.

Vu la proportionnalité de l'angle et de la longueur d'arc, un degré correspond à une longueur d'arc de $\frac{\pi}{180}$. On a donc la formule de conversion de degrés en radians et inversement de radians en degrés. [b]

Proposition 4.1. *Un angle dont l'amplitude en degrés est donnée par* $\alpha \in [0°, 360°]$ *a une amplitude exprimée en radians par* $a = \frac{\alpha\pi}{180}$. *Réciproquement, un angle dont l'amplitude en radians est donnée par* $a \in [0, 2\pi]$ *a une amplitude en degrés égale à* $\alpha = \frac{180a}{\pi}$.

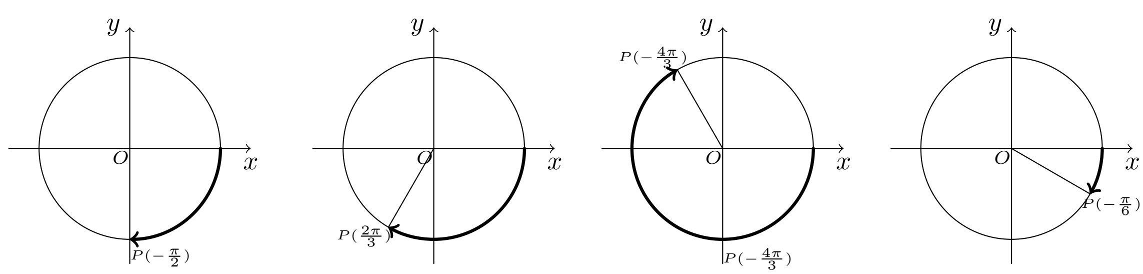
Il est utile de connaître ces formules de conversion. Mais il est également utile de repérer sur le cercle trigonométrique les points déterminés par des longueurs d'arc classiques. Dans les figures qui suivent, on note $P(\alpha)$ le point du cercle déterminé par la longueur d'arc α.

b. C'est tout ce qu'il y a à retenir si on utilise facilement la proportionnalité.



Remarque 4.2. Il faut faire attention aux points cardinaux, à savoir les intersections du cercle avec les axes. Ils sont repérés d'une part par l'arc de cercle et l'angle correspondant et d'autre part par leurs coordonnées cartésiennes, aussi visibles sur le dessin. Ainsi, le point de coordonnées cartésiennes $(0, 1)$ est généralement noté 1 sur l'axe des ordonnées, mais correspond au radian $\frac{\pi}{2}$. Il ne faut pas confondre.

Comme pour les angles orientés, on compte également les longueurs d'arc négativement lorsqu'on tourne dans le sens trigonométrique négatif. Cela permet d'étendre la correspondance degrés/radians. Voici quelques exemples.



On a ainsi associé un point sur le cercle (et donc un angle) à tout nombre réel compris entre -2π et 2π. On constate que le même point sur le cercle correspond à deux nombres dans cet intervalle : on a par exemple $P(\frac{2\pi}{3}) = P(-\frac{4\pi}{3})$, et $P(\frac{3\pi}{2}) = P(-\frac{\pi}{2})$. C'est le cas pour les nombres dont la différence vaut 2π. Il y a simplement une longueur d'arc valant *un tour de cercle* entre les points correspondants à $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}$.

Cette constatation nous amène naturellement à associer un point sur le cercle à tout nombre réel. Si $\alpha > 0$, le point $P(\alpha)$ associé à α est obtenu en parcourant la longueur α dans le sens trigonométrique positif, et en faisant éventuellement plusieurs fois le tour du cercle. Si α est négatif, on fait de même en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et en parcourant la longueur d'arc $|\alpha|$.

Il est alors clair que deux nombres réels qui sont égaux à un multiple de 2π près déterminent le même point sur le cercle. En d'autres termes, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $P(\alpha + k2\pi) = P(\alpha)$. [c]

5 Nombres trigonométriques

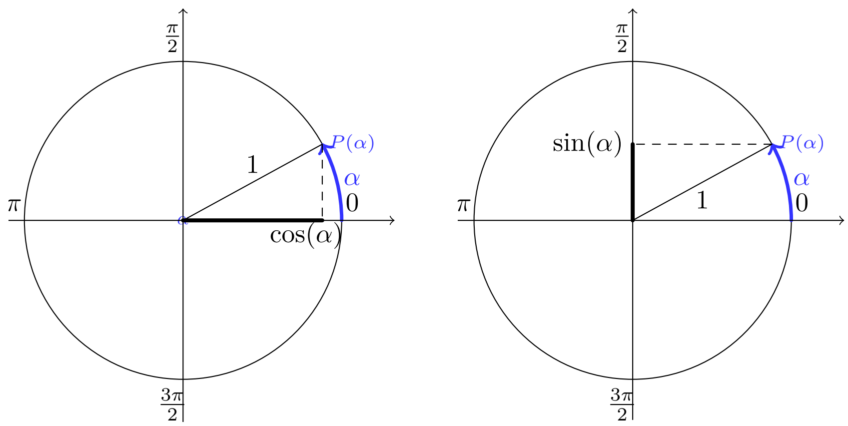
On peut enfin définir les nombres $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On commence par considérer le point $P(\alpha)$ sur le cercle qui correspond à α.

c. Ces tours supplémentaires semblent ne servir à rien ici. Ils sont pourtant particulièrement utiles pour résoudre des équations trigonométriques et pour modéliser des phénomènes périodiques.

Définition 5.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les nombres $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point $P(\alpha)$ dans le repère orthonormé définissant le cercle trigonométrique. On a donc

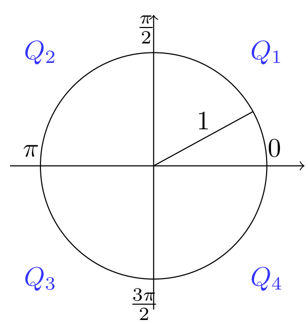
$$P(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

Voici une représentation graphique de ces définitions, qu'il est important de garder à l'esprit. Il faut aussi remarquer que les coordonnées d'un point ont un signe. Selon le quadrant dans lequel ce point se trouve, même si des segments et leurs longueurs sont représentés sur le graphique suivant.



Il est important de remarquer que l'on mesure d'une part une longueur d'arc sur le cercle (ou un angle défini en radians), à savoir α, et des nombres sur les axes, à savoir $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. Il faut donc être prudent pour les points qui sont à la fois sur les axes et sur le cercle, comme déjà indiqué plus haut.

Le repère orthonormé donné avec le cercle trigonométrique définit quatre *quadrants*. Chaque angle exprimé en radians définit un point dans un de ces quadrants et par abus de langage, on parlera d'angle dans le premier (2e, 3e, 4e) quadrant si le point correspondant est dans ce quadrant. Cela permet de trouver le signe de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ très facilement en fonction de α.

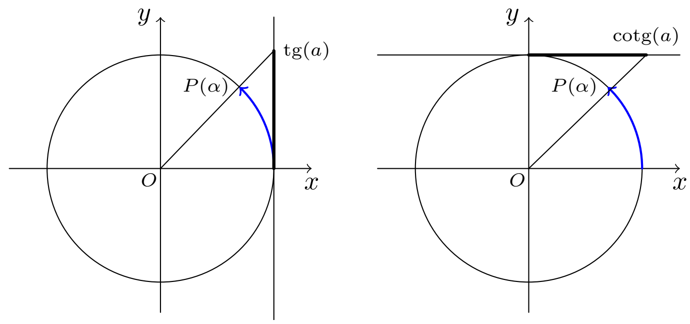


Enfin, à partir de ces nombres, on peut définir les nombres tangente et cotangente de α par

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Bien sûr, la tangente de α est définie uniquement si $\cos(\alpha) \neq 0$ et la cotangente de α uniquement si $\sin(\alpha) \neq 0$.

Ces nombres peuvent également être représentés sur le cercle trigonométrique, en utilisant les similitudes des triangles. Pour représenter $\operatorname{tg}(\alpha)$, il faut pour cela tracer une tangente au cercle au point de coordonnées $(1, 0)$, l'orienter, et la graduer. Tout point de cette droite est alors associé à un nombre réel. Pour représenter $\operatorname{cotg}(\alpha)$, c'est la même procédure, mais on trace une tangente au cercle au point de coordonnées $(0, 1)$.



Ainsi nous avons défini quatre fonctions [d] sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \sin(\alpha)$, avec $\mathrm{dom}_{\sin} = \mathbb{R}$;
2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \cos(\alpha)$, avec $\mathrm{dom}_{\cos} = \mathbb{R}$;
3. $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \mathrm{tg}\,(\alpha)$, avec $\mathrm{dom}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \mathrm{cotg}\,(\alpha)$, avec $\mathrm{dom}_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Il est utile de connaître les relations entre ces différentes fonctions, ainsi que leurs valeurs pour certains angles particuliers. Remarquons que, puisque α et $\alpha + k(2\pi)$, pour k entier, définissent le même point sur le cercle, ils ont même sinus, cosinus, tangente et cotangente. On obtient ainsi la périodicité des fonctions trigonométriques. [e]

Proposition 5.2 (Périodicité)**.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a (chaque fois que les expressions sont définies)*

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha), \quad \textit{et} \quad \mathrm{tg}\,(\alpha + 2k\pi) = \mathrm{tg}\,(\alpha).$$

D'autre part, puisque $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ est le couple de coordonnées d'un point du cercle de rayon 1 centré à l'origine du repère, on obtient la célèbre formule suivante (en utilisant le théorème de Pythagore ou les formules de géométries analytique qu'il implique).

Proposition 5.3 (Formule fondamentale de la trigonométrie)**.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

En considérant les symétries orthogonales par rapport aux axes du repère, on peut lier le sinus et le cosinus d'un angle α à différents angles qui lui sont associés. Ces formules sont reprises dans la proposition suivante.

Proposition 5.4 (Angles associés)**.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

1. *La formule pour l'angle opposé :*

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(-\alpha) = \sin(\alpha).$$

2. *La formule pour l'angle supplémentaire :*

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha).$$

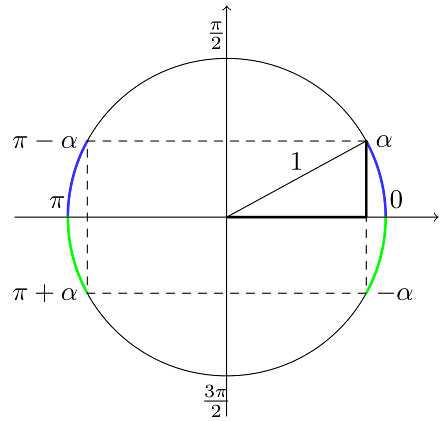
3. *La formule pour l'angle antisupplémentaire [f] :*

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha).$$

Il est plus utile de pouvoir retrouver ces relations que d'avoir une démonstration pure et dure.

On trace le cercle trigonométrique. Pour y voir plus clair et pour ne pas alourdir la preuve, considère un angle "pas trop grand". [g]

d. On anticipe ici un peu le chapitre sur les fonctions, je vous invite à vous y rendre si quelque chose n'était pas clair.
e. La fonction tangente a en fait une période égale à π, mais c'est pour une autre raison.
f. Ce n'est pas très utile de retenir ce nom. Je le donne à titre informatif. Mais la formule peut être intéressante.
g. Un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ conviendra. Le but est ici de pouvoir retrouver ces relations et de voir leur origine. On peut se convaincre qu'en utilisant la périodicité et les formules ci-dessus dès qu'elles sont établies qu'il suffit de considérer des angles "pas trop grands".

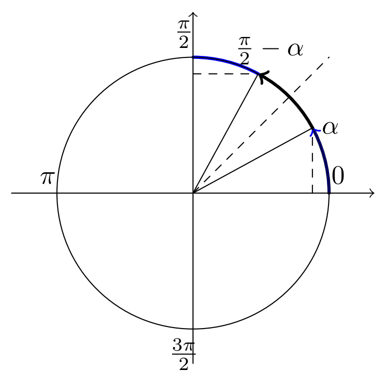


On a également une formule pour les angles complémentaires.

Proposition 5.5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la formule pour l'angle complémentaire :*

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha).$$

Ici aussi, un dessin vaut mieux qu'un long discours :



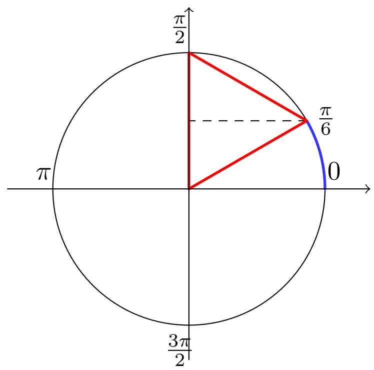
Pour l'examen de valeurs particulières, on peut donc se restreindre à des nombres compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ inclusivement. La détermination de ces valeurs se fait en utilisant la relation fondamentale (point (1)) de la proposition précédente, en utilisant le théorème de Pythagore et le propriétés des triangles isocèles et équilatéraux.

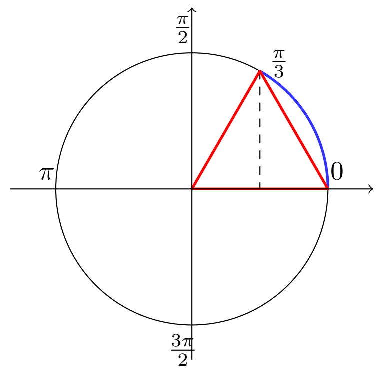
Proposition 5.6. *On a le tableau de valeurs suivant*[h]*.*

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{cotg}\,(\alpha)$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

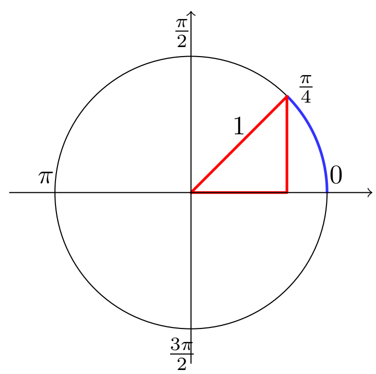
Démonstration. Les valeurs en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ découlent directement de la définition. Les valeurs du cosinus et du sinus en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ se correspondent via la proposition précédente. Elles peuvent être déterminées en cherchant le triangle équilatéral.

h. Les valeurs 0 et 1 sont faciles à voir, les autres peuvent être déterminées à l'aides des dessins présents dans la démonstration. Les lecteurs friands de moyens mnémotechniques remarqueront que sur la première ligne, les valeurs présentes sont $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$, dans l'ordre croissant.



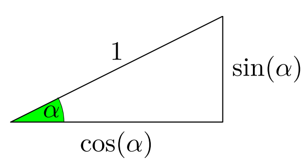


Vu que les hauteurs d'un triangle équilatéral sont aussi ses médianes, on obtient directement $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et par la relation fondamentale $\cos^2(\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Comme le cosinus cherché est visiblement positif, on voit qu'il vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On peut faire de même pour les valeurs en $\frac{\pi}{3}$ bien que ce ne soit pas nécessaire. Les valeurs de la tangente et la cotangente se déduisent directement, par définition. Enfin pour les valeurs correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$, on cherche le triangle isocèle, et on utilise la relation fondamentale :

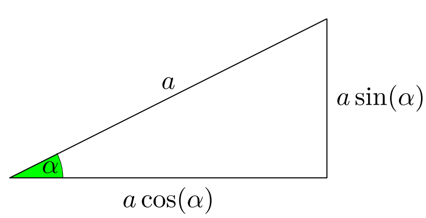


On voit bien (et cela découle aussi de la proposition précédente), qu'on a $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ et que donc $2\cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1$, ce qui conduit au résultat annoncé. □

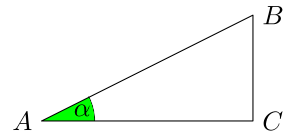
Les nombres trigonométriques que nous venons d'introduire permettent d'exprimer les relations qui existent entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. En effet, pour un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1, les autres côtés sont exprimés comme les sinus et cosinus des angles non droits :



Mais le triangle obtenu en multipliant toutes les dimensions du triangle précédent par un nombre positif a est *semblable* à celui-ci et a donc les mêmes angles :



On a donc un rapport contant entre les longueurs des côtés dans un triangle rectangle ABC.



On a alors les relations suivantes :

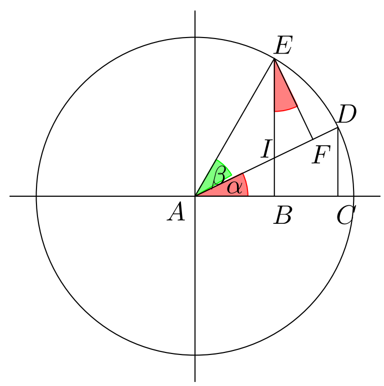
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \mathrm{tg}\,(\alpha),$$

que l'on peut retenir par "sinus=côté opposé sur hypoténuse", "cosinus=côté adjacent sur hypoténuse" et "tangente =côté opposé sur côté adjacent". Ces relations nous permettent de montrer l'origine des relations suivantes entre les nombres trigonométriques.

Proposition 5.7. *Pour tous nombres réels α et β, on a*

1. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
4. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Démonstration. Pour ne pas alourdir l'exposé, montrons la première formule dans le cas d'angles α et β compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et tels que $\alpha+\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Traçons le cercle trigonométrique, ainsi que ces angles et leur somme.



On a par définition

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{AB}, \quad \text{et} \quad \overline{AB} = \overline{AI}\cos(\alpha).$$

On a aussi

$$\overline{AI}\cos(\alpha) = (\overline{AF} - \overline{FI})\cos(\alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) - \overline{FI}\cos(\alpha).$$

Finalement, puisque l'amplitude de l'angle en E vaut également α, on a

$$\frac{\overline{FI}}{\overline{FE}} = \mathrm{tg}\,(\alpha),$$

qui donne

$$\overline{FI} = \sin(\beta)\mathrm{tg}\,(\alpha).$$

La première relation est alors démontrée.

Les autres relations s'en déduisent. Par exemple, la deuxième est obtenue en appliquant la première à α et $-\beta$. Les autres sont obtenues en utilisant la propriété des angles complémentaires. $\square$

Remarque 5.8. Il existe bien d'autres preuves de cette proposition, l'une utilisant le produit scalaire (que nous verrons dans le module suivant), l'autre utilisant l'invariance de la distance par rotation, etc... Celle-ci a l'avantage d'utiliser les relations dans le triangle rectangle que nous venons de voir. Je l'ai donc présentée à titre d'illustration.

Comme cas particulier des formules d'addition, on obtient les formules de duplication (pour sinus et cosinus), qui sont utilisées dans les équations trigonométriques classiques et ainsi que pour le calcul intégral.

Proposition 5.9. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad \textit{et} \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

En utilisant la relation fondamentale, on obtient en plus les formules suivantes.

Proposition 5.10.

$$2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha) \quad \textit{et} \quad 2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha).$$

Les formules importantes pour la fonction tangente peuvent être obtenues en appliquant les précédentes et sont données dans la proposition suivante.

Proposition 5.11. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que les expressions ci-dessous soient définies, on a*

1. $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,(\alpha)+\mathrm{tg}\,(\beta)}{1-\mathrm{tg}\,(\alpha)\,\mathrm{tg}\,(\beta)}$,
2. $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,(\alpha)-\mathrm{tg}\,(\beta)}{1+\mathrm{tg}\,(\alpha)\,\mathrm{tg}\,(\beta)}$,
3. $\mathrm{tg}\,(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\,(\alpha)}{1-\mathrm{tg}^2(\alpha)}$.

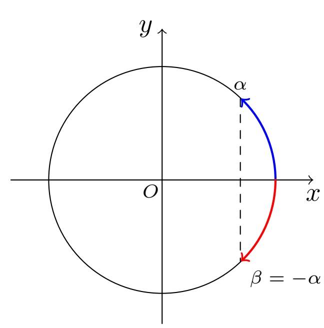
6 Equations trigonométriques élémentaires

Nous venons d'associer des nombres trigonométriques à des angles donnés. Comme souvent en mathématique, il est utile de faire le chemin inverse, qui consiste à déterminer un angle à partir de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente. Les premiers résultats qui suivent montrent que ce problème n'a jamais une solution unique et donnent les solutions de premières équations impliquant les nombres trigonométriques. Il n'y a pas d'effort de mémoire à faire. Il suffit encore de visualiser le cercle trigonométrique pour se rappeler les formules concernant les angles associés.

Proposition 6.1. *Deux angles ont même cosinus si et seulement si ils sont égaux ou opposés, modulo $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). En d'autres termes, on a*

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow (\beta = \alpha + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad \beta = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})).$$

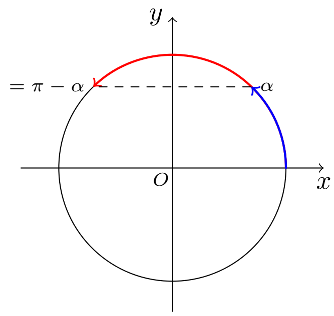
Pour visualiser ce résultat :



Proposition 6.2. *Deux angles ont même sinus si et seulement si ils sont égaux ou supplémentaires, modulo $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). En d'autres termes, on a*

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow (\beta = \alpha + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad \beta = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})).$$

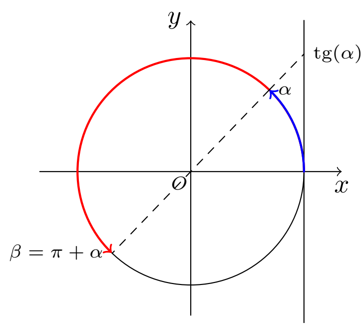
Pour visualiser ce résultat :



Proposition 6.3. *Deux angles ont même tangente si et seulement si ils sont égaux, modulo $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). En d'autres termes, on a*

$$\mathrm{tg}\,(\alpha) = \mathrm{tg}\,(\beta) \Leftrightarrow (\beta = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})).$$

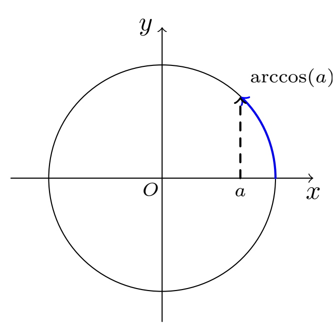
Pour visualiser ce résultat :



Ces résultats permettent de résoudre les équations simples du type $\cos(\alpha) = a$, $\sin(\alpha) = a$ ou $\mathrm{tg}(\alpha) = a$. Il suffit pour cela de connaître une seule solution α_0 dans chacun des cas. On est alors ramené aux résultats précédents. Cela motive les définitions suivantes.

Définition 6.4. Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arccos(a)$ [i].

On visualise cette définition comme ceci :



En conséquence, on a la solution de la première équation simple faisant intervenir le cosinus.

Proposition 6.5. *L'équation $\cos(\alpha) = a$ dont l'inconnue est α admet les solutions suivantes :*
- *Si $a \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution.*
- *Si $a \in [-1, 1]$, il y a une infinité de solutions :*

$$\alpha = \arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \textit{ou} \quad \alpha = -\arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

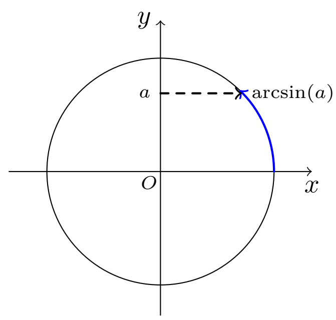
i. Comme le nom l'indique, c'est la mesure d'un arc dont le cosinus vaut a.

On peut bien sûr généraliser à des équations du type $\cos(3\alpha) = \frac{1}{2}$, $\cos(7\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(4\alpha) = 0.8$. Il suffit de déterminer respectivement les “blocs” 3α, 7α ou 4α, puis de résoudre les équations du premier degré qui en résultent.

Passons à la définition suivante.

Définition 6.6. Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arcsin(a)$ [j].

On visualise cette définition comme ceci :



Cela permet naturellement de résoudre les équations faisant appel au sinus.

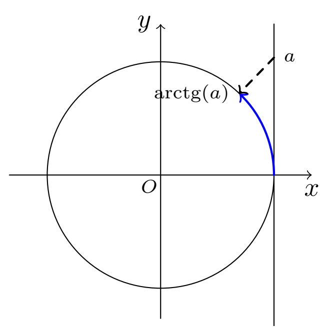
Proposition 6.7. *L’équation $\sin(\alpha) = a$ dont l’inconnue est α admet les solutions suivantes :*
- *Si $a \notin [-1, 1]$, il n’y a pas de solution.*
- *Si $a \in [-1, 1]$, il y a une infinité de solutions :*

$$\alpha = \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \textit{ou} \quad \alpha = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Terminons cette section par la définition correspondante pour la tangente.

Définition 6.8. Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\operatorname{tg}(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\operatorname{arctg}(a)$ [k].

On peut encore visualiser cette définition :



On obtient la solution aux équations faisant intervenir la tangente.

Proposition 6.9. *L’équation $\operatorname{tg}(\alpha) = a$ dont l’inconnue est α admet toujours une infinité de solutions :*

$$\alpha = \operatorname{arctg}(a) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

j. Comme le nom l’indique, c’est la mesure d’un arc dont le sinus vaut a.
k. Comme le nom l’indique, c’est la mesure d’un arc dont la tangente vaut a.