7. Fonctions : une introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des "fonctions d'une variable réelle". C'est donc le premier chapitre d'analyse proprement dite. Les fonctions sont utilisées en sciences notamment pour exprimer certaines "variables" [a] d'un problème (ou plus généralement d'une théorie) par rapport à d'autres "variables". La notion de fonction est alors un cas particulier de la notion de *relation*. C'est ce point de vue que nous allons utiliser en définissant d'abord précisément ce qu'est une relation, puis une fonction. Nous allons en fait voir une deuxième définition équivalente des fonctions puis nous nous concentrerons sur leurs propriétés élémentaires. Nous passerons en revue quelques familles de fonctions élémentaires issues des notions que nous avons déjà revues en trigonométrie et en algèbre. Nous reverrons ensuite les grandes constructions de fonctions que sont la somme, le produit, la composition, la restriction et le passage à la fonction réciproque (quand c'est possible).

Il est important de pouvoir reconnaître ces constructions car la plupart des théorèmes que nous allons rencontrer en ce qui concerne les limites, la continuité, les dérivées et les primitives s'expriment en termes de ces constructions.

1 Relations

Dans les problèmes de proportionnalités que nous avons rencontrés nous avons lié des variables, des grandeurs mesurables, à l'aide de relations que l'on a pu écrire sous forme d'équations. Par exemple, dans un problème de vitesses, on écrira :

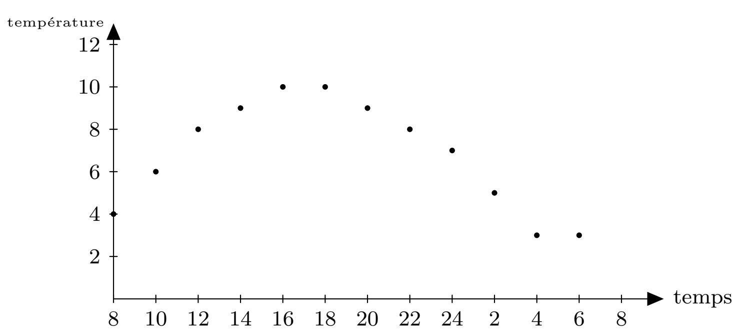
"Soit t le temps en minutes (une variable), et x la distance parcourue en km depuis le point de départ". Le fait que l'on roule à 132 km/h s'exprime par une relation entre ces deux grandeurs mesurables, que l'on exprime parfois par la *formule* ou équation

$$x = 2,2t.$$ [b]

On dira alors (en sciences) que la variable x est une fonction de la variable t. Cela signifie que si on est dans la voiture et que l'on *mesure* le temps écoulé, on peut *calculer* la *mesure* de la distance parcourue en utilisant la formule ou *relation* précédente.

On représentera les mesures par des couples (t_1, x_1), (t_2, x_2), etc... et on le fera bien sûr dans un repère comme nous avons appris à le faire en géométrie. Il est d'usage de repérer sur l'axe horizontal les mesures de la première variable et les mesures correspondantes sur l'axe vertical (des ordonnées).

Vous avez fait quelques exemples avec des diagrammes de températures, de précipitations (en géographie), de mesures en Newton et mesures en kilogrammes etc.. Voici quelques exemples qui devraient vous rappeler des souvenirs.

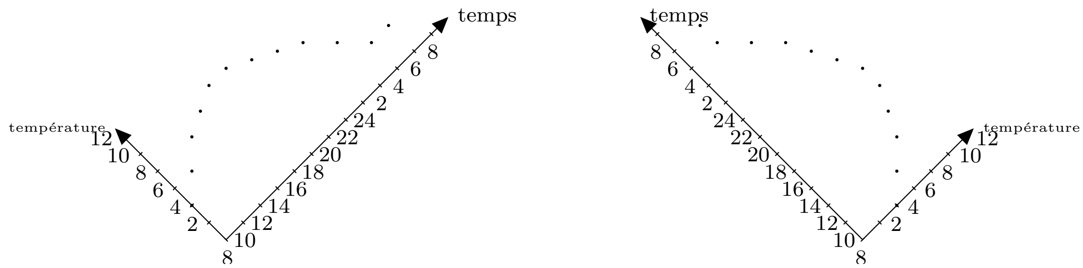


a. Ce terme n'est pas défini d'un point de vue mathématique. Nous nous contenterons de dire qu'il s'agit de quantités mesurables (taille, poids, pression, température,...) ou simplement observables (couleur, nom...), je vous renvoie à des cours plus appliqués pour une "classification" plus précise.

b. 2,2 est la vitesse constante, exprimée en km/minute.

On a représenté en abscisses les heures de la journées et en ordonnées les températures. Puisqu'on a représenté par un point le couple $(18, 10)$, on sait qu'à 18 heures, il faisait 10 degrés.

Notez que le fait de mettre les heures sur un axe horizontal est une convention : l'horizontalité n'est pas une notion mathématique. On aurait très bien pu représenter cette courbe de température comme ceci :



Dans le premier cas, il suffit de tourner sa feuille de papier (ou son écran, ce qui est plus difficile) de 45 degrés pour récupérer le graphique familier, tandis que dans le deuxième, il faut tourner de 45 degrés dans l'autre sens, puis retourner sa feuille (si elle est transparente [c]), ou simplement visualiser la symétrie orthogonale que l'on obtiendrait avec un miroir.

La relation entre temps et température n'est pas ici donnée par une formule, mais bien directement par un ensemble de couples dont le premier élément est une heure, et le second une température. C'est la définition même d'une relation. Pour bien comprendre, il faut se placer dans l'ensemble de tous les couples possibles. C'est à dire le produit cartésien.

Définition 1.1. Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien des ensembles A et B l'ensemble

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A,\, b \in B\}.$$

C'est donc simplement l'ensemble des couples dont le premier élément est dans A et le deuxième dans B.

Exemple 1.2. 1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4, 5\}$, on a

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Si $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$, alors

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Nous avons déjà rencontré cet ensemble.

2. Si $A = \{8, 10, 12, 14, \ldots, 6\}$ et si $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ alors

$$A \times B = \{(8, 2), (8, 3), (8, 4), \ldots, (10, 2), (10, 3), (10, 4), \ldots, (12, 2), (12, 3), (12, 4), \ldots\}.$$

Voici un autre exemple, moins numérique.

Exemple 1.3. Si on pose

$$A = \{\text{lundi}, \text{mardi}, \text{mercredi}, \text{jeudi}, \text{vendredi}, \text{samedi}, \text{dimanche}\}$$

et $B = \{\text{bleu}, \text{noir}, \text{vert}, \text{rien}\}$, alors

$$A \times B = \{(\text{lundi}, \text{bleu}), (\text{lundi}, \text{noir}), (\text{lundi}, \text{vert}), (\text{lundi}, \text{rien}), (\text{mardi}, \text{bleu}), \ldots\},$$

et cet ensemble contient les 28 couples possibles.

c. Cela va être difficile avec votre écran d'ordinateur.

Le diagramme de températures donne une relation entre heure et température simplement en précisant un sous-ensemble du produit cartésien de l'ensemble des heures possibles et l'ensemble des températures possibles.

De même, si je veux exprimer une relation entre le jour de la semaine et la couleur des chaussettes que je porte, il me suffit de sélectionner un sous-ensemble de $A \times B$ en listant les possibilités que j'admets. Par exemple

$$\{(\text{lundi}, \text{bleu}), (\text{lundi}, \text{noir}), (\text{lundi}, \text{vert}), (\text{mardi}, \text{noir}), (\text{mercredi}, \text{vert}), \\ (\text{mercredi}, \text{bleu}), (\text{jeudi}, \text{vert}), (\text{vendredi}, \text{noir}), (\text{samedi}, \text{rien}), (\text{dimanche}, \text{rien})\}.$$

Nous arrivons donc naturellement à la définition générale d'une relation.

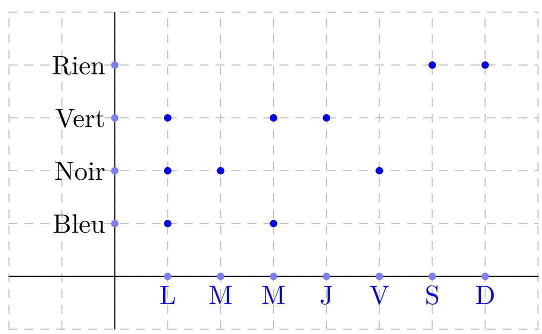
Définition 1.4. Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est une partie de $A \times B$. On appelle A l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$. Si le couple (a, b) est dans $\mathcal{R}$, on note $a\mathcal{R}b$ et on dit que a est en relation avec b. Le lien entre les deux notations est donc

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B | a\mathcal{R}b\}.$$

Exemple 1.5.

1. Dans l'exemple 1.2, on peut définir la relation$\{(1, 4), (2, 5)\}$ de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{4, 5\}$. On peut résumer cette relation par une formule : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y = x + 3$;
2. Nous avons effectivement défini une relation de l'ensemble des jours de la semaine dans l'ensemble des couleurs de chaussettes.

Quand c'est possible, on représente les éléments de l'ensemble A par des points sur un axe (horizontal) et les éléments de B sur un axe (vertical). On représente les couples comme d'habitude, (comme nous l'avons fait pour le diagramme des températures) par un point admettant le couple en question pour coordonnées. C'est une *représentation graphique* de la relation. Voici ce que cela donne pour l'exemple des chaussettes.



C'est bien la représentation classique des couples de nombres dans le plan. Voici encore trois exemples.

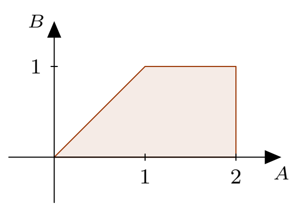
1. Considérons la relation $\geqslant$ de $A = [0, 2]$ dans $B = [0, 1]$ donnée par

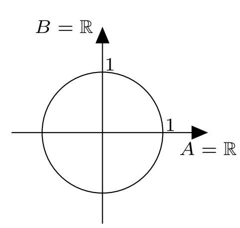
$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 1] : x \geqslant y\}.$$

2. Soit $\mathcal{R}_2$ la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

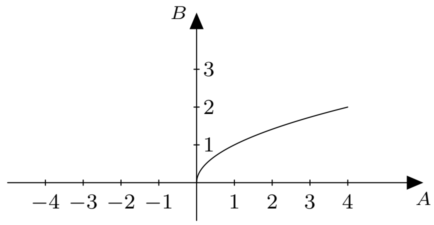
$$x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Elle se représentent visiblement par

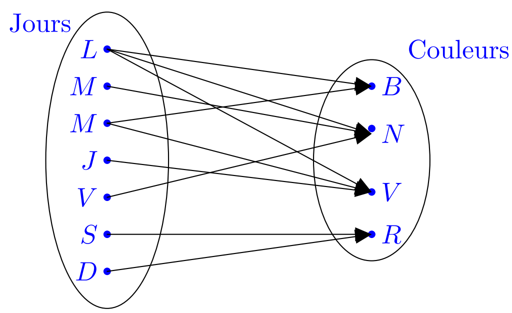




3. Terminons par la relation $\mathcal{R}_3$ définie de $A = [-4, 4]$ dans $B = [0, 3]$ par
$$x\mathcal{R}_3 y \Leftrightarrow y^2 - x = 0.$$
Elle est représentée par



Mentionnons également la représentation suivante : on représente les ensembles à l'aide de diagrammes de Venn, et on obtient une représentation dite *sagittale* : on dessine une flèche [d] de a vers b quand $a\mathcal{R}b$. Dans notre exemple de chaussettes, cela donne ceci.



On constate que si x est un élément de A, il n'existe pas toujours d'élément de B tel que $x\mathcal{R}y$ et il en existe parfois plusieurs. De même, pour un élément y de B, il peut exister zéro, un ou plusieurs éléments x de A tels que $x\mathcal{R}y$. Cela vaut bien une définition.

Définition 1.6. Soit $\mathcal{R}$ une relation de A dans B. On appelle *domaine* de $\mathcal{R}$ l'ensemble des points x de A qui sont en relation avec au moins un élément y de B. On le note $\mathrm{dom}_\mathcal{R}$ ou $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$ ou encore $D_\mathcal{R}$. On a
$$\mathrm{dom}_\mathcal{R} = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) = D_\mathcal{R} = \{x \in A : \exists y \in B : x\mathcal{R}y\}.$$
On appelle *codomaine* ou *image* de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ (ou $\mathrm{Im}_\mathcal{R}$) des points y de B tels qu'il existe au moins un élément x de A qui soit en relation avec y. On a
$$\mathrm{Im}_\mathcal{R} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{y \in B : \exists x \in A : x\mathcal{R}y\}.$$

Vous connaissez les notions de domaine et d'image, donc je ne donne que l'exemple de la relation $\mathcal{R}_3$ ci-dessus. Son domaine est $[0, 4]$ et son image $[0, 2]$. En guise d'exercice, je vous suggère de déterminer le domaine et le codomaine des autres relations présentées plus haut.

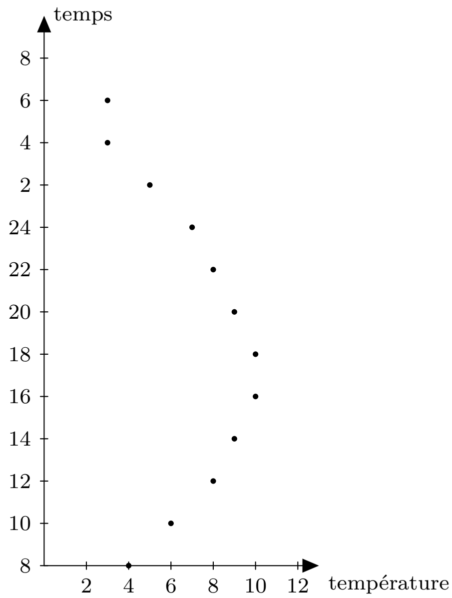
Enfin, terminons cette section sur les relations par la définition de la relation réciproque.

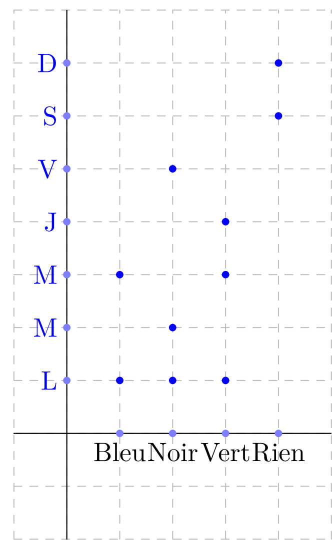
Définition 1.7. si $\mathcal{R}$ est une relation de A dans B, on peut définir la relation réciproque (ou inverse) $\mathcal{R}^{-1}$ de B dans A par
$$y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

L'intérêt de la relation réciproque est que, contrairement à la fonction réciproque que nous verrons plus bas, elle existe toujours.

Pour la représentation graphique, on lit simplement la relation de B vers A plutôt que de A vers B. Bien sûr, si on veut donner la représentation usuelle de $\mathcal{R}^{-1}$ où l'ensemble B est représenté sur l'axe horizontal il faut comme plus haut, retourner la représentation graphique de $\mathcal{R}$. Voici le cas des températures et celui des chaussettes.

d. En latin, sagitta veut dire flèche, cela a également donné le mot sagittaire.





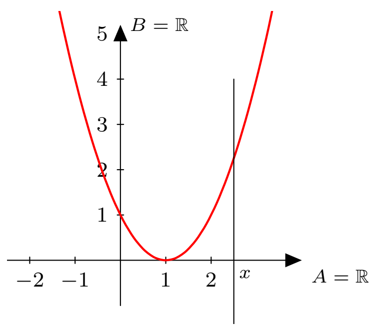
2 Fonctions

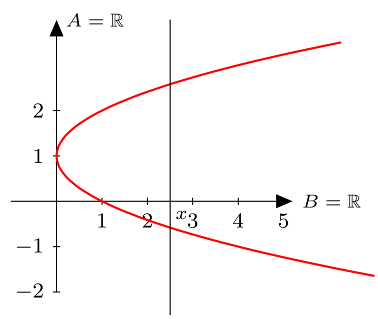
Il y a une grande différence entre la première relation entre le temps et la température, et sa réciproque, ou les deux relations mettant mes chaussettes en scène : si on se donne une heure, on peut déterminer la température qu'il faisait à cette heure là. Ce n'est pas le cas pour les chaussettes : si on sait qu'on est lundi, on ne peut pas déterminer à l'avance quelle est la couleur des chaussette que je vais porter. La couleur des chaussettes n'est pas une fonction

Définition 2.1. Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est une fonction, si pour tout x dans A, il existe *au plus* un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$.

Cette définition de fonction semble tirée par les cheveux, mais elle reflète exactement ce que l'on veut faire en sciences quand on exprime une "variable" en fonction d'une autre dans un graphique, en faisant par exemple du "point par point". Parmi les relations données plus haut, celle des vitesses, des températures (dans le bon sens), et $\mathcal{R}_3$ sont des fonctions. Ni la relation des jour-chaussette, ni sa réciproque, ne sont des fonctions.

D'un point de vue graphique, il est facile de voir quelle relation est une fonction. Si on a représenté l'ensemble A sur l'axe horizontal et B sur l'axe vertical [e] : pour tout $x \in A$, on regarde les points situés à la verticale de x (au dessus ou en dessous) et on s'assure qu'il n'y en a qu'un (au plus). Voici deux exemples





e. En supposant toujours qu'ils puissent être associés représentés par des nombres réels.

Dans le premier cas, on constate qu'à la verticale de chaque x, il n'y a qu'un point représenté. On a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $\{(x,(x-1)^2) : x \in \mathbb{R}\}$. La deuxième est la relation réciproque de la précédente, donnée par $\{((x-1)^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Ce n'est pas une fonction.

Nous avons ainsi revu la définition officielle de la notion de fonction. Une fonction est donc la donnée de trois ensembles : un ensemble de départ A, un ensemble d'arrivée B, et un sous-ensemble particulier $\mathcal{R}$ de $A \times B$. Cependant, ce n'est sans doute pas la définition à laquelle vous êtes habitués.

Le lien avec cette définition vient d'être utilisé dans l'exemple précédent. J'ai en effet construit une fonction en associant à chaque élément x de A un élément de B en appliquant à x une transformation. J'ai "calculé" $(x-1)^2$ à partir de x, et j'ai considéré la relation $\{(x,(x-1)^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 2.2 (Alternative)**.** Une fonction f de A dans B est une loi de transformation qui associe à tout point x de A, soit un point $f(x)$ de B, soit rien.

Cette définition peut sembler plus concrète, mais ce n'en est pas vraiment une, puisque je n'ai pas défini ce qu'est "une loi de transformation". Elle correspond cependant à ce que vous faites avec votre calculatrice pour évaluer une fonction : vous appliquez une suite de transformations à un nombre fixé pour obtenir son image par la transformation.

Examinons le lien entre ces deux définitions. Il ne serait en effet pas raisonnable d'appeler de la même manière deux notions qui n'ont rien à voir ensemble.

1. Si $\mathcal{R}$ est une fonction de A dans B au sens de la première définition, et si x est dans $\mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$, il existe *exactement* un y dans B tel que $x\mathcal{R}y$. On note alors $y = f(x)$ et on dit que y est *l'image* de x par f[f]. On a donc une loi de transformation f qui à $x \in \mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$ associe cet unique point $f(x)$ de B, et qui à $x \notin \mathrm{dom}_{\mathcal{R}}$ n'associe rien. La relation $\mathcal{R}$ s'écrit alors
$$\mathcal{R} = \{(x, f(x)), x \in \mathrm{dom}_{\mathcal{R}}\}.$$
2. Réciproquement, ayant à sa disposition une loi de transformation f de A dans B au sens de la définition alternative, on peut définir dom_f comme l'ensemble des points auxquels f associe un point de B, et former la relation
$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), x \in \mathrm{dom}_f\}.$$
C'est effectivement une fonction au sens de la première définition.

Cela donne donc une correspondance parfaite entre les notions de fonction données par les deux définitions. Il est cependant utile d'introduire un peu de vocabulaire et de notations.

1. Nous utiliserons la notation
$$f : A \to B : x \mapsto f(x),$$
pour spécifier que f est une fonction (au sens "loi de transformation") de A dans B, qui à $x \in A$ associe $f(x)$.
2. Si f est une telle fonction, on appellera le *graphe de f* la relation définie par f, à savoir
$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), x \in A\}.$$
3. On appellera aussi domaine de f le domaine de $\mathcal{G}_f$, et on le notera naturellement dom_f.
4. La représentation graphique de la relation $\mathcal{G}_f$ sera également appelée la représentation graphique de f.
5. Si x est un élément de dom_f, alors $f(x)$ désigne l'image de x par f. C'est un élément de B.

Remarque 2.3. J'ai donné ici les définitions les plus précises possibles. Dans les différents livres qui sont à votre disposition, il est fort possible qu'on s'en écarte un peu. Elles ne sont d'ailleurs pas universellement admises et peuvent paraître parfois très lourdes. Voici une liste (non exhaustive) de variations que vous pourrez rencontrer :

1. $g : A \to B : t \mapsto g(t)$: c'est parfaitement conforme à la définition : on peut bien sûr changer la lettre qui désigne la fonction, ainsi que la lettre qui désigne un élément de A.

f. On note f pour "fonction", what else ?, mais vous pouvez prendre n'importe quelle lettre.

2. La fonction “$y = f(x)''$: c'est un abus de langage. En fait $y = f(x)$ est l'équation cartésienne du graphe de la fonction f :
$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$
3. La fonction “$f(x)$” c'est un aussi un abus de langage, un raccourci pour dire “la fonction qui à tout x associe $f(x)$. C'est effectivement plus court, mais cela peut mener à des confusions : $f(x)$ est un élément de B, si x est un élément de A. On peut utiliser ce raccourci, mais il faut bien être conscient que c'en est un.

Après toutes ces mises en garde, il est largement temps que je vous montre quelques exemples et constructions.

3 Opérations et premières fonctions élémentaires

Ici, nous rappelons les opérations usuelles définies sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que la somme, le produit, le quotient, la composée. Sauf mention explicite du contraire, f et g désignent dans cette section deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.1 Combinaisons linéaires, produits, quotients

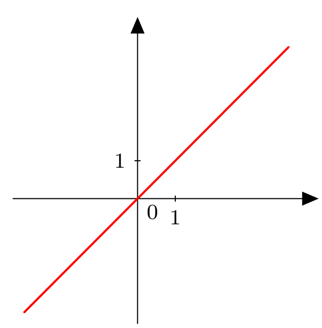
Commençons par les opérations élémentaires sur les fonctions, qui sont induites par les quatre opérations des nombres réels, qui figurent en bonne place sur votre calculatrice.

Définition 3.1. Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ ont pour domaine $\mathrm{dom}_f \cap \mathrm{dom}_g$ et sont définies par
$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$
et
$$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$
En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, la fonction $c \cdot f$ a pour domaine dom_f et est définie par
$$c \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x).$$

Remarque 3.2. Si vous en voyez pas la différence entre le $+$ de gauche et le $+$ de droite dans la définition, vous vous êtes fait piéger par le raccourci dont nous venons de discuter plus haut : à droite $f(x)$ et $g(x)$ sont des nombres, dont on calcule la somme. A gauche, c'est la somme des fonctions que nous essayons de définir.

On peut bien sur recommencer ce processus de construction et obtenir des *combinaisons linéaires* de fonctions $c_1 \cdot f_1 + \cdots + c_r \cdot f_r$ (où $f_1, \ldots, f_r$ sont des fonctions et $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$). Voici quelques exemples.

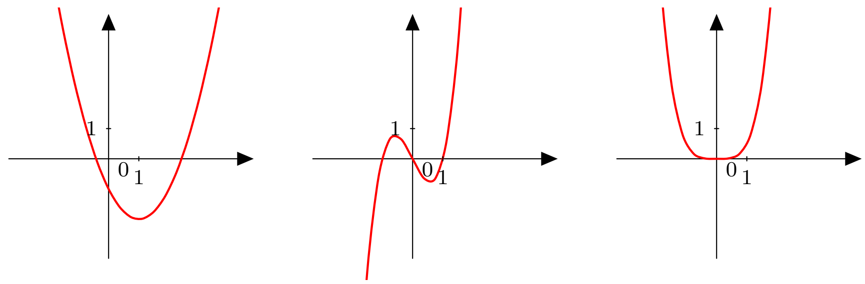
1. La fonction identique sur $\mathbb{R}$ a un domaine égal à $\mathbb{R}$ et est donnée par
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x.$$
Sa représentation graphique est donnée par



2. En faisant des produits de cette fonction et des combinaisons linéaires, on obtient les fonctions polynomiales, dont le domaine est alors également $\mathbb{R}$ et qui sont définies par

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_0,$$

où $c_0, \ldots, c_n$ sont des nombres réels. Voici les représentations graphiques de quelques fonctions polynomiales, à savoir les fonctions définies par les expressions $P(x) = x^2 - 2x - 1$, $Q(t) = 2(t^3 - t)$ et $R(x) = x^4$.



On peut bien sûr fabriquer des combinaisons plus complexes que cela. En anticipant un peu sur une des prochaines sections, on peut définir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \pi\sqrt{t} + 3t^2 - \operatorname{tg}(t).$$

On constate qu'il s'agit d'une combinaison linéaire, dont on obtient le domaine en considérant l'intersection des domaines de chacun des termes. On a donc

$$\operatorname{dom}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0, x \in \operatorname{dom}_{\operatorname{tg}}\} = [0, +\infty[\setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.2 Composées

On peut également composer des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La définition est évidente si on pense une fonction comme une "loi de transformation". On applique simplement plusieurs transformations l'une après l'autre.

Définition 3.3. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la composée de f et g (f après g) a pour domaine $\operatorname{dom}_{f\circ g} = \operatorname{dom}_g \cap \{x : g(x) \in \operatorname{dom}_f\}$ et est donnée par

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Remarque 3.4.

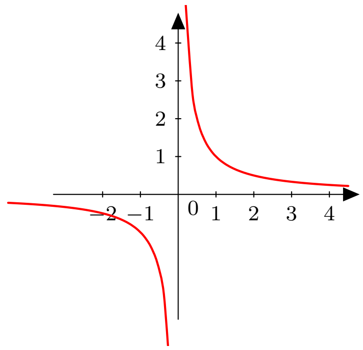
1. La condition sur le domaine est facile à comprendre, je la détaille encore : x appartient au domaine de $f \circ g$ si, et seulement si,
   (a) x appartient au domaine de g (on doit pouvoir "calculer g sur" x) ;
   (b) $g(x)$ appartient au domaine de f (on doit pouvoir "calculer f sur" $g(x)$).
2. Cela peut vous paraître lourd comme règle à appliquer, par rapport à ce que vous avez rencontré jusqu'à présent, concernant les racines carrées, les dénominateurs, et éventuellement les logarithmes. Mon but est ici de vous donner la règle générale, qui donne ce que vous connaissez pour ces quelques fonctions, mais qui vous permettront de vous adapter à toute situation nouvelle.
3. Ce procédé peut être appliqué plusieurs fois d'affilée, pour calculer le domaine de $f \circ g \circ h \circ i$. Par exemple, on pourrait exprimer facilement la condition donnant le domaine de

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3 + \sin(\sqrt{\operatorname{tg}^2(x) - 1}) + \sqrt[3]{\ln(x^2 - 3)},$$

pour autant que l'on connaisse bien toutes les fonctions qui apparaissent dans cette expression. On décompose en effet en une somme, on s'occupe de chacun des termes, qui sont des composées de fonctions simples. L'ordre de la composition est celui que vous utilisez sur votre machine à calculer pour calculer l'image d'un nombre quelconque.

En appliquant ces quelques procédés, on obtient facilement la définition des fractions rationnelles :

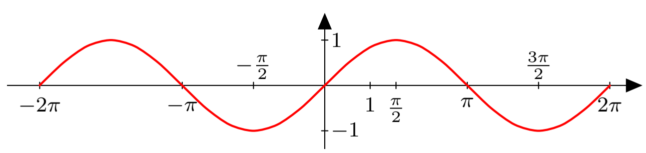
1. Soit la fonction "inversion"
$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$
Le graphe de cette fonction est $\mathcal{G}_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$. Son domaine est visiblement $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa représentation graphique est donnée par



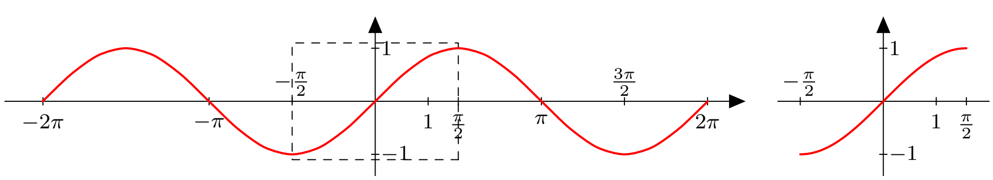
2. Si on compose une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec la fonction i, on obtient
$$i \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$
qui, d'après ce que nous avons vu, a pour domaine $\mathrm{dom}_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$. C'est bien sûr conforme à ce que vous savez.
3. On peut alors utiliser polynômes et inversions pour obtenir les fractions rationnelles, c'est à dire les fonctions de la forme.
$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{c_n x^n + \cdots + c_0}{a_m x^m + \cdots + a_0},$$
dont le domaine est $\{x \in \mathbb{R} : a_m x^m + \cdots + a_0 \neq 0\}$.

3.3 Restrictions

Il est parfois utile de ne considérer qu'une partie d'une relation. On ne s'intéresse qu'à une partie ayant de bonnes propriétés. Ce processus de restriction est semblable à ce que vous faites quand vous retouchez une photo, avant de la mettre sur internet, pour que le décor, ou les gens que vous ne voulez pas y voir en disparaissent. Prenons l'exemple de la fonction sinus, dont la représentation graphique est la suivante (voir plus bas pour les détails).



Supposons que je sois intéressé à la fonction sinus, mais seulement pour la partie de A égale à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}]$, je sélectionne cette partie et je coupe tout le reste comme ceci :



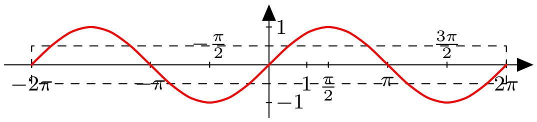
A gauche, le découpage, à droite, le résultat, sans commentaire.

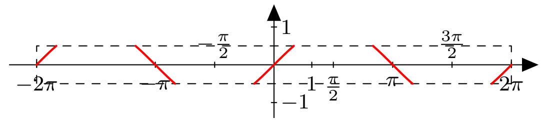
Bien sûr, il y a la définition précise, qui correspond à ce que nous venons de faire.

Définition 3.5. Si $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ est une fonction et si $A' \subset A$, alors la restriction de f à A' est donnée par
$$f|_{A'} : A' \to B : x \mapsto f(x).$$

On constate que c'est la même loi de transformation, mais qu'on ne l'applique plus qu'aux points de A'.

On peut également restreindre l'ensemble d'arrivée. Par exemple, pour la fonction sinus, on peut restreindre l'ensemble d'arrivée à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Dans ce cas, cela n'a pas beaucoup d'intérêt. Cela donne ceci :





A gauche, la sélection, et à droite la représentation graphique de la fonction restreinte. Vous constatez directement que cela a un effet sur le domaine de la fonction. Voici une définition.

Définition 3.6. Si $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ est une fonction et si $B' \subset B$, alors la restriction de f à B' est la fonction donnée par

$$f : A \to B' : x \mapsto f(x).$$

Je ne donne pas de notation précise car ce type de restriction est moins utilisé.

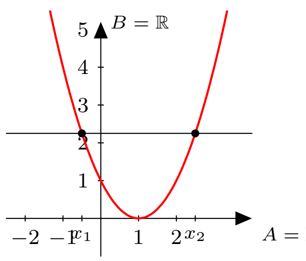
3.4 Fonctions réciproques

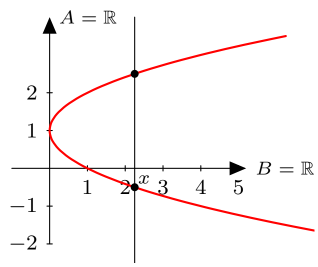
Etant donné une relation $\mathcal{R}$ de A dans B, nous avons défini la relation réciproque $\mathcal{R}^{-1}$ de B dans A par

$$(y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$$

Nous avons également constaté que la relation réciproque d'une fonction n'est pas toujours une fonction.

Ceci est visiblement dû au fait que deux points du domaine de f admettent la même image par f :





La relation de gauche est une fonction. Celle de droite ne l'est pas. Le point x de l'ensemble B est en effet en relation avec deux éléments de l'ensemble A. Cela se lit sur le premier graphique : il existe deux éléments distincts, disons x_1 et x_2 de A, qui sont en relation avec le même élément de B (qui ont la même image par f).

La définition suivante est alors justifiée.

Définition 3.7. Une fonction f de A dans B est injective si deux éléments distincts de A ont toujours des images distinctes.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.8. *Si la fonction $f : A \to B$ est injective, alors $(\mathcal{G}_f)^{-1}$ est le graphe d'une fonction de B dans A, que nous notons f^{-1}. cette fonction est la réciproque de f*[g]*. Le domaine de f^{-1} est alors l'image de f, et l'image de f^{-1} est le domaine de f.*

Les fonctions réciproques permettent de résoudre des équations. En effet, si f est injective, l'équation en x définie par

$$y = f(x),$$

où y est un nombre, n'admet pas de solution si y n'est pas dans l'image de f. Dans le cas contraire, vu l'injectivité de f, il n'y a qu'une solution, et c'est

$$x = f^{-1}(y).$$

g. On l'appelle aussi fonction inverse de f, mais il me semble que cela peut prêter à confusion avec l'inversion i que nous avons rencontrée plus haut.

Il faut cependant être prudent avec ces fonctions réciproques, car la plupart des fonctions que nous allons voir ne sont injectives que sur une partie de leur domaine, et en procédant comme ci-dessus, on oublie généralement des solutions.

La définition suivante est également importante.

Définition 3.9. Une fonction f, de A dans B est une application si $\mathrm{dom}_f = A$. Elle est surjective si $\mathrm{Im}_f = B$. Une application injective et surjective est appelée une bijection.

Une bijection de A dans B définit une correspondance parfaite entre les points de A et ceux de B. Puisqu'elle est injective, on peut définir la fonction réciproque, qui est également une bijection.

4 Parité et périodicité, croissance, décroissance, extrema

Les définitions suivantes formalisent certaines propriétés de symétrie des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elles simplifient également leur étude. Commençons par les notions de parité. Nous avons besoin d'une définition technique.

Définition 4.1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro (ou symétrique par rapport à l'origine) lorsque l'opposé de tout élément de A est encore dans A. En d'autres termes, l'ensemble A est symétrique par rapport à zéro lorsque pour tout $x \in A$, on a $-x \in A$.

Exemple 4.2. Les ensembles $\mathbb{R}$, $]-1, 1[$, $]-4, -2[\cup]2, 4[$ sont symétriques par rapport à l'origine. L'ensemble $[-1, 1[$ ne l'est pas et $[0, 2[$ non plus.

Cela permet de rappeler les définitions des fonctions paires et impaires.

Définition 4.3.
1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.
3. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, nous dirons que f est paire (resp. impaire) *sur* A si la restriction de f à A est paire (resp. impaire) [h].

Exemple 4.4. La fonction valeur absolue :

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$$

ainsi que toutes les fonctions

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Toutes les fonctions

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

sont impaires. Toute somme (ou multiple constant) de fonctions paires est paire, et toute somme (ou multiple constant) de fonctions impaires est impaire. Par exemple la fonction suivante est paire.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 - 2|x|.$$

La parité des fonctions se voit sur leur représentation graphique. Il résulte de la définition que le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire :

$$(x, y) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow (-x, y) \in \mathcal{G}_f.$$

Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine, c'est à dire : +

$$(x, y) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow (-x, -y) \in \mathcal{G}_f.$$

Ces symétries se voient sur les représentations graphiques.

Passons maintenant aux fonctions périodiques. Elles sont la transcription mathématique des phénomènes qui se reproduisent à intervalles réguliers.

h. Cela implique que $\mathrm{dom}_f \cap A$ est symétrique par rapport à zéro.

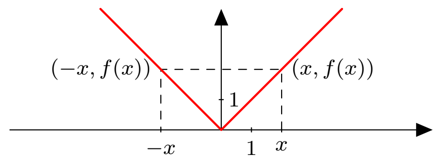


FIGURE 1 – La représentation graphique de la valeur absolue $|\cdot|$.

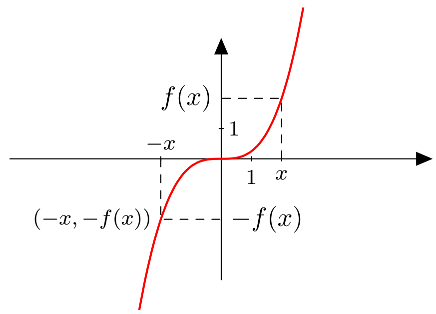


FIGURE 2 – La représentation graphique de $f(x) = x^3/4$.

Définition 4.5. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique de période T* (où T est un nombre strictement positif) si

$$f(x + T) = f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Bien sûr, si f est périodique de période T, elle est aussi périodique de période $2T$, $3T$ etc... Par exemple sinus est périodique de période 2π, 4π, 6π etc..

Définition 4.6. Si f est une fonction périodique, on appelle *période* de f le plus petit nombre T tel que f soit périodique de période T [i].

Exemple 4.7. Les fonctions sinus et cosinus ont périodiques de période 2π (d'après leur définition), tandis que les fonctions tangente et cotangente ont périodiques de période π.

Finissons cette section par les notions de croissance et décroissance.

Définition 4.8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est croissante sur A si pour tous $x, y \in A$, $x < y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$.
2. La fonction f est strictement croissante sur A si pour tous $x, y \in A, x < y$ implique $f(x) < f(y)$.
3. La fonction f est décroissante sur $A \subset \mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in A, x < y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$.
4. La fonction f est strictement décroissante sur A si pour tous $x, y \in A, x < y$ implique $f(x) > f(y)$.

Exemple 4.9. La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. La fonction sin est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tandis que la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. La fonction tg est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Enfin, terminons par les définitions des extrema.

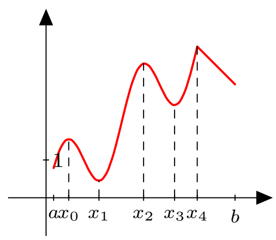
Définition 4.10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors

1. f admet un maximum global (strict) en x_0 si on a $f(x) \leqslant (<) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$;

i. Si le plus petit T existe.

2. f admet un minimum global (strict) en x_0 si on a $f(x) \geqslant (>) f(x_0)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$;
3. f admet un extremum global en x_0 si elle admet un minimum ou un maximum global en x_0.
4. f admet un maximum local (strict) en x_0 si il existe un intervalle I tel que $f|_I$ admette un maximum global (strict) en x_0 ;
5. f admet un minimum local (strict) en x_0 si si il existe un intervalle I tel que $f|_I$ admette un minimum global (strict) en x_0 ;
6. f admet un extremum local en x_0 si elle admet un minimum local ou un maximum local en x_0 ;

Voici la représentation graphique d'une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Je vous laisse déterminer les points où cette fonction admet des extrema locaux ou globaux.



5 Fonctions du premier et du second degré

Les fonctions les plus simples que nous avons déjà vues en algèbre sont les fonctions du premier et du second degré. Elles pourraient paraître anecdotiques par rapport à l'infinité de fonctions que l'on peut imaginer. Cependant, elles apparaissent dans la plupart des lois physiques. Nous avons déjà parfaitement étudié de telles fonctions. Nous passons donc en revue leurs propriétés sans autre commentaire.

Définition 5.1. On appelle fonction du premier degré toute fonction

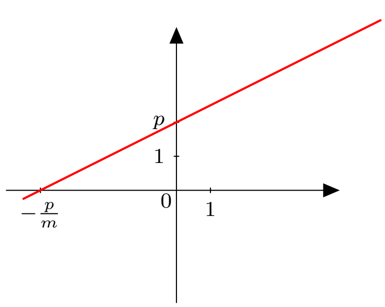
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + p,$$

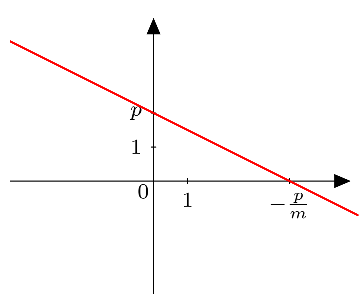
où m et p sont des nombres réels [j]

Toute fonction du premier degré est un polynôme particulier. Son domaine est donc égal à $\mathbb{R}$. Le graphe d'une telle fonction est

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + p\}.$$

C'est donc la droite d'équation $y = mx + p$. Les nombres m et p sont alors faciles à interpréter : m est la pente de cette droite. Par extension, on l'appellera pente de la fonction du premier degré correspondante. Le nombre p est simplement l'image de 0. On l'appelle "ordonnée à l'origine". Il vaut donc $f(0)$. Nous avons étudié le signe de telles fonctions, ainsi que l'équation $f(x) = 0$ quand nous avons étudié les équations et inéquations du premier degré, je n'ai rien de plus à en dire. Je termine par la croissance. En utilisant la définition, on constate qu'une telle fonction est croissante si, et seulement si $m > 0$, quelle est constante quand $m = 0$, et décroissante si, et seulement si $m < 0$. Les représentations graphiques sont évidentes :





j. On suppose souvent $m \neq 0$, mais ce n'est pas toujours obligatoire. Le cas $m = 0$ donne les fonctions constantes, qui sont assez simples à étudier.

En ce qui concerne les fonctions du second degré, le travail a également déjà été fait.

Définition 5.2. On appelle fonction du second degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont des nombres réels [k].

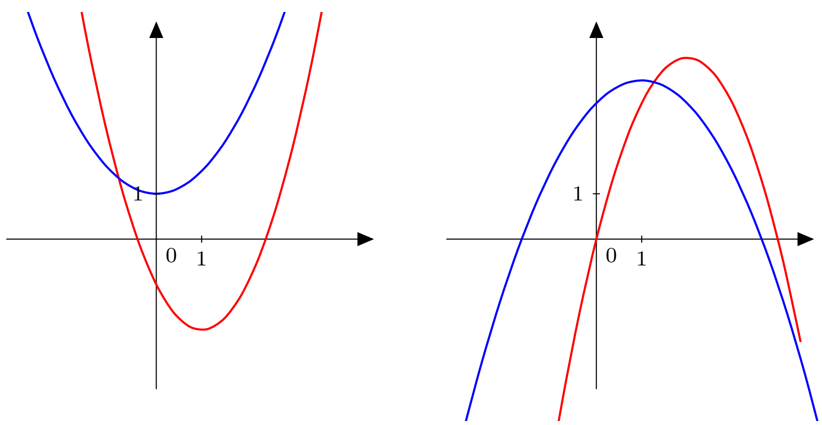
Ces fonctions ont un domaine égal à $\mathbb{R}$, et leur représentation graphique est donnée par une *parabole*. Le nombre c est facile à interpréter, c'est $f(0)$. Si $a \neq 0$, on peut réécrire la fonction du second degré de la définition précédente en

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cet artifice de calcul a déjà été utilisé pour traiter les équations du second degré. On peut, à partir de cette expression, démontrer le résultat suivant.

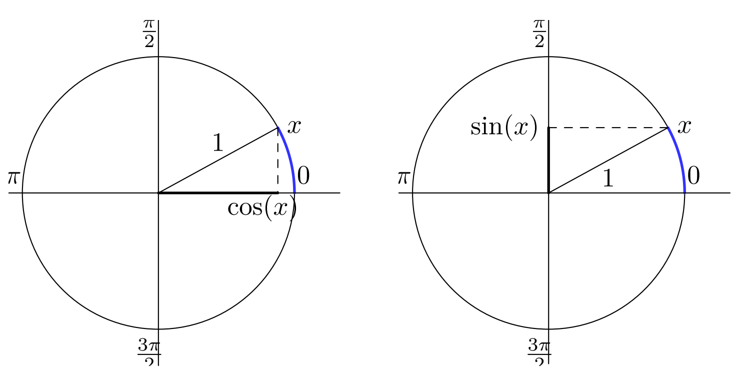
Proposition 5.3. *Le graphe de la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$. Cette fonction admet un extremum global strict en $x_0 = -\frac{b}{2a}$. C'est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.*

Voici des représentations graphiques de telles fonctions. A gauche, on a le cas $a > 0$, tandis que les représentations de droites correspondent à des nombres a négatifs.



6 Fonctions circulaires

Dans le chapitre 5, nous avons associé à tout nombre réel x, qui représente un angle exprimé en radians, les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Je saisis cette occasion pour vous rappeler les définitions. Il faut être bien conscient que dans le chapitre 5, l'angle était noté α, mais qu'ici, x désigne un nombre, qui détermine un angle exprimé en radians ou un point sur le cercle trigonométrique, qui a son tour détermine des nombres $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ et $\operatorname{cotg}(x)$.



k. On suppose souvent $a \neq 0$, sinon on est ramené au cas précédent.

Enfin, à partir de ces nombres, on peut définir les nombres tangente et cotangente de x par

$$\mathrm{tg}\,(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \text{et} \quad \mathrm{cotg}\,(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Ainsi nous avons défini quatre fonctions sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, avec $\mathrm{dom}_{\sin} = \mathbb{R}$;
2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$, avec $\mathrm{dom}_{\cos} = \mathbb{R}$;
3. $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{tg}\,(x)$, avec $\mathrm{dom}_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\mathrm{cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{cotg}\,(x)$, avec $\mathrm{dom}_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

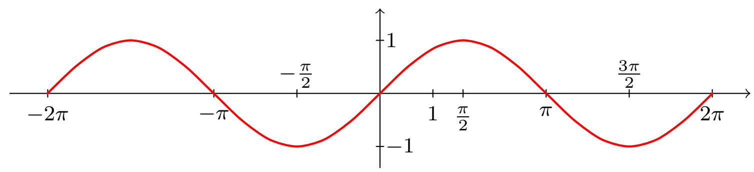


FIGURE 3 – La représentation graphique de la fonction sin (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

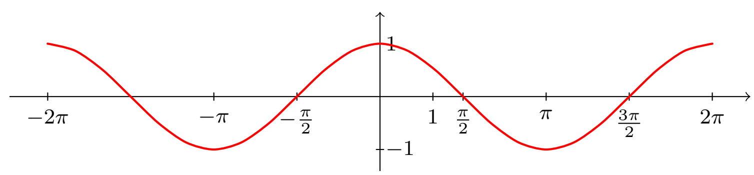


FIGURE 4 – La représentation graphique de la fonction cos (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

On remarque que les représentations graphiques sont translatées l'une de l'autre. Cela découle des formules

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \quad \text{et, évidemment} \quad \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}), \quad (x \in \mathbb{R})$$

On peut aussi considérer que les représentation graphiques s'échangent en appliquant une symétrie orthogonale dont l'axe a pour équation $x = \frac{\pi}{4}$, correspondant aux formules

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Cette même symétrie vaut pour les représentations graphiques de tg et cotg :

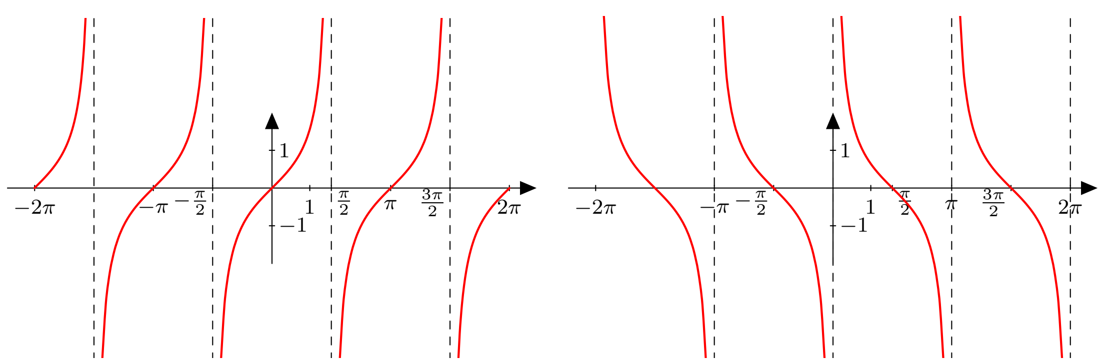
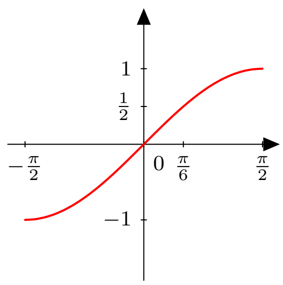


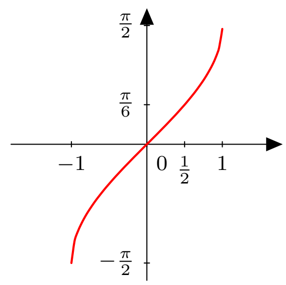
FIGURE 5 – La représentation graphique des fonctions tg et cotg (restreintes à $[-2\pi, 2\pi]$).

Nous avoins déjà vu les fonctions trigonométriques réciproques. Puisque les fonctions trigonométriques sont périodiques, elles ne peuvent pas être injectives. Pour définir une réciproque, il faut donc considérer des restrictions. C'est exactement ce que nous avons fait dans le chapitre sur la trigonométrie, en fixant une *convention* pour définir arcsin, arccos et arctg. Voici pour rappel la définition et la représentation graphique de ces fonctions (obtenues en appliquant la symétrie adéquate à une représentation graphique bien connue).

Définition 6.1. La fonction arcsin (arc sinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

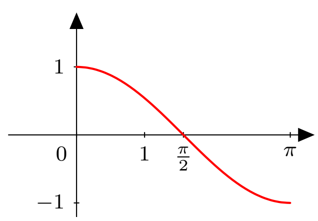
Voici à gauche la représentation graphique de la restriction de la fonction sinus, et à droite la représentation graphique de arc sinus.

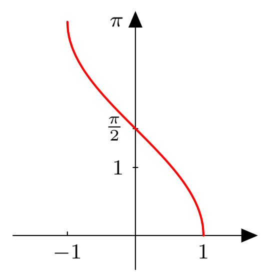




Définition 6.2. La fonction arccos (arc cosinus) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$.

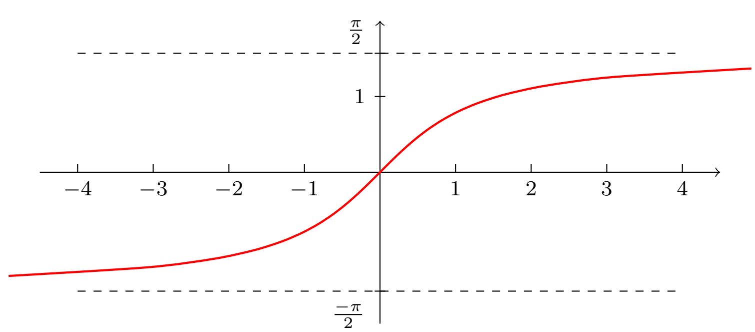
Voici à gauche la représentation graphique de la restriction de la fonction cosinus, et à droite la représentation graphique de arc cosinus.





Définition 6.3. La fonction arctan (arc tangente) est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On peut obtenir la représentation graphique de la fonction arc tangente à partir de celle de tangente.



J'ai donné ces fonctions pour avoir quelques exemples de fonctions réciproque. Pour leur utilisation en trigonométrie, il est plus important de connaître leur définition et la façon de les calculer, comme nous l'avons vu dans le module sur la trigonométrie.

7 Fonctions racines

Les fonctions racines sont également importantes. Les prototypes sont la fonction racine carrée et la fonction racine cubique. Toutes les autres sont construites de la même façon et ont les mêmes propriétés que l'une de ces deux fonctions.

7.1 La fonction racine carrée

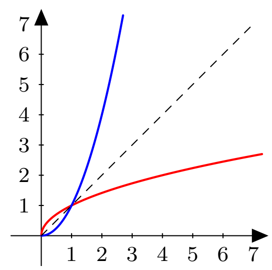
Comme nous l'avons vu, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective. Il faut la restreindre pour obtenir une fonction réciproque.

Définition 7.1. La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine carrée

$$f^{-1} = \sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}.$$

Il est important de noter que ces fonctions ne sont réciproques l'une de l'autre que sur $[0, +\infty[$, bien que l'une des composées soit définie sur $\mathbb{R}$.

On obtient la représentation graphique comme d'habitude. Voici les représentation graphiques de la fonction f et de la fonction racine carrée, ainsi que l'axe de la symétrie qui permet de passer d'une représentation à l'autre.



7.2 La fonction racine cubique

La fonction racine cubique est définie comme la fonction réciproque de la fonction qui à tout nombre associe son cube. La différence avec la racine carrée réside dans le fait que cette dernière fonction est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On est donc dans la situation plus favorable où on n'a pas besoin de passer à une restriction, et où les fonctions sont réciproques l'une de l'autre sur $\mathbb{R}$.

Définition 7.2. La fonction

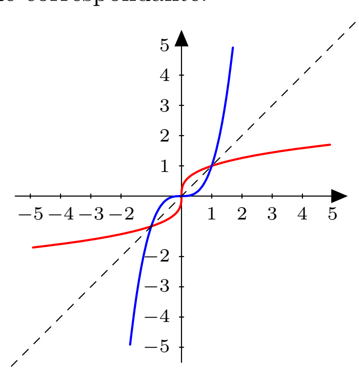
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

est une bijection. La fonction réciproque est la fonction racine cubique

$$f_3^{-1} = \sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Voici la représentation graphique correspondante.



Dans le cas des racines cubiques, on a $\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas pour la racine carrée.

7.3 Les fonctions racines p-èmes

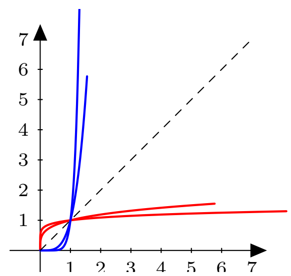
Les racines p-èmes se divisent en deux classes : les racines p-èmes pour p pair, qui ont les mêmes propriétés que la racine carrée, et les fonctions racines p-èmes pour p impair, qui ont les mêmes propriétés que la racine cubique.

Définition 7.3. Pour tout p entier pair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction réciproque est la fonction racine p-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur $[0, +\infty[$.

Voici la représentation graphique des premières fonctions racines p-èmes pour p pair (en rouge), et les fonctions puissances correspondantes (en bleu).



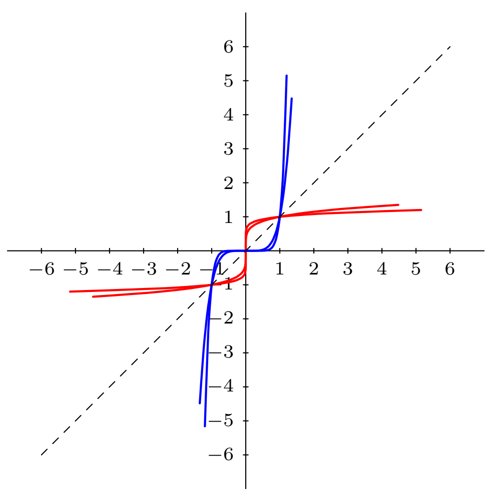
Ces fonctions sont toutes strictement croissantes.

Définition 7.4. Pour tout p entier impair, la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^p$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est la fonction racine p-ème :

$$\sqrt[p]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[p]{x}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Voici la représentation graphique des premières fonctions racines p-èmes pour p impair (en rouge), et les fonctions puissances correspondantes (en bleu).



Ces fonctions sont toutes impaires et strictement croissantes.