8. Limites et continuité

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion fondamentale en analyse : la notion de limite. Malheureusement, comme souvent en mathématiques, si l'intuition sur ce sujet peut sembler assez claire (on regarde le comportement des valeurs de la fonction quand on "s'approche d'un point"), la définition exacte peut paraître assez technique. Nous allons détailler la notion de limite des valeurs d'une fonction f en un point $a \in \mathbb{R}$, dans le cas où elle est finie ou infinie, ainsi que la limite des valeurs d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$. Nous verrons alors quelques théorèmes de calculs de limites et comment ces théorèmes s'appliquent dans des cas relativement simples.

Les limites nous serviront dans les modules suivants puisqu'elles sont nécessaires pour introduire la notion de dérivée. Elles sont également nécessaires pour le calcul intégral (peut-être sous une autre forme). Il est bien sûr important de pouvoir calculer quelques limites à l'aide des théorèmes de calcul que nous allons mettre au point, mais il est également important de bien comprendre les définitions.

Cette notion à mis des siècles à être mise au point, depuis les paradoxes de Zénon à la définition généralement attribuée à Karl Weierstrass [a], en passant par le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz. Il n'est donc pas étonnant que plusieurs définitions coexistent, et que la "bonne définition" puisse vous paraître étonnante. Je vous passe évidemment l'historique des tentatives infructueuses. Il est également possible de donner la définition des limites dans plus de cas distincts, et d'être plus précis sur les résultats, mais je crois que cela dépasse le but de ce cours préparatoire, qui se focalise sur les notions les plus utiles pour la médecine. Je vous fais donc grâce de ces détails.

La notion de continuité permet de simplifier le calcul de certaines limites et est nécessaire pour obtenir des théorèmes fondamentaux, notamment en calcul intégral.

AVERTISSEMENT I : La notion de limite admet plusieurs définitions légèrement différentes. Il se peut donc que celle utilisée ici ne soit pas exactement celle qui se trouve dans vos cours. Les théories qui en résultent diffèrent légèrement : une hypothèse par ci par là est un peu modifiée, mais le passage d'une définition à l'autre ne pose pas de problème important, et vous ne rencontrerez pas dans vos cours de sciences de situations où ces différences de définitions causeront des différences dans les résultats. Cependant les théorèmes exposés ici ne seront peut-être pas identiques à ceux qui se trouvent dans vos cours.

AVERTISSEMENT II : J'ai comme d'habitude donné un certain nombre de preuves. Elles sont là pour montrer comment les notions introduites peuvent s'articuler. Ce chapitre est également assez long. Il fallait une introduction assez longue pour expliquer les définitions, et je ne pouvais en effet faire l'impasse sur aucun théorème de calcul, pour ceux d'entre vous qui ne les auraient pas vus en classe. j'ai aussi formalisé par des théorèmes des pratiques courantes dans le calcul des limites (les théorèmes sur la localité et le prolongement par exemple) et j'ai essayé de donner pas mal d'exemples. Il est possible également que ce chapitre contienne plus d'informations que celles nécessaires dans vos futures études. Si vous faites un peu de sport, vous savez certainement que l'entraînement doit être plus difficile que la compétition...

1 Les limites : une introduction

Je fais une introduction basée sur des exemples concrets, qui amènent de manière assez naturelle les définitions des limites. Cette introduction est basée sur l'erreur de mesure indissociable de tout appareil de mesure. Quel que soit l'appareil utilisé dans une expérience scientifique, aussi sophistiqué et coûteux soit-il, il n'est précis que jusqu'à un certain point, et il ne peut pas tout mesurer. Il déclare alors comme égales des quantités qui sont en fait différentes. Nous allons voir comment introduire cette idée en mathématiques pour en déduire la notion de limite.

a. On peut citer aussi Bolzano et Cauchy, mais je ne fais pas un cours d'histoire et je résume en disant que la définition a environ 200 ans.

1.1 Les marges d'erreur des instruments de mesure

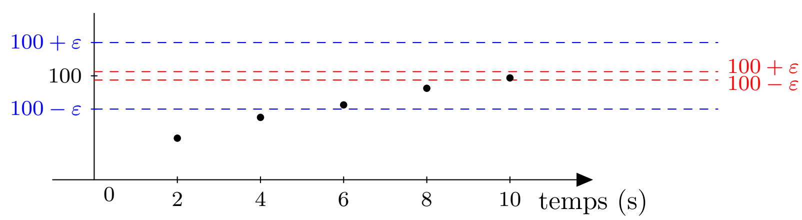
Une fois n'est pas coutume, je vous invite à faire des expériences pratiques. Il doit y avoir dans votre maison une balance de cuisine, comme celle de gauche ci-dessous, électronique ou mécanique, qui devrait vous permettre de peser de la farine ou du sucre par exemple [b]. Il y a peut-être également un pèse personne, comme la troisième balance ci-dessous. Il n'y a probablement pas de balance de pharmacie, comme la deuxième, ni de balance pour les chevaux comme la quatrième (qui n'est bien sûr pas à la même échelle que les autres), mais pour les besoins de l'expérience (de pensée), disons qu'on en dispose [c].




Ma balance de cuisine indique les masses de 5 grammes en 5 grammes. En fait, tant que la quantité de farine dans la balance se situe entre 197,5 et 202,5 grammes, la balance indique 200 g. Elle a une *marge d'erreur* (ou de précision) de 2,5 grammes. Je noterai pour cette balance $\varepsilon = 2,5\,g$ (ε est epsilon, l'analogue grec du e de erreur). Elle a aussi une *capacité limitée* : elle ne peut pas peser plus de 2000g. Je note $C = 2000\,g$.

La balance de pharmacien à côté est plus précise. Elle a une marge d'erreur $\varepsilon = 0,0001\,g$ et une capacité $C = 300g$. Le pèse personne a une capacité de $120\,kg$ et une marge d'erreur $\varepsilon = 100\,g$, tandis que la balance pour chevaux à une capacité $C = 1500\,kg$ et une marge d'erreur $\varepsilon = 5\,kg$.

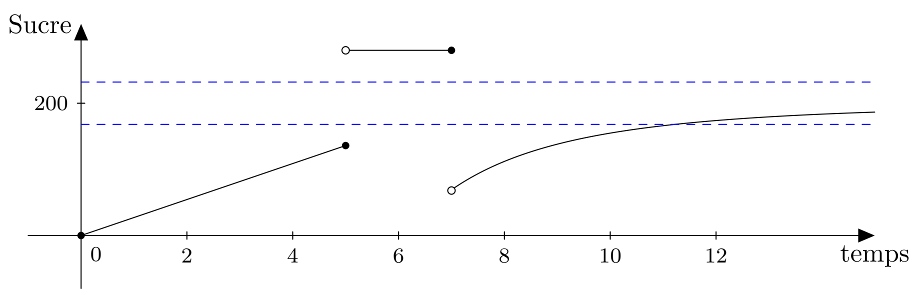
Si je pèse ma farine avec ma balance de cuisine et si je veux obtenir 100 grammes, dans un graphique de la quantité de farine en fonction du temps, j'aurai la configuration suivante :



En bleu, j'ai représenté les marges de précision de ma balance de cuisine : elle indique 100 grammes dès que la vraie masse est entre les lignes bleues. Je peux donc m'arrêter de verser après six secondes, puisque la balance indique 100. En rouge, les marges d'erreur de la balance de pharmacien. Elles ne sont pas à l'échelle, sinon on n'aurait vu qu'un seul trait. A six secondes, la balance de pharmacien n'indique pas 100. Il faut attendre 10 secondes (si je me concentre en versant), pour qu'elle indique 100.

1.2 Des limites dans ma cuisine

Supposons que je veuille mesurer 200 grammes de sucre. Je commence à verser avec précaution. Mais comme d'habitude quand je cuisine, cela ne marche pas comme je veux : voici la représentation graphique de la quantité de sucre en fonction du temps que j'obtiens.



b. En vue de faire un gâteau rectangulaire, pour étudier les fractions.
c. En mathématiques, on peut toujours supposer qu'on a tout à disposition. Il suffit de faire preuve d'imagination.

L'interprétation de ce graphique est la suivante : j'ai commencé à verser avec un débit constant, pendant 5 secondes. Puis, comme cela m'arrive fréquemment, une trop grosse quantité de sucre en poudre est tombée d'un coup. J'ai mis deux secondes à trouver une cuiller, et j'ai enlevé une bonne cuiller à soupe de sucre. Puis j'ai recommencé à verser jusqu'à atteindre 200g. J'ai même continué un peu quand la balance a indiqué 200g, car je savais qu'en fait, j'étais plus près de 197.5. Je n'ai plus versé à vitesse constante, pour éviter de revivre le même problème, j'ai plutôt versé pour que la quantité de sucre en fonction du temps soit donnée par la fonction

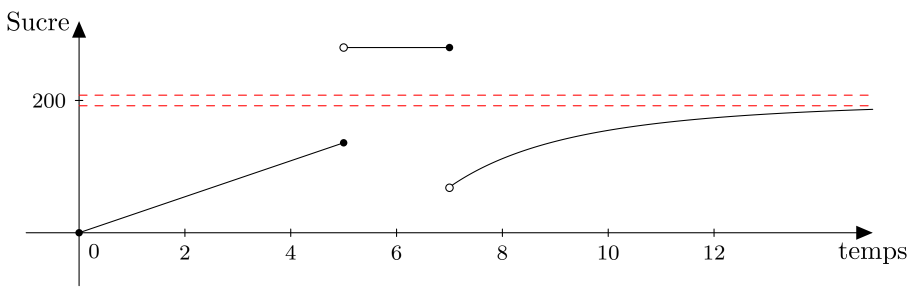
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 200 - \frac{10000}{3t^3 + 100}.$$

On voit sur le graphique (et on peut le démontrer) qu'à partir de 11 secondes environ, ma balance a indiqué 200g, et qu'elle continuera indéfiniment à indiquer 200g.

Je peux donc conclure triomphalement, que si on me laisse suffisamment de temps, la balance finit par indiquer 200g. Je note alors

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) = 200.$$

Evidemment, mon voisin Raoul arrive avec sa balance de cuisine. Il a acheté une balance de pharmacien [d]. Il me dit donc que ce n'est pas juste, puisque avec sa balance, après 11 secondes, on n'a pas 200 grammes. C'est normal, puisque sa balance est plus précise : elle n'indique 200 que quand la mesure réelle est dans la bande déterminée par les lignes rouges du graphique ci-dessous :



Il faut donc que je verse plus longtemps, puisque sa balance à une marge d'erreur de 0,01g (il s'est fait avoir en l'achetant). On recommence donc toute l'expérience avec sa balance. On utilise la même fonction, et cela nous prend environ une minute 40 (une centaine de secondes), pour arriver à ce que sa balance indique 200 grammes. Nous arrivons à la conclusion que si son frère arrive avec sa balance plus précise, cela nous prendra peut-être plus longtemps, mais à partir d'un moment donné, elle indiquera 200 grammes. Ce sera le cas avec n'importe quelle balance.

Nous pouvons alors donner la définition de la limite en question, pour la quantité de sucre :

on a $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 200$ si, et seulement si,

"*Quelle que soit la précision de la balance utilisée, à partir d'un certain moment, la balance indique toujours 200*".

On peut traduire cette définition avec des symboles mathématiques :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : t > M \Rightarrow S(t) \in]200 - \varepsilon, 200 + \varepsilon[.$$

On reconnaît la marge d'erreur ε, le nombre M indique un moment (qui dépend de ε, comme nous l'avons vu) et la condition $S(t) \in]200 - \varepsilon, 200 + \varepsilon[$ dit que la balance indique 200 grammes.

d. Mon voisin Raoul ne fait rien comme tout le monde : c'est un imbécile. Il paraît que c'est le beau-frère d'un humoriste bien de chez nous.

1.3 Des limites dans le labo de physique I

On peut considérer en physique un gaz contenu dans un piston par exemple, dont on peur faire varier le volume. On peut mesurer la pression du gaz, sa température, sa quantité, en nombre de môles. Toutes ces mesures sont liées par une *relation*, ou une loi physique (si on se place dans les hypothèses adéquates, celle des gaz parfaits). On a la loi (des gaz parfaits) :

$$p\,v = n\,R\,T.$$

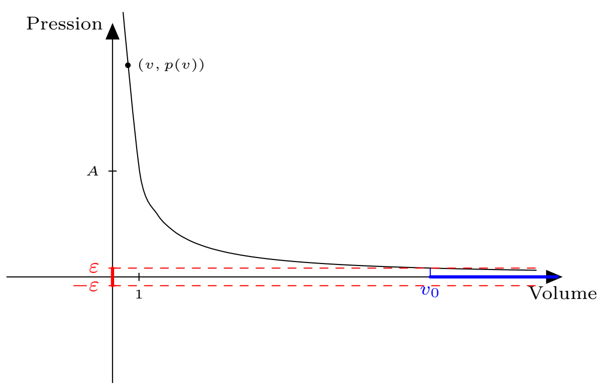
Ici, p représente la pression, v le volume, n le nombre de môles, T la température et R la constante universelle des gaz parfaits.

Supposons que l'on puisse fixer la température, et le nombres de môles. On peut alors considérer la pression en fonction du volume, qui peut être arbitrairement grand. On obtient la fonction

$$p : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : v \mapsto p(v) = \frac{A}{v},$$

où A est une constante strictement positive (on a $A = n_0 R T_0$, où n_0 est le nombre de môles fixé et T_0 la température fixée).

On est dans la même situation que dans ma cuisine : quel que soit le manomètre utilisé, il a aussi une capacité fixée : il ne peut mesurer que des pressions inférieures à C, et il a une marge d'erreur ε. La pression n'est en réalité jamais nulle, si $A > 0$, mais quel que soit l'instrument de mesure, à partir d'un certain volume, il indique 0. On peut le voir sur le graphique :



On a donc ici aussi $\lim_{v \to +\infty} p(v) = 0$. Cela s'exprime par la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_0 \in \mathbb{R} : v > v_0 \Rightarrow p(v) \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \tag{1}$$

On reconnaît ici tous les ingrédients : la marge d'erreur de l'instrument ε, le moment v_0 à partir duquel la vraie mesure est dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, ce qui équivaut au fait que l'instrument de mesure indique 0 et le symbole $\forall$, qui indique que la conclusion doit être vraie pour tout appareil.

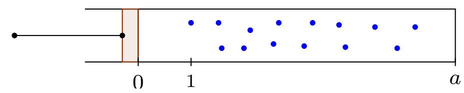
Dans ce cas assez simple, on peut même vérifier la condition (1) de manière précise. Etant donné ε, on peut exprimer la condition $p(v) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$: On a, puisque $p(v)$ est un nombre positif pour tout $v \in [0, +\infty[$:

$$p(v) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \text{ssi} \quad p(v) < \varepsilon \quad \text{ssi} \quad \frac{A}{v} < \varepsilon \quad \text{ssi} \quad v > \frac{A}{\varepsilon}.$$

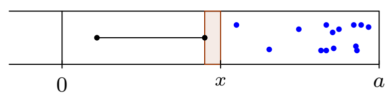
La dernière équivalence vient du fait que v et ε sont strictement positifs. On constate que pour tout ε, pour $v > v_0 = \frac{A}{\varepsilon}$, on a $p(v) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

1.4 Des limites dans le labo de physique II

Considérons la situation physique suivante, où on a représenté (de profil), un tube cylindrique de longueur a dont la base a une surface unitaire. On a toujours un gaz (supposé parfait), et on fixe toujours la température et le nombre de môles, de sorte que la pression et le volume sont toujours liées par la même relation. Au lieu de tirer le piston pour augmenter le volume, on le pousse, pour faire diminuer le volume.



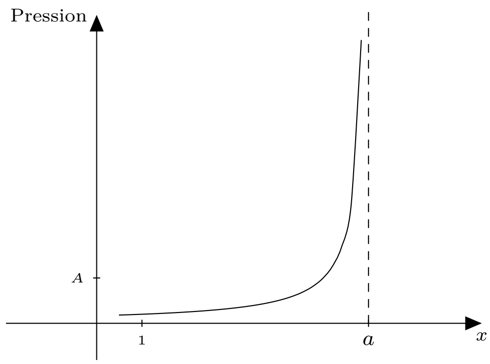
On indique la position du piston à l'aide d'une graduation sur le cylindre. Le volume et la pression s'expriment donc tous les deux en fonction de la position du piston, repéré par un nombre x. Si on le pousse un peu, on obtient la situation suivante :



On peut naturellement se poser la question du comportement de la pression quand x va tendre vers a. Il n'est pas difficile d'exprimer la pression en fonction de x : puisque la base est de surface unitaire (égale à 1 dans les unités adéquates), le volume du gaz emprisonné dans le piston est $a - x$ (puisque le piston est un cylindre). La pression peut donc être calculée par la fonction :

$$p : [0, a[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{A}{a - x},$$

où A est une constante strictement positive. Cette fonction n'est définie que sur $[0, a[$ et pas pour des valeurs de x plus grandes que a, puisque cela ne correspond pas à la situation physique en question. Cela ne nous empêchera pas de définir et de calculer la limite. On peut représenter cette fonction :



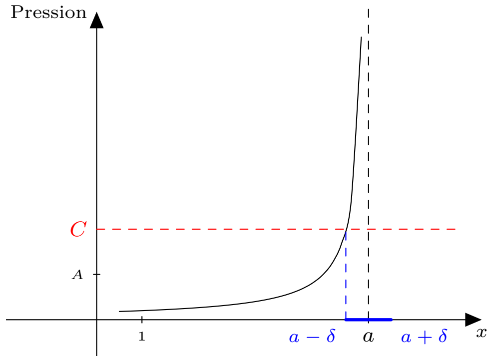
On constate que la pression devient extrêmement grande si on s'approche de a. En fait, on peut exprimer cela très facilement en utilisant l'autre limitation de l'instrument de mesure que l'on utilise : nous avons utilisé qu'il y a une limitation ε à sa précision. Mais nous savons aussi qu'il ne peut mesurer que des pressions inférieures à une certaine capacité C. Au delà de C, on peut convenir qu'il n'indique plus rien, ou qu'il indique "au secours" ou qu'il indique $+\infty$. On constate sur le graphique le phénomène suivant (mais on peut assi le démontrer comme plus haut) :

Quelle que soit la capacité C de l'appareil de mesure, alors cette capacité est dépassée (il marque alors $+\infty$), pour tous les points x suffisamment proches de a.

On note

$$\lim_{x \to a} p(x) = +\infty.$$

La condition "x est suffisamment proche de a" s'exprime par $x \in]a - \delta, a + \delta[$ où δ est un nombre strictement positif (δ est l'analogue grec de d et indique une distance).



Vous pouvez choisir une capacité plus grande que celle que j'ai indiquée et trouver le δ correspondant.

Remarque 1.1. Les points x situés à droite de a sur le graphique ne jouent aucun rôle, puisque la pression ne peut pas y être calculée : la condition dans la définition de la limite ne s'applique qu'aux points du domaine de définition de la fonction que l'on considère.

En tenant compte de cette remarque, on peut traduire en termes formels la condition qui définit la limite précédente :

$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in]a-\delta, a+\delta[\text{ et } x \in \mathrm{dom}_p) \Rightarrow p(x) > C.$$

Terminons cette sous-section par une remarque sur les notations : on va beaucoup utiliser des conditions du type $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Nous avons vu dans le chapitre sur les nombres que cela s'exprime aussi en termes de distances. Cela veut dire que la distance de x à a est strictement inférieure à δ. On a donc une expression en termes de valeurs absolue et on a

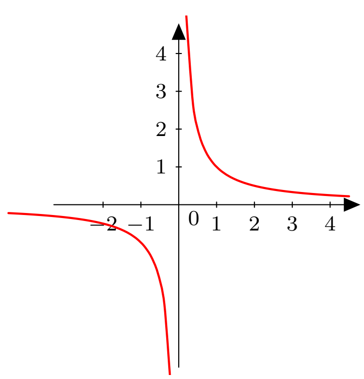
$$x \in]a-\delta, a+\delta[\quad \text{ssi} \quad |x-a| < \delta.$$

1.5 Une fonction bien connue

Pour ce dernier exemple, je reste en mathématique et je considère une fonction qui nous a déjà servi dans le module précédent pour définir les fractions rationnelles : la fonction “inversion”

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Je rappelle qu'elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que représentation graphique est donnée par



On vient de calculer la limite de cette fonction en $+\infty$. Vous pouvez vous demander quelle serait la limite en $-\infty$, et comment définir cela. Il suffit de dire que quel que soit l'instrument de mesure et sa marge d'erreur ε, quand x est suffisamment petit, l'instrument indique 0. On a donc $\lim_{x\to-\infty} i(x) = 0$.

Passons maintenant au comportement de cette fonction quand x “tend vers 0”. Pour les points $x > 0$, on connaît son comportement : il a été étudié dans le cas de la pression (section 1.4). Pour les nombres $x < 0$, on peut imaginer que l'appareil de mesure est aussi limité, dans les nombres négatifs. Pour simplifier, supposons qu'il soit limité de la même manière dans les nombres négatifs, à savoir qu'il n'indique plus rien quand la valeur réelle est inférieure à $-C$. On constate alors que, quel que soit l'appareil utilisé, pour tous les points suffisamment proches de 0, l'appareil de mesure n'indique plus rien, soit parce que $i(x)$ est supérieur à C, soit parce que $i(x)$ est inférieur à $-C$. Cette alternative peut être résumée par la condition unique $|i(x)| > C$. On note alors $\lim_{x\to 0} i(x) = \infty$ et la définition est

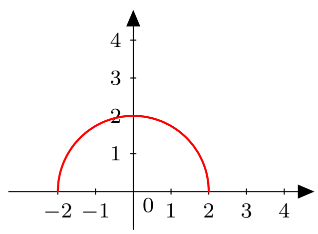
$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in]0-\delta, 0+\delta[\text{ et } x \in \text{dom}_i) \Rightarrow |i(x)| > C.$$

Je vous laisse fixer C sur la représentation graphique ci-dessus et déterminer δ en conséquence.

2 Les limites : définitions

Nous avons vu dans les exemples des limites finies (la limite est un nombre) en $+\infty$, et une limite infinie en un nombre (L). On peut maintenant par analogie donner toutes les définitions des limites en $-\infty$ et des limites finies en un nombre. Pour les comprendre facilement, il faut penser en termes de marges d'erreur ou de capacité pour la "mesure de la fonction", et en termes de valeurs suffisamment grandes ou suffisamment proches d'un nombre donné.

Remarque 2.1. Il faut également que la question de la limite ait un sens. En mathématique, on est forcé de se poser la question. En sciences, le caractère concret de ce que vous calculez devrait vous épargner ce genre de détail. Par exemple, si on se demande que peut valoir $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4-x^2}$, cette question n'a pas de sens. Cela se voit sur la représentation graphique de la fonction en question :



La fonction n'étant définie que sur $[-2, 2]$, la question de la limite en $+\infty$ n'a pas de sens, pas plus que la définition de la limite en $-\infty$, ou que la définition de la limite en 3.

Pour définir et calculer la limite en un point, comme nous l'avons vu, il n'est pas nécessaire que ce point appartienne au domaine de la fonction dont on calcule la limite. Mais il faut qu'il colle (adhère) au domaine, on dit que ce point doit être adhérent au domaine de la fonction. Voici une définition précise.

Définition 2.2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si pour tout $\delta > 0$ $A \cap]a-\delta, a+\delta[$ n'est pas vide. On dit que $+\infty$ est adhérent à A si pour tout $C \in \mathbb{R}$, $A \cap]C, +\infty[$ n'est pas vide. On dit que $-\infty$ est adhérent à A si pour tout $C \in \mathbb{R}$, $A \cap]-\infty, C[$ n'est pas vide.

Je donne maintenant les définitions les plus importantes et je vous laisse les autres pour les exercices. On procède par analogie par rapport aux situations que nous avons déjà rencontrées.

2.1 Limites finies en l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et ℓ un nombre réel. On calcule la limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à dom_f.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \text{dom}_f \text{ et } x > M) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

   On dit alors que f admet une limite finie (égale à ℓ) en $+\infty$.

2. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (x \in \text{dom}_f \text{ et } x < M) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

   On dit alors que f admet une limite finie (égale à ℓ) en $-\infty$.

2.2 Limites infinies en un réel

Soit f une fonction et a un nombre réel, adhérent à dom_f.

1. On a $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si
$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \text{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > C.$$
On peut toujours se limiter aux $C > 0$ dans cette définition.
2. On a $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si
$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \text{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < C.$$
Ici aussi, on peut se limiter aux nombres négatifs dans la définition, i.e. $C = -C'$ avec $C' > 0$.
3. On a $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si
$$\forall C \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : (x \in \text{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > C.$$
On peut se limiter aux nombres $C > 0$ dans cette définition.

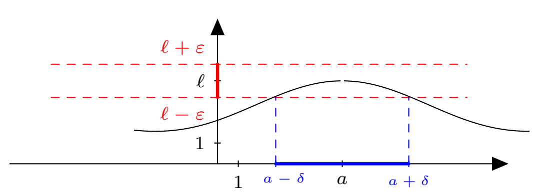
Dans chacune de ces trois situations, on dit que f *admet une limite infinie en* a.

2.3 Limite finie en un réel

Il suffit de mixer les deux types de définitions que nous venons de voir. On cherche une limite finie, disons ℓ, on va avoir besoin d'un appareil, avec une certaine marge d'erreur ε. On va exprimer que pour les points proches de a (entre $a - \delta$ et $a + \delta$ pour un certain δ strictement positif), l'appareil indique ℓ. On obtient donc la définition suivante.

Définition 2.3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à dom_f et ℓ un nombre réel. On dit que la limite de f pour x tendant vers a est égale à ℓ, ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \text{dom}_f \text{ et } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
On note alors
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$
et on dit que f *admet une limite finie en* a*, égale à* ℓ.

Voici une représentation graphique de cette définition. Il faut bien sûr voir que l'on doit trouver un δ pour chaque ε, mais je ne peux en dessiner qu'un.



2.4 Limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$

Comme annoncé plus haut, je vous laisse comme exercice de poser ces définitions. Il suffit de mixer correctement les définitions que nous avons posées plus haut. Notez que les théorèmes que je verrai plus bas s'appliquent, le cas échéant, avec ce type de limites, c'est à dire en particulier à
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

2.5 Une définition légèrement différente de la notion de limite

Comme je l'ai déjà dit, il existe de légères variantes de cette définition selon les sources que vous pourrez consulter. La principale étant de ne pas considérer la valeur de f en a dans la définition, contrairement à ce que nous avons fait. Cela donne ceci :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \operatorname{dom}_f \text{ et } 0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Si vous êtes fort au jeu des différences, vous aurez remarqué la condition $0 < |x-a|$. Cela veut dire que l'on exclut la valeur de a dans la condition que les valeurs de f doivent satisfaire.

Ces définitions coïncident si le point a en lequel on calcule la limite n'est pas dans le domaine de la fonction considérée (ce sera le cas notamment pour le calcul des dérivées). Les définitions coïncident également pour les fonctions les plus courantes que nous rencontrerons.

Je resterai sur ma première définition, incluant le point a.

2.6 Quelques exemples

Il est utile de voir que l'on peut calculer un certain nombre de limites à partir de la définition.

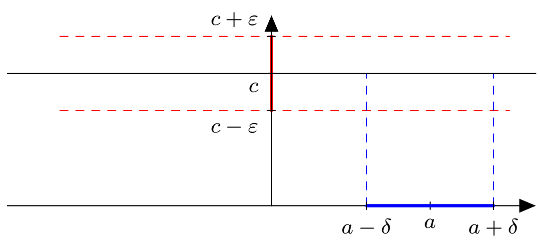
1. Soit f_1 une fonction constante $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$, où c est un nombre réel. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} c = c.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ arbitrairement. On a alors, pour tout x tel que $|x-a| < \delta$,

$$|f_1(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Voici la représentation graphique.



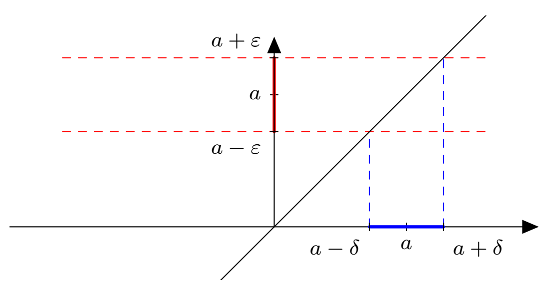
2. Soit f_2 la fonction identique $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f_2(x) = \lim_{x \to a} x = a.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

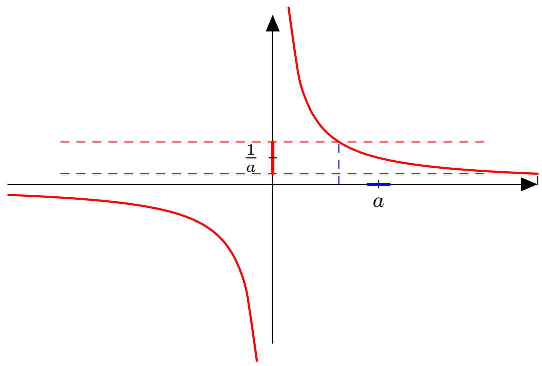
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f_2(x) - a| = |x - a| < \varepsilon :$$

il suffit de poser $\delta = \varepsilon$. En voici une illustration graphique.

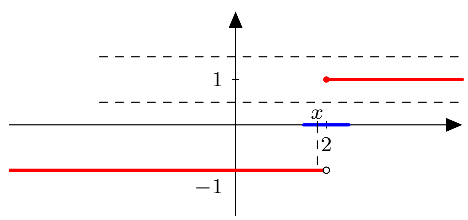


On peut bien sûr choisir aussi tout δ inférieur à ε, mais strictement positif.

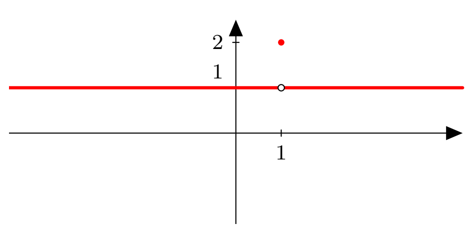
3. Soit f_3 la fonction inversion $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. On a pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$\lim_{x\to a} f_3(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$
Voici la représentation graphique, comme d'habitude. Notez les nombres $\frac{1}{a} - \varepsilon$, $\frac{1}{a} + \varepsilon$, $a - \delta$ et $a + \delta$ correspondant à la définition. On pourrait, si on avait plus de temps, trouver une forme de δ en fonction de ε. Il suffit de trouver les intersections entre les droites représentées en pointillé ci-dessous et le graphe de la fonction, et de discuter selon le signe de a.



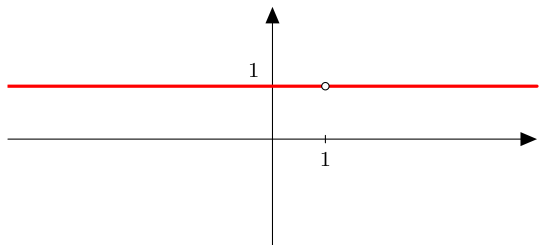
Nous avons également vu plus haut que $\lim_{x\to 0} f_3(x) = \infty$.
4. Soit la fonction f_4 définie par
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$
La fonction $f_4(x)$ n'admet pas de limite finie en 2. Cela se voit sur la représentation graphique, et peut aussi se démontrer à partir de la définition. Montrons en effet que la limite n'est pas égale à 1. Il faut montrer la négation de la définition. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Quel que soit $\delta > 0$, il existe toujours au moins un nombre x appartenant au domaine de f et tel que $x \in]2-\delta, 2+\delta[$ et $f_4(x) \notin]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$:



On montre de la même façon que la limite ne peut pas être -1 ni aucun autre nombre réel. Elle ne peut pas non plus être infinie.
5. Soit la fonction f_5 définie par
$$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$
La fonction $f_5(x)$ n'admet pas de limite finie en 1. Ici encore la représentation graphique parle d'elle-même. Je vous laisse le soin de démontrer que la limite n'existe pas, en montrant qu'elle ne vaut ni 1, ni 2, ni aucun autre nombre réel. Il faut pour cela mettre la définition en défaut comme je l'ai fait plus haut.



6. Soit la fonction f_6 définie par
$$f_6 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1.$$
La limite de $f_6(x)$ pour x tendant vers 0 existe et vaut 1. En effet, la différence avec la fonction précédente est la valeur en 1, qui empêchait la limite finie d'exister dans le cas précédent.



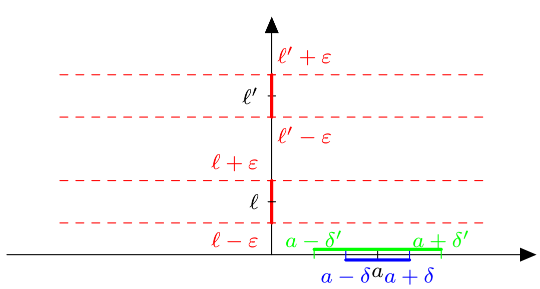
2.7 Unicité de la limite et valeur en un point du domaine

Voici un premier résultat qui découle directement de la définition, c'est l'unicité de la limite. On se demande souvent pourquoi les mathématiciens passent leur temps à vérifier l'unicité. C'est simplement parce qu'il est utile que, quelle que soit la méthode employée (correcte), on arrive au même résultat.

Proposition 2.4. *Si une fonction f admet une limite finie en a, alors cette limite est unique. Autrement dit,*
$$\textit{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell', \quad \textit{alors} \quad \ell = \ell'.$$
Si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si f admet une limite finie en a alors on a
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

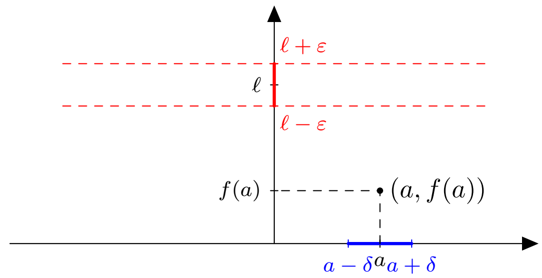
Remarque 2.5.
1. Le premier point justifie qu'on parle de *la* limite et qu'on introduise une notation.
2. Ce résultat se généralise dans tous les cas où la limite existe, mis à part le fait que si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$ dans l'énoncé, on peut avoir $\ell' = \infty$.
3. Le deuxième point est une conséquence de notre définition de la limite finie. Ce type de résultat peut changer avec les définitions, et vous ne l'avez probablement pas vu comme tel dans vos études antérieures. Il permet le calcul de limites finies en des points du domaine de la fonction : si a est dans le domaine de f, soit la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas, soit elle vaut $f(a)$.

Démonstration. Ici encore, je vous montre l'idée des deux démonstrations, et je vous passe les détails techniques. Pour le premier point, supposons que la fonction admette deux limites finies distinctes ℓ et ℓ' en a. On aurait alors la situation suivante, en choisissant ε inférieur à la moitié de la distance entre ℓ et ℓ' :



Les points $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap]a-\delta', a+\delta'[\cap \mathrm{dom}_f$ doivent avoir une image dans $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$, ce qui est visiblement impossible.

Pour la seconde affirmation, on suppose que la limite existe, et qu'elle vaut $\ell \neq f(a)$, et on montre qu'il y a un problème. On a la situation suivante, en choisissant pour ε suffisamment petit pour que $f(a)$ n'appartienne pas à $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$:



On constate que le point a est dans $\mathrm{dom}_f \cap]a-\delta, a+\delta[$, quel que soit $\delta > 0$ et que son image ne peut pas être dans $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. □

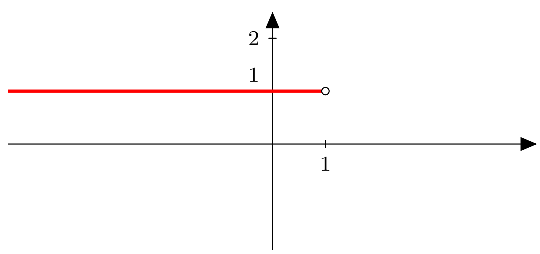
2.8 Limites à gauche et à droite

Il arrive parfois qu'on ne s'intéresse pas au comportement d'une fonction f au voisinage d'un nombre réel a, mais seulement aux valeurs $f(x)$ pour des valeurs de x inférieures à a ou pour des valeurs de x supérieures à a. Il est alors utile de définir les limites des valeurs de f correspondantes. Cela se fait sans difficulté : il suffit de ne pas tenir compte des valeurs supérieures à a ou inférieures à a, respectivement. On considère donc naturellement les limites des fonctions restreintes $f|_{]-\infty,a[}$ et $f|_{]a,+\infty[}$. Evidemment, cette notion n'a pas de raison d'être si on regarde une limite en $-\infty$ ou $+\infty$. Enfin, pour calculer la limite à gauche en a, il faut que a soit adhérent à $\mathrm{dom}_{f|_{]-\infty,a[}} = \mathrm{dom}_f \cap]-\infty, a[$ et pour calculer la limite à droite, il faut que a soit adhérent à $\mathrm{dom}_f \cap]a, +\infty[$. Si ces conditions sont remplies, on peut introduire la définition suivante.

Définition 2.6. Soir a un nombre réel.

1. On dit que *la limite à gauche* de $f(x)$ pour x tendant vers a vaut ℓ (un nombre réel, $+\infty$, $-\infty$, ou ∞) si on a $\lim_{x\to a} f|_{]-\infty,a[}(x) = \ell$. Dans ce cas on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.
2. On dit que la *limite à droite* de $f(x)$ pour x tendant vers a vaut ℓ si on a $\lim_{x\to a} f|_{]a,+\infty[}(x) = \ell$. Dans ce cas on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

Exemple 2.7. Reprenons la fonction f_5 de la section précédente. La limite en 1 n'existait pas, précisément à cause de la valeur de f en 1. Si on veut calculer la limite en 1^-, c'est à dire la limite à gauche, on restreint la fonction à $]-\infty, 1[$. D'un point de vue graphique, cela donne ceci :



On constate directement que la limite existe et qu'elle vaut 1. On écrit donc $\lim_{x\to 1^-} f_5(x) = 1$.

De la même façon, en appliquant la définition, on voit que les limites à gauche et à droite en 2 existent pour f_4 et qu'on a $\lim_{x\to 2^-} f_4(x) = -1$ et $\lim_{x\to 2^+} f_4(x) = 1$.

3 Quelques théorèmes de calcul des limites

En pratique, il serait pénible d'utiliser uniquement la définition des limites afin de les calculer pour des fonctions un peu élaborées. Il existe un nombre considérable de méthodes de calcul des limites, et mon but n'est pas de les revoir toutes ici. Comme je l'ai annoncé dans le chapitre sur les fonctions, je vais préciser ce qui se passe pour les grandes constructions de fonctions. Cela sera certainement suffisant pour le reste de ce cours préparatoire. Le premier résultat concerne les fonctions admettant une limite finie en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On supposera que toutes les limites peuvent être calculées en a, pour ne pas alourdir l'énoncé.

Théorème 3.1 (Sommes et produits : limites finies)**.** *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Si on a*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \ell', \quad (\ell, \ell' \in \mathbb{R}),$$

alors on a

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + \ell', \quad \lim_{x \to a} (fg)(x) = \ell\,\ell', \quad \lim_{x \to a} (cf)(x) = c\ell.$$

Remarque 3.2. Ce résultat s'applique également aux limites à gauche et à droite puisqu'il s'agit de limites (au sens usuel) de fonctions particulières. On peut retenir ce résultat comme ceci : la limite d'une somme est la somme des limites, et la limite d'un produit est le produit des limites.

Démonstration. Pour votre information, la preuve se base sur la définition de la limite et des propriétés des valeurs absolues. Il y a de temps à autre un artifice de calcul. Montrons par exemple le cas de la somme. On doit démontrer l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_{f+g} \text{ et } |x-a| < \delta) \Rightarrow |(f+g)(x) - (\ell + \ell')| < \varepsilon.$$

Mais si ε est donné, on peut appliquer la définition de la limite pour f et pour g, disons avec $\frac{\varepsilon}{2}$ [e]. On obtient alors les conditions suivantes :

$$\exists \delta_1 > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \text{ et } |x-a| < \delta_1) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists \delta_2 > 0 : (x \in \mathrm{dom}_g \text{ et } |x-a| < \delta_2) \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si δ est le plus petit nombre entre δ_1 et δ_2, alors on a

$$(x \in \mathrm{dom}_{f+g} \text{ et } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La partie de droite de cette implication implique à son tour

$$|f(x) + g(x) - (\ell + \ell')| \leqslant |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et on a démontré ce qu'il fallait. □

Voici quelques exemples d'applications.

Exemple 3.3.

1. Nous avons démontré que $\lim\limits_{x \to a} x = a$ pour $a \in \mathbb{R}$. Nous pouvons en déduire la limite de toute fonction polynomiale

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0,$$

   puisqu'une telle fonction s'exprime comme une somme de produits de cette première fonction. La proposition précédente implique qu'on a

$$\lim_{x \to a} P(x) = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 = P(a).$$

2. Nous avons démontré que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

   On trouve alors directement $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^3} = 1$, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$.

e. Cela revient à choisir un instrument de mesure deux fois plus précis.

Bien sûr, il arrive assez fréquemment qu'on soit face à une somme de fonctions dont l'une admet une limite finie, et l'autre une limite infinie. Il faut alors généraliser la proposition précédente au cas où ℓ ou ℓ' serait infini.

Théorème 3.4 (Sommes et produits : limites infinies)**.** *Soient f et g deux fonctions, et a un nombre réel ou $-\infty$, ou $+\infty$.*

1. *Si f admet une limite finie en a et si g admet une limite infinie en a ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) alors $f+g$ admet la limite ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) en a.*
2. *Si f admet une limite finie $c \neq \mathbf{0}$ en a et si g admet une limite infinie en a ($-\infty, +\infty, \infty$ resp.), alors fg admet une limite infinie en a :($-\infty, +\infty, \infty$ resp.) si $c > 0$ et ($+\infty, -\infty, \infty$ resp.) si $c < 0$.*
3. *Si f et g admettent la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a, alors $f+g$ admet la limite $+\infty$ (resp $-\infty$).*
4. *Si f et g admettent la limite ∞ en a, alors $f\,g$ admet la limite ∞ en a. De plus, si f et g admettent simultanément les limites $+\infty$ ou $-\infty$, alors $f\,g$ admet la limite $+\infty$ en a. Si l'un des deux tend vers $+\infty$ et l'autre $-\infty$, alors $f\,g$ admet la limite $-\infty$.*

Démonstration. A titre d'information, ces résultats se démontrent en utilisant les définitions et quelques propriétés des valeurs absolues, comme pour le théorème précédent. Elles sont un peu techniques, donc je vous en fait grâce. □

Exemple 3.5.

1. On a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + 1 + x = +\infty$.
2. On a $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$.
3. On a $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x} = \infty$, puisque $\lim_{x\to 0}(x+2) = 2 > 0$. On applique alors le point 2. du théorème précédent.
4. On peut démontrer qu'on a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. On a donc $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + \sqrt{x}) = +\infty$, en appliquant le point 3. du théorème précédent.
5. Par contre, le théorème ne s'applique pas pour calculer $\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x})$. Cette limite peut être calculée et vaut quand même $+\infty$, mais si on a bien une somme, on a $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim x \to +\infty - \sqrt{x} = -\infty$.

Le résultat suivant est fondamental car beaucoup de fonctions sont des composées de fonctions simples.

Théorème 3.6 (Fonctions composées)**.** *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, +\infty\}$. Si on a*

1. $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$
2. $\lim_{t\to \ell} f(t) = \ell'$

et alors on a $\lim_{x\to a} f \circ g(x) = \ell'$.

Ce résultat est aussi assez naturel : si on est en présence de la fonction $f \circ g$, c'est à dire f après g, et si on veut calculer la limite pour x tendant vers a de cette fonction, il est normal de regarder vers quoi g tend quand x tend vers a. Si on trouve un réponse, disons ℓ, il est naturel de regarder la limite de f en ℓ. La preuve n'utilise guère plus que la définition des limites, mais il faut traiter tous les cas, ce qui prend pas mal de temps...

Voici plutôt quelques exemples.

Exemple 3.7.

1. On a démontré que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$. On sait aussi que $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + 2x) = +\infty$. On a donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x} = 0.$$
2. On peut démontrer que les fonctions racines admettent des limites en tous les points de leur domaine de définition. En composant avec les fonctions polynomiales, et en faisant des sommes, on obtient par exemple
$$\lim_{x\to 3}(\sqrt{x^3 - 4x} - 2x) = \sqrt{15} - 6.$$

Ce que nous avons vu pour le quotient ci-dessus se généralise à tous les quotients.

Théorème 3.8 (Quotients)**.** *Soient g une fonction et a un point adhérent au domaine de g.*

1. *Si on a* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_0$ *alors on a* $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell}$ *;*
2. *Si on a* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ *où* $\ell = +\infty, -\infty,$ *ou* ∞ *alors on a* $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$ *;*

En particulier, pour calculer $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$*, on peut appliquer ce résultat et les théorèmes 3.1 et 3.4.*

Démonstration. Il suffit de voir que la fonction $\frac{1}{g}$ est en fait la composée $i \circ g$, où i est l'inversion qui à tout t associe $\frac{1}{t}$. On applique alors le théorème sur les composées et les propriétés de la fonction i. Il reste un cas à traiter : celui où $\ell = \infty$, et il peut être démontré directement à partir de la définition. □

Exemple 3.9.
1. On a $\lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x+4)}{\lim_{x\to 2}(2x+3)} = \frac{10}{7}$
2. On a $\lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{x-2} = \infty$, car la fonction qui à x associe $\frac{3x+4}{x-2}$ est un produit ; celui de la fonction f qui à x associe $f(x) = 3x+4$ et de la fonction qui à x associe $\frac{1}{x-2}$. La première tend vers 10 quand x tend vers 2, tandis que la deuxième tend vers ∞. On applique alors le point 2. du théorème 3.4.
3. Si on veut calculer $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$, le théorème sur les quotients peut s'appliquer, mais le théorème 3.4 ne s'applique pas[f], car on a $\lim_{x\to 4}(x^2-16) = 0$ et $\lim_{x\to 4}(x-4) = 0$.
4. On constate le même phénomène si on veut calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-4}{x^2+3}$. Le théorème sur les quotients s'applique, mais pas le théorème 3.4.

Ces deux derniers exemples montrent qu'il est parfois nécessaire de transformer l'expression d'une fonction pour pouvoir calculer la limite. Dans le premier cas, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-16}{x-4}$$

est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Pour tout $x \neq 4$, on a également, par factorisation et simplification

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4.$$

La tentation est grande de faire la simplification et d'écrire

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8.$$

Dans cet exemple, la fonction g définie par $g(x) = x+4$ est un prolongement de la fonction f : chaque fois que f est définie en x, g est définie en x, et dans ce cas $g(x) = f(x)$. Le théorème suivant indique que le raisonnement que nous avons tenu est correct.

Théorème 3.10 (Prolongement)**.** *Soit f une fonction et soit $a \in \mathbb{R}$, adhérent à* dom_f*. Si g est un prolongement de f et si* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existe et vaut ℓ, alors* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$*.*

Ce théorème est assez utile quand on est face à des quotients où le théorème 3.4 ne s'applique pas. Voici encore un exemple.

Exemple 3.11. Sachant que pour tout $a \geqslant 0$, on a $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. On peut calculer $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$. Le théorème ne s'applique pas car le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 3. Mais on a[g] pour tout x positif et différent de 3 :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(x-3)} \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}.$$

f. C'est ce que vous avez appelé forme indéterminée, justement parce que le théorème ne s'applique pas.

g. Cela s'appelle la multiplication par le binôme conjugué.

La dernière expression définit donc un prolongement de la première, et on a donc

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

vu le théorème sur les quotients.

De même, on peut calculer la limite pour x tendant vers 0 de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x}{x}$. On considère la fonction

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 1.$$

C'est un prolongement de f et on a de plus $\lim_{x\to 0} g(x)=1$. Donc finalement $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Pour traiter le point 4 de l'exemple 3.9 ci-dessus, il faut voir que c'est le facteur x^2 qui fait en sorte que numérateur et dénominateur tendent simultanément vers $+\infty$, rendant impossible l'application du théorème 3.4. On aurait alors tendance à transformer la fonction comme ceci, pour $x\neq 0$:

$$\frac{3x^2-4}{x^2+3}=\frac{x^2(3-\frac{4}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})}=\frac{(3-\frac{4}{x^2})}{(1+\frac{3}{x^2})}.$$

La dernière fonction n'est pas un prolongement de la première, parce qu'elle n'est pas définie en $x=0$. Mais ces deux fonctions sont égales sur $]0,+\infty[$. Alors leurs limites en $+\infty$ sont égales. C'est l'objet du théorème suivant. On trouve donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-\frac{4}{x^2})}{(1+\frac{3}{x^2})}=3.$$

Proposition 3.12 (Localité)**.** *Soient f et g deux fonctions qui sont égales sur un voisinage de a. Alors on a*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x),$$

si l'un des limites au moins existe (auquel cas l'autre existe aussi).

Remarque 3.13. On appelle voisinage de $+\infty$ tout ensemble contenant $]C,+\infty[$ pour au moins un nombre C in $\mathbb{R}$. On appelle voisinage de $-\infty$ tout ensemble contenant $]-\infty,C[$ pour au moins un nombre C in $\mathbb{R}$ et on appelle voisinage de $a\in\mathbb{R}$ tout ensemble contenant $]a-\delta,a+\delta[$ pour au moins un $\delta>0$.

Exemple 3.14.

1. Calculer la limite pour x tendant vers $+\infty$ de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{|x|+1}{x}$.
   On voit que sur le voisinage $V=]0,+\infty[$ de $+\infty$, la fonction f est égale à
   $$g:]0,+\infty[:x\mapsto 1+\frac{1}{x}.$$
   Vu les résultats précédents on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$, donc on a aussi $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. Calculer la limite pour x tendant vers $-\infty$ de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{|x|+1}{x}$.
   On voit que sur le voisinage $V=]-\infty,0[$ de $-\infty$, la fonction f est égale à
   $$g:]-\infty,0[:x\mapsto -1+\frac{1}{x}.$$
   Vu les résultats précédents on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-1$, donc on a aussi $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Enfin, ce dernier résultat lie l'existence des limites restreintes en un point $a\in\mathbb{R}$ et leur égalité à l'existence de la limite en a.

Proposition 3.15 (Limites restreintes)**.** *Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, on a*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a} f(x).$$

Réciproquement,

1. *si* $a \notin \mathrm{dom}_f$ *et si* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, *on a*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$
2. *Si* $a \in \mathrm{dom}_f$ *et si*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a),$$
alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Cela permet de traiter plus facilement l'exemple de la fonction f_4 donné à la page 10. La limite à gauche en 2 vaut visiblement -1 et la limite à droite en 2 vaut 1. Ces limites ne sont pas égales, donc f_4 n'admet pas de limite en 2.

4 La continuité

Intuitivement, on dit qu'une fonction est continue si on peut tracer son graphe "sans lever le crayon". Vu ce que nous avons constaté dans les sections précédentes, nous pouvons être plus précis : une discontinuité (un saut) au point a se traduit par le fait que la limite de $f(x)$ pour x tendant vers a n'existe pas.

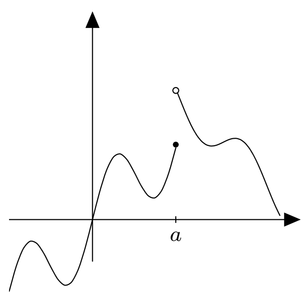


FIGURE 1 : Une discontinuité en a

On arrive alors à la définition.

Définition 4.1 (Continuité)**.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Cette limite vaut alors $f(a)$.

Les fonctions continues en un point a sont donc des fonctions pour lesquelles il est facile de calculer la limite en a.

Définition 4.2. L'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ en lesquels f est continue est le *domaine de continuité de* f. Nous le noterons dom^c_f. Si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A (i.e. $A \subset \mathrm{dom}^c_f$). On note alors $f \in C_0(A)$.

Il est important d'avoir un catalogue de fonctions continues à sa disposition. Je vous le donne, sans démonstration.

Théorème 4.3. *Les fonctions polynomiales, les fractions rationnelles, les fonctions trigonométriques directes et réciproques, les racines p-èmes, la fonction exponentielle et le logarithme népérien (que nous reverrons bientôt) sont toutes continues sur leur domaine de définition.*

Les premiers résultats qui suivent sont une transposition des résultats correspondants sur les limites. Par exemple, en vertu du théorème sur les limites restreintes, si f est continue en a, alors on a
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
Comme dans le cas des limites, on a les notions de continuité à gauche et à droite.

Définition 4.4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Par exemple, la fonction dont la représentation graphique est donnée par la Figure 1 est continue à gauche en a mais n'est pas continue à droite en a.

Le théorème 3.15 et la proposition 3.12 donnent le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Si f est continue à gauche et à droite en a, alors f est continue en a. De plus la continuité en a est une notion locale : si deux fonctions ont les mêmes valeurs au voisinage de a, l'une est continue en a si et seulement si l'autre l'est.*

On a aussi le résultat sur les combinaisons de fonctions continues.

Proposition 4.6. *Soient f et g des fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et $c \cdot f$ sont continues en a.*

Enfin, on peut étudier la continuité des fonctions composées.

Proposition 4.7. *Si g est continue en a et si f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a. En particulier, on a*

$$\mathrm{dom}_g^c \cap \{x : g(x) \in \mathrm{dom}_f^c\} \subset \mathrm{dom}_{f\circ g}^c.$$

Pour étudier le domaine de continuité de fonctions composées, on procède donc en général comme pour étudier le domaine de définition de telles fonctions.

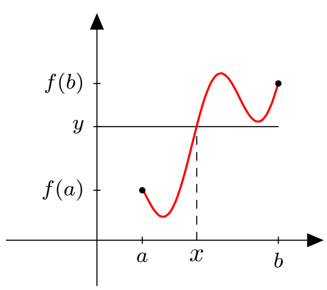
Remarque 4.8. Contrairement au cas du domaine de définition, l'inclusion ci-dessus est stricte. Par exemple, on peut considérer la fonction g de la figure 1 ci-dessus et pour f une fonction constante. La composée est alors constante et donc continue sur $\mathbb{R}$.

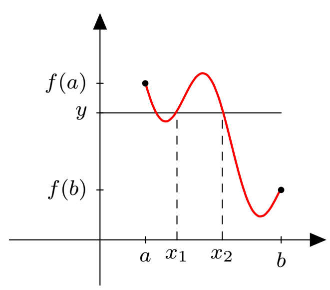
5 Pour aller plus loin

Voici maintenant deux résultats qui ont une importance dans la résolution d'équations à une variable et dans les problèmes d'optimisation. Ils mettent en jeu des fonctions continues.

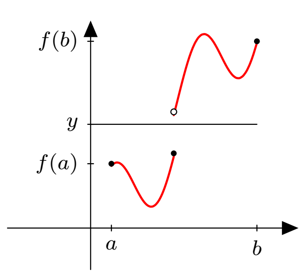
Théorème 5.1 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

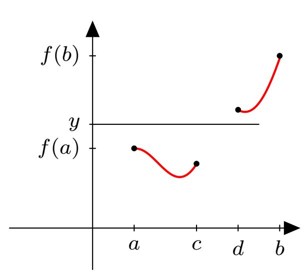
Voici ce que cela donne pour les représentations graphiques.





Remarque 5.2. Il est nécessaire, pour que ce résultat puisse être appliqué, d'une part que la fonction f soit continue, et d'autre part, que le domaine sur lequel on la considère soit un intervalle. Voici deux contre exemples dans le cas où ces hypothèses ne seraient pas satisfaites.





Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'obtenir comme corollaire le théorème suivant, attribué à Bolzano.[h]

Théorème 5.3. *Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)\cdot f(b)\leqslant 0$, il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=0$.*

Ce théorème permet de trouver des solutions à des équations polynomiales, par dichotomie, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.4. Démontrer que l'équation $3x^3-2x^2+x-1=0$ admet une solution dans $[0,1]$, déterminer cette solution avec une erreur maximale de 0.125.

La méthode que nous allons employer s'appelle la bissection ou la dichotomie. Définissons la fonction

$$P:[0,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto P(x)=3x^3-2x^2+x-1.$$

Elle est définie est continue sur $[0,1]$ et on a de plus $P(0)=-1$ et $P(1)=1$. On sait donc d'après le théorème 5.3 qu'il existe $x_0\in]0,1[$ tel que $P(x_0)=0$. Mais la précision n'est pas encore celle voulue.

On calcule alors $P(\frac{1}{2})=-\frac{5}{8}$ et on applique le théorème 5.3 dans l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$: il existe $x_0\in]\frac{1}{2},1[$ tel que $P(x_0)=0$. Le zéro est donc égal à $\frac{3}{4}$, avec une erreur maximale de $\frac{1}{4}$, ce qui n'est pas encore suffisant.

Nous divisons encore l'erreur par deux en effectuant une étape supplémentaire en calculant $P(\frac{3}{4})<0$. Il existe donc $x_0\in]\frac{3}{4},1[$ tel que $P(x_0)=0$. On peut donc affirmer que l'équation admet la solution $\frac{7}{8}$, à $\frac{1}{8}$ près.

On peut évidemment rechercher une solution plus précise en effectuant plus de divisions.

Cette méthode est une première méthode numérique de recherche des solutions. Elle n'est en effet pas basée sur une formule exacte, mais donne un algorithme qui, par calculs (numériques) successifs, permet d'approcher *une* solution.

Terminons avec un théorème qui implique l'existence d'extrema de fonctions continues définies sur un intervalle fermé.

Théorème 5.5 (Bornes atteintes)**.** *Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$. Il existe m et M dans $[a,b]$ tels que*

$$f(m)\leqslant f(x)\leqslant f(M),\quad \forall x\in[a,b].$$

La figure 5 donne une représentation graphique de ce théorème.

Ici encore, les hypothèses que la fonction soit continue et qu'elle soit définie sur un intervalle de type $[a,b]$ sont cruciales. Par exemple, la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ n'admet pas d'extremum global (ni local d'ailleurs).

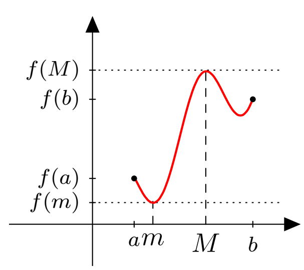


FIGURE 1 – Les bornes atteintes.

h. Bernard Bolzano, Mathématicien et philosophe (1781-1848), né à Prague.