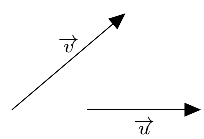
6. Géométrie et trigonométrie, produit scalaire

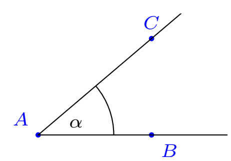
Dans ce chapitre, nous allons mêler la géométrie vectorielle et la trigonométrie. Ce mélange est fait à l'aide du produit scalaire, qui permet de calculer facilement des longueurs et des angles. Le produit scalaire nous permettra également de généraliser le théorème de Pythagore et d'obtenir plus facilement des formules de trigonométrie. Je fais le choix d'écrire les définitions et les formules en géométrie plane, mais la plupart s'étendent directement en géométrie dans l'espace, et ne vous surprendront donc pas si vous les rencontrez dans le futur.

Ces techniques sont essentiellement utilisées en physique quand il s'agit de calculer l'intensité de la force résultante de la composition de deux forces qui n'ont pas la même direction, et qu'il n'y a pas de repère naturel dans lequel on puisse tout exprimer facilement en coordonnées et composantes.

1 Définitions

Dans le module sur la géométrie, nous avons revu la notion d'angle non orienté de deux vecteurs (libres) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: on les lie au même point A et on considère le plus petit des deux angles ainsi formés. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$:





Nous avons également revu la notion d'orthogonalité de tels vecteurs : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou si l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut 90°. Dans le chapitre sur la trigonométrie, nous avons vu qu'un angle compris entre 0° et 180° vaut 90° si, et seulement si, son cosinus est nul.

On peut donc résumer la condition d'orthogonalité de deux vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ils sont orthogonaux si, et seulement si, on a

$$\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\alpha) = 0, \tag{1}$$

où α est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ [a].

Nous avons de plus exprimé la condition d'orthogonalité dans un repère orthonormé : si dans un tel repère $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si on a

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0. \tag{2}$$

Nous allons voir dans ce module que l' expression qui apparaît dans la condition (1) permet d'obtenir (en général, qu'elle soit nulle ou pas) bien plus d'information que la simple orthogonalité des vecteurs. Il nous faut pour cela étudier ses propriétés. Un bon moyen pour y parvenir est de l'exprimer en termes des composantes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un repère orthonormé (et cette expression sera sans surprise celle qui apparaît dans la formule (2)). Mais commençons par une définition.

Définition 1.1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non nuls du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est *le nombre*

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\alpha),$$

où α est l'angle (non orienté) défini par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors on pose $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.

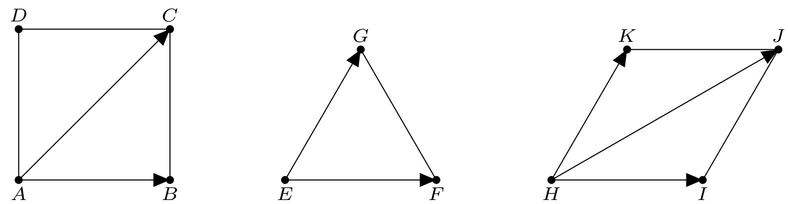
a. Quand $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, cet angle n'est pas défini, mais une des deux normes apparaissant dans la formule est nulle, et on convient que le produit est nul, même si un des facteurs n'est pas défini.

On constate que cette définition est symétrique, puisque l'angle non orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égal à l'angle non orienté de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$. On peut également réécrire en termes de produits scalaires la condition d'orthogonalité de vecteurs.

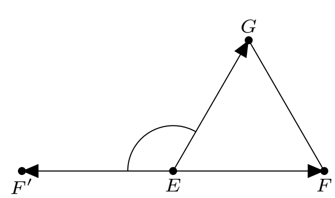
Théorème 1.2. *Des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, on a $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$.*

Cela ne nous aide pas encore, puisque nous ne savons pas encore calculer facilement des produits scalaires. On peut quand même utiliser la définition dans des cas simples.

Exemple 1.3. Voici quelques exemples basés sur des figures géométriques avec un carré $ABCD$, un triangle équilatéral EFG, et un losange $HIJK$ (tel que HKI soit équilatéral). On suppose que chaque côté est de longueur 2 (pour ne pas s'endormir avec un exemple trop simple).



- On peut calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$: en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve $\|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{2}$, et on a $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. De plus l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut 45°, ou $\frac{\pi}{4}$ radians. On a donc
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 2.2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$
- On peut aussi calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}$: puisque $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$ et puisque l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et lui-même vaut 0°, on a
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos(0) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 4.$$
- On peut calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$: puisque les côtés d'un carré sont perpendiculaires, on a
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 2.2\cos(\frac{\pi}{2}) = 2.2.0 = 0,$$
ce que l'on savait déjà, vu le théorème 1.2.
- De même, pour calculer $\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG}$ on sait que les angles intérieurs d'un triangle équilatéral sont égaux et ont donc une amplitude de 60°. On obtient alors
$$\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG} = 2.2.\cos(\frac{\pi}{3}) = 2.2.\frac{1}{2} = 2.$$
- On peut calculer $\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{EG}$: il faut pour cela trouver l'angle entre $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{EG}$. On le fait en liant les deux vecteurs au point E : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EF'}$, comme indiqué ci-dessous.



On obtient donc un angle de 120° et
$$\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{EG} = 2.2.\cos(\frac{2\pi}{3}) = -2.2.\frac{1}{2} = -2.$$

- Pour calculer $\overrightarrow{HI} \bullet \overrightarrow{HJ}$, on connaît l'angle entre ces deux vecteurs, c'est 30°, mais on ne connaît pas directement $\|\overrightarrow{HJ}\|$.[b] Il faut donc trouver une autre méthode. On sait quand même que $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HK}$. Je vous propose maintenant de découvrir les propriétés du produit scalaire qui nous permettront de calculer $\overrightarrow{HI} \bullet \overrightarrow{HJ}$, et également la longueur $\|\overrightarrow{HJ}\|$.

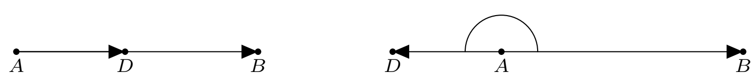
2 Propriétés du produit scalaire et méthodes de calcul

Dans cette section, nous allons revoir comment on calcule le produit scalaire de vecteurs donnés par leurs composantes dans un repère orthonormé. Pour y parvenir, nous allons d'abord considérer des situations simples, puis montrer que l'on peut s'y ramener en utilisant les projections orthogonales. Le résultat principal sur l'expression du produit scalaire nous permettra d'en donner les propriétés fondamentales.

Nous avons constaté dans l'exemple précédent un lien entre produit scalaire et norme : on a vu $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$. Cet exemple se généralise pour donner le résultat suivant qui montre que l'on peut obtenir toutes les normes à partir des produits scalaires.

Proposition 2.1. *Pour tout vecteur (libre) $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$, et donc $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$.*

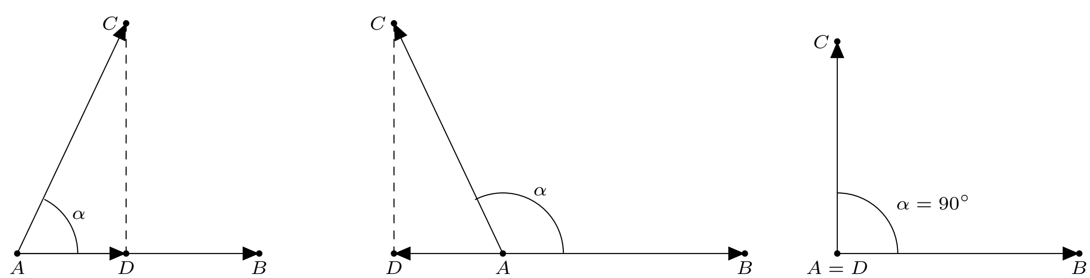
La preuve est claire : l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ vaut 0°. La même constatation permet de calculer les produits scalaires de vecteurs multiples l'un de l'autre : si le multiple est positif, l'angle vaut 0°, et le produit scalaire est le produit des normes, et si le multiple est négatif, l'angle vaut 180°, et le produit scalaire est l'opposé du produit des normes. Voici une représentation de ce fait :



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\|$

On peut en fait toujours se ramener à ce cas simple : nous l'avons constaté dans l'exemple : on avait $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}$. On peut aussi généraliser ce fait en définissant la projection orthogonale.

La situation est simple à dessiner : étant donnés des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, lions les en un point A et écrivons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On a alors une des situations suivantes :



Dans les trois cas $\overrightarrow{AD}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur l'axe défini par $\overrightarrow{AB}$. Ce qui importe, c'est que $\overrightarrow{AD}$ soit un multiple de $\overrightarrow{AB}$, et que le triangle formé soit rectangle (quand il existe).

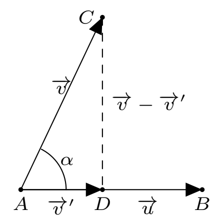
Définition 2.2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs du plan. La projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur l'axe déterminé par $\overrightarrow{u}$[c] est l'unique vecteur $\overrightarrow{v}'$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

b. On peut le déduire du théorème de Pythagore, avec un peu d'astuce, mais le but ici est de trouver une méthode systématique.

c. Les puristes remarqueront que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, il ne détermine pas d'axe, mais on peut quand même définir la projection orthogonale de la même façon. Elle est alors toujours nulle.

1. Le vecteur $\overrightarrow{v}'$ est multiple du vecteur $\overrightarrow{u}$;
2. Le vecteur $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}'$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

L'existence et l'unicité de la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$ [d] se voient sur le dessin [e] :



On peut aussi se convaincre que la construction dépend des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pas du point A où on a lié les vecteurs pour faire le dessin. Il est cependant également utile de calculer les composantes de la projection orthogonale quand les vecteurs sont donnés dans un repère orthonormé.

Proposition 2.3. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs libres donnés par leurs composantes dans un repère orthonormé : $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$. On suppose $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Alors la projection orthogonale $\overrightarrow{v}'$ de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$ est donnée par*

$$\overrightarrow{v}' = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{u_1^2 + u_2^2} \overrightarrow{u}.$$

Remarque 2.4.
1. L'hypothèse $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ n'est pas fort gênante : quand $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors on a nécessairement $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$, et on n'a pas besoin d'un théorème.
2. Le numérateur de la fraction ci-dessus est bien connu : c'est le membre de gauche dans la condition d'orthogonalité (2). Le dénominateur aussi : ce n'est rien d'autre que le carré de la norme de $\overrightarrow{u}$, comme nous l'avons vu dans le module 4.

Démonstration. Nous cherchons un vecteur $\overrightarrow{v}'$ multiple de $\overrightarrow{u}$. Ecrivons donc $\overrightarrow{v}' = r\overrightarrow{u}$ où le nombre $r \in \mathbb{R}$ est à déterminer. Il y a une deuxième condition à satisfaire : $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}'$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{u}$. En composantes, on a

$$\overrightarrow{v}' : (ru_1, ru_2), \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}' : (v_1 - ru_1, v_2 - ru_2).$$

On exprime la condition d'orthogonalité entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}'$:

$$u_1(v_1 - ru_1) + u_2(v_2 - ru_2) = 0.$$

On résout pour trouver

$$r = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{u_1^2 + u_2^2}, \tag{3}$$

et c'est toujours possible puisque $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$. □

L'intérêt de cette projection orthogonale dans ce chapitre est son lien direct avec le produit scalaire, que nous avons constaté dans les exemples, et que je formalise dans le résultat suivant.

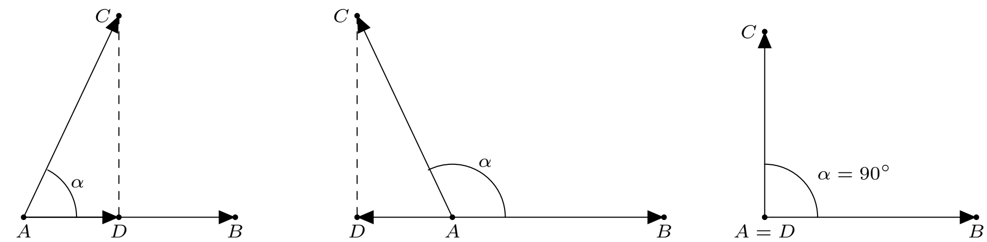
Proposition 2.5. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs libres et notons $\overrightarrow{v}'$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. On a alors*

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}'.$$

Remarque 2.6. L'intérêt de ce résultat est de ramener le calcul général d'un produit scalaire au calcul d'un produit scalaire dans le cas simple où les vecteurs sont multiples l'un de l'autre.

Démonstration. On lie les vecteurs en un point A, et on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{AD}$. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, les deux membres de l'égalité à démontrer sont nuls. Dans le cas contraire, l'axe AB est bien défini, et on a un de cas suivants, selon que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, obtus ou droit :

d. C'est un abus de langage de parler de projection sur $\overrightarrow{u}$, mais cela ne prête pas à confusion.
e. Elles peuvent être démontrées rigoureusement, voir plus bas.



Si $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{v}'$ est le vecteur nul. On a donc $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}'$; cela donne la preuve dans le troisième cas. Dans le premier cas, dans le triangle rectangle ADC, on a $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha)$ et donc

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha) = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\| = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}'.$$

Dans le deuxième cas, on travaille encore dans le triangle ADC, mais on trouve

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\pi - \alpha) = -\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha).$$

On a donc

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\alpha) = -\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\| = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}',$$

ce qui termine la preuve. □

Exemple 2.7. On peut reprendre l'exemple 1.3. La projection de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}$, donc on a bien

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = 4,$$

comme nous l'avions déjà constaté. Mais dans la deuxième figure, on peut tracer la hauteur issue de G qui est aussi la médiane issue de G. On constate alors que la projection de $\overrightarrow{EG}$ sur $\overrightarrow{EF}$ est $\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. On a donc

$$\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} \bullet (\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}) = \|\overrightarrow{EF}\| \, \|\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\| = 2.$$

En appliquant la proposition précédente, nous obtenons finalement une façon simple de calculer le produit scalaire de vecteurs donnés par leurs composantes.

Proposition 2.8. *Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donnés par leurs composantes dans un repère orthonormé par $\overrightarrow{u} : (u_1, u_2)$ et $\overrightarrow{v} : (v_1, v_2)$, alors on a*

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Démonstration. Le théorème est vrai si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, car dans ce cas nous savons que les deux membres de l'égalité à prouver sont nuls. Cela règle donc les cas où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ou $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$ (où $\overrightarrow{v}'$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$). Dans le cas général, on utilise le résultat précédent : $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}'$. Deux cas se produisent alors :

1. Soit $\overrightarrow{v}'$ est un multiple strictement positif de $\overrightarrow{u}$. Cela arrive si $u_1v_1 + u_2v_2 > 0$ (vu la proposition 2.3), et on a alors après un calcul un peu long mais sans surprise

   $$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}' = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}'\| = |u_1v_1 + u_2v_2| = u_1v_1 + u_2v_2.$$

   Le résultat est donc prouvé dans ce cas.
2. Soit $\overrightarrow{v}'$ est un multiple strictement négatif de $\overrightarrow{u}$. Cela arrive si $u_1v_1 + u_2v_2 < 0$, et on a alors après le même calcul :

   $$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}' = -\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}'\| = -|u_1v_1 + u_2v_2| = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Cela termine donc la preuve du résultat annoncé. □

L'expression du produit scalaire donnée dans le résultat ci-dessus permet évidemment de calculer des produits scalaires facilement.

Exemple 2.9. Soient les points A, B, C donnés dans un repère orthonormé par $A : (1, 0)$, $B : (2, 3)$, $C : (3, 5)$. On peut calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a

$$\overrightarrow{AB} : (1, 3), \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} : (2, 5).$$

On a donc

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB} = 1.1 + 3.3 = 10, \quad \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AC} = 4 + 25 = 29 \quad \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = 1.2 + 3.5 = 17.$$

On en déduit $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{29}$, vu la proposition 2.1. On peut en déduire l'angle α entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en utilisant la définition du produit scalaire : on a

$$17 = \sqrt{10}\sqrt{29}\cos(\alpha)$$

donc, puisque α est compris entre 0 et π :

$$\alpha = \arccos(\frac{17}{\sqrt{290}}).$$

Cette proposition permet également de donner les propriétés fondamentales du produit scalaire, que je rassemble dans le résultat suivant.

Proposition 2.10. *L'opération produit scalaire $\bullet$ est*

1. *distributive*[f] *: on a*

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}')\bullet(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}') = \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u}'\bullet\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}'\bullet\overrightarrow{v}'$$

et

$$(r\overrightarrow{u})\bullet\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\bullet(r\overrightarrow{v}) = r(\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}),$$

pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}'$ et tout $r \in \mathbb{R}$.

2. *symétrique : on a $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{u}$, quels que soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

3. *définie positive : on a $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u} \geqslant 0$, quel que soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u} = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*

Remarque 2.11. Nous avions déjà remarqué la symétrie. En ce qui concerne la distributivité, cette formule est facile à retenir : c'est la même propriété que celle que vous utilisez avec des nombres (ou les expressions littérales qui les remplacent) depuis environ la deuxième année du secondaire. La troisième propriété est claire puisque $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}$ vaut $\|\overrightarrow{u}\|^2$.

Démonstration. Il suffit d'écrire tout en composantes dans un repère orthonormé. Si dans un tel repère, on a

$$\overrightarrow{u} : (u_1, u_2), \quad \overrightarrow{v} : (v_1, v_2), \quad \overrightarrow{u}' : (u_1', u_2'), \quad \overrightarrow{v}' : (v_1', v_2'),$$

alors on a

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' : (u_1 + u_1', u_2 + u_2'), \quad \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}' : (v_1 + v_1', v_2 + v_2'), \quad r\overrightarrow{u} : (ru_1, ru_2), \quad r\overrightarrow{v} : (rv_1, rv_2).$$

On calcule alors les produits scalaires :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}')\bullet(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}') &= (u_1 + u_1')(v_1 + v_1') + (u_2 + u_2')(v_2 + v_2') \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1v_1' + u_2v_2') \\ &+ (u_1'v_1 + u_2'v_2) + (u_1'v_1' + u_2'v_2') \\ &= \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u}'\bullet\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}'\bullet\overrightarrow{v}'.\end{aligned}$$

On procède de la même façon pour prouver la deuxième relation. □

f. le mot savant que vous avez peut-être rencontré pour "distributif est "bilinéaire", parce que c'est une opération sur des vecteurs.

Nous pouvons maintenant terminer le premier exemple.

Exemple 2.12. On peut calculer

$$\overrightarrow{HI}\bullet\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HI}\bullet(\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HK}) = \overrightarrow{HI}\bullet\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HI}\bullet\overrightarrow{HK} = 4+2 = 6.$$

On peut aussi calculer

$$\|\overrightarrow{HJ}\|^2 = \overrightarrow{HJ}\bullet\overrightarrow{HJ} = (\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HK})\bullet(\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HK}) = \overrightarrow{HI}\bullet\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HI}\bullet\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{HK}\bullet\overrightarrow{HK} = 12,$$

et donc $\|\overrightarrow{HJ}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3 Applications

Dans cette section, nous allons appliquer les propriétés du produit scalaire pour obtenir les composantes d'un vecteur dans un repère orthonormé, ainsi qu'une généralisation du théorème de Pythagore.

Proposition 3.1. *Soit un repère orthonormé d'origine O et dont les axes sont gradués au moyen des points E_1 et E_2. On note $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$* [g]*. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose dans ce repère en*

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}.$$

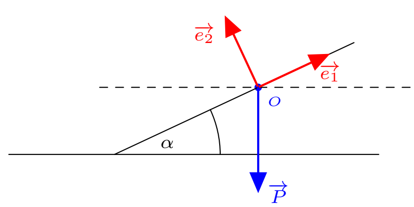
En d'autres termes, on a $\overrightarrow{u} : (\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_2})$.

Démonstration. On sait que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose de manière unique $\overrightarrow{u} = r\overrightarrow{e_1} + s\overrightarrow{e_2}$. En utilisant les propriétés du produit scalaire, on calcule

$$\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_1} = (r\overrightarrow{e_1}+s\overrightarrow{e_2})\bullet\overrightarrow{e_1} = r\overrightarrow{e_1}\bullet\overrightarrow{e_1} + s\overrightarrow{e_2}\bullet\overrightarrow{e_1} = r.1 + s.0 = r.$$

De même, on trouve $s = \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{e_2}$. □

Exemple 3.2. On se place dans la situation physique représentée par le schéma suivant :



Vous avez sans doute déjà rencontré cette situation, où un mobile roule sur une pente faisant un angle de α degrés avec l'horizontale (généralement sans frottement), et où il faut décomposer $\overrightarrow{P}$, le poids qui s'applique sur le mobile, pour pouvoir l'additionner avec la force réaction du sol. On détermine alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{P}$ dans le repère déterminé par l'origine O et les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Il suffit de trouver l'angle non orienté entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{e_1}$ d'une part, et l'angle non orienté entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{e_2}$ d'autre part. L'intensité de $\overrightarrow{P}$ est sa norme, que nous notons $\|\overrightarrow{P}\|$ en mathématiques, mais qui est parfois (même souvent) notée P en physique. Il suffit pour cela de tracer une parallèle à l'horizontale, passant par O (en pointillés sur le schéma). On constate directement que l'angle entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{e_1}$ est $90° + \alpha$ (si α est exprimé en degrés), et que l'angle entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{e_2}$ est $180° + \alpha$ [h]

D'après la proposition 3.1, les composantes de $\overrightarrow{P}$ sont

$$(\overrightarrow{P}\bullet\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{P}\bullet\overrightarrow{e_2}) = (P\cos(90° + \alpha), P\cos(180° + \alpha)) = (-P\sin(\alpha), -P\cos(\alpha)).$$

g. Ces vecteurs sont orthogonaux et normés.

h. En fait $360° - (180° + \alpha)$ serait plus juste, mais l'avantage du cosinus qui apparaît dans le produit scalaire est qu'il associe la même valeur à ces deux angles.

Enfin, on a déjà vu que le produit scalaire permet de récupérer les normes des vecteurs. Cela permet de généraliser le théorème de Pythagore aux triangles quelconques [i].

Théorème 3.3. *Dans tout triangle ABC, on a*

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\widehat{ABC}).$$

Remarque 3.4.
1. Dans le cas d'un triangle rectangle en B, le cosinus s'annule, et on retrouve le théorème de Pythagore.
2. Il faut noter que le signe devant le terme contenant le cosinus est à l'origine de presque toutes les erreurs dans l'utilisation de cette relation.
3. On peut écrire cette relation pour calculer la longueur de chaque côté du triangle en fonction de la longueur des deux autres et de l'angle qu'ils déterminent : le point B n'a plus rien de particulier, contrairement au cas particulier du théorème de Pythagore.
4. Je démontre ce théorème à l'aide du produit scalaire, mais on aurait pu le démontrer en utilisant la trigonométrie dans les triangles rectangles que l'on peut tracer en considérant les hauteurs du triangle ABC. Cela me permet d'utiliser les propriétés du produit scalaire.

Démonstration. On utilise la relation $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AC}$. On décompose $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, et on utilise la distributivité et la symétrie : on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\bullet(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BC}\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2.\end{aligned}$$

Par définition du produit scalaire, on a alors

$$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\widehat{ABC}) = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\widehat{ABC}),$$

puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont liés au point B, et puisque $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$. □

Exemple 3.5. Reprenons le premier exemple et calculons $\|\overrightarrow{HJ}\|^2$. En appliquant la proposition précédente dans le triangle HIJ, on a

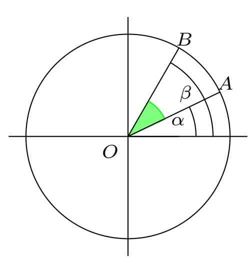
$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{HJ}\|^2 &= \|\overrightarrow{HI}\|^2 + \|\overrightarrow{IJ}\|^2 - 2\|\overrightarrow{HI}\|\,\|\overrightarrow{IJ}\|\cos(\widehat{HIJ})\\ &= 4+4-2.2.2.\cos(120°) = 4+4+4 = 12.\end{aligned}$$

On peut évidemment utiliser ce type de calcul pour obtenir des distances dans des problèmes :

J'ai roulé vers l'est pendant 30 km, puis j'ai tourné de 30° vers le nord et j'ai encore parcouru 40 km. Quelle est la distance du point de départ au point d'arrivée, à vol d'oiseau (c'est-à-dire en ligne droite) ?

Si on fait un schéma, on se retrouve dans la même situation que la précédente, avec des normes de 30km, 40km et un angle de 150°. Je vous laisse faire le calcul.

En guise de dernière application, montrons comment retrouver la formule d'addition pour les cosinus. On considère le cas simple où on a deux angles α et β compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et tels que $\beta > \alpha$. On représente ce angles sur le cercle trigonométrique et on a la situation suivante.



Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de normes 1, et ont pour composantes $(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$ et $(\cos(\beta),\sin(\beta))$. Par définition, on a $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = 1.1.\cos(\beta-\alpha)$. On peut calculer ce produit en termes des composantes et on trouve $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB} = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$. On a ainsi retrouvé la formule de trigonométrie.

i. Ce théorème est parfois attribué à Al Kashi. On l'appelle aussi règle des cosinus.