

Nombres et algèbre

Pierre Mathonet

Présentation (encore) provisoire

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, le 19 Février 2015

Nombres naturels, multiplication

La multiplication est une addition déguisée : $3 \times 5 = 3.5$ veut dire $5 + 5 + 5$.

Proposition

La multiplication des nombres naturels a les propriétés suivantes. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a

- ① $(a.b).c = a.(b.c)$ (La multiplication est associative);
- ② $a.1 = 1.a = a$ (La multiplication admet le neutre 1);
- ③ $a.b = b.a$ (La multiplication est commutative).

Proposition (distributivité... et mise en évidence)

La multiplication distribue l'addition : on a

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c) \quad \text{et} \quad (b + c).a = (b.a) + (c.a)$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Calculer mentalement 8×23 ou 16×42 .

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres naturels, addition

Les nombres *naturels* forment l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Une définition brassicole : Le nombre 7 est un plateau de 7 verres de bière, sans le plateau et sans les verres.

Proposition

L'addition des nombres naturels a les propriétés suivantes. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a

- ① $(a + b) + c = a + (b + c)$ (L'addition est associative);
- ② $a + 0 = 0 + a = a$ (L'addition admet le neutre 0);
- ③ $a + b = b + a$ (L'addition est commutative).

Utilisations :

- ① Donner un sens à $17 + 23 + 52$;
- ② Calculs : $273 + 349 = (200 + 70 + 3) + (300 + 40 + 9)$
 $= (200 + 300) + (70 + 40) + (3 + 9) = 500 + 110 + 12 = 622$.

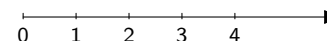
Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La table de multiplication

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A connaître par coeur, de même que la table d'addition.

Représentation sur un axe :



Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Soustraction et division

Définition

Soient a, b deux nombres naturels. Le nombre $c = a - b$ est l'unique nombre naturel qu'il faut ajouter à b pour obtenir a , (donc satisfaisant $b + c = a$). Il n'existe (dans $\mathbb{N}$) que si a est plus grand que b .

Ainsi $18 - 6 = 12$ parce que $12 + 6 = 18$.

Définition

Soit a un nombre naturel et b un nombre naturel *non nul*. Il existe au plus un nombre naturel c tel que $c \cdot b = a$. Si un tel nombre existe, on l'appelle quotient de a par b et on le note $a : b$. On dit alors que a est multiple de b et que b est un diviseur de a .

D'après cette définition, on a donc $18 : 6 = 3$ parce que $3 \times 6 = 18$.

Nombres entiers : construction intuitive

- 1 L'idée : on garde les mêmes opérations.
- 2 On ajoute juste des nombres pour que chaque nombre ait un opposé (l'opposé d'un gain est une perte et l'opposé d'une perte est un gain).
- 3 Evidemment, il faut montrer que l'on garde les mêmes propriétés. Je ne le ferai pas ici.

Méthode de travail :

- 1 Si on doit évaluer une expression numérique, on se réfère au modèle concret (gains/pertes) qui est simple et cohérent avec la définition;
- 2 Si on doit gérer des expressions littérales, on doit utiliser la définition et les propriétés qui en découlent;
- 3 Seul le produit de nombres "négatifs" n'est pas pris en compte par le modèle concret, mais seulement par la définition;
- 4 La soustraction et la division sont définies comme avant.

La définition

Proposition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{Z}$, muni d'une opération d'addition $+$ et de multiplication (notée $\cdot$ ou $\times$) satisfaisant les conditions suivantes.

- 1 On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
- 2 L'addition et la multiplication des entiers naturels sont les opérations que l'on connaît déjà.

De plus,

- 3 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (l'addition est associative);
- 4 Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = 0 + a = a$ (l'addition admet un neutre 0);
- 5 Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$ (l'addition est commutative);
- 6 Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé l'opposé de a , tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
- 7 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (la multiplication est associative);
- 8 Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (la multiplication admet un neutre 1);
- 9 Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \cdot b = b \cdot a$ (la multiplication est commutative).
- 10 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ et $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (la multiplication distribue l'addition).

Quelques conséquences

Proposition

On a les propriétés suivantes :

- 1 L'entier 0 est le seul neutre pour l'addition;
- 2 Tout nombre $a \in \mathbb{Z}$ admet un seul opposé;
- 3 L'égalité $-(-a) = a$ est vraie pour tout $a \in \mathbb{Z}$;
- 4 0 est absorbant : on a $0 \cdot a = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$;
- 5 L'égalité $-a = (-1) \cdot a$ est vraie pour tout $a \in \mathbb{Z}$;
- 6 Si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tels que $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Notations : $7 = +7$, $18 = +18$ etc...

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, -4, \dots\}; \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}; \quad \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Terminologie : les éléments de $\mathbb{N}_0$ sont les *entiers strictement positifs*, ceux de $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ sont les *entiers strictement négatifs*. Seul 0 est positif et négatif.

Quelques exemples (évidents) et la formalisation

On a

$$15 + 17 = 32, \text{ et } -15 + (-17) = -32.$$

De même

$$17 + (-15) = -15 + 17 = 2 \quad \text{et} \quad -17 + 15 = 15 + (-17) = -2$$

Définition

Pour $a \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue de a , notée $|a|$, est le nombre positif (entier naturel) parmi a et $-a$. Ex. : exemple $|7| = 7$ et $|-3| = 3$.

Proposition (A ne (presque) jamais utiliser)

Soient a, b deux nombres entiers.

- 1 Si a et b sont de même signe, alors $a + b$ a ce signe et sa valeur absolue est la somme des valeurs absolues de a et b .
- 2 Si a et b sont de signes contraires : s'ils ont la même valeur absolue, alors $a + b = 0$; sinon, si $|a| > |b|$, alors $a + b$ a le même signe que a et sa valeur absolue est la différence de la valeur absolue de a et de celle de b . Le dernier cas se traite de manière symétrique.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Multiplication

On a $3 \times 5 = 15$ et $3 \times (-5) = -15$ car

$$3 \times (-5) = 3 \times ((-1) \times 5) = (-1) \times (3 \times 5) = -15.$$

On a $(-3) \cdot (-5) = 15$ car :

$$(-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 5 = (-3) \cdot (-5 + 5) = (-3) \cdot 0 = 0.$$

Proposition

Soient a, b deux nombres entiers.

- 1 On a $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- 2 Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \cdot b = 0$;
- 3 Le signe de $a \cdot b$ est positif si a et b ont le même signe et négatif s'ils sont de signes contraires.

En résumé :

"Moins par moins donne plus."

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Soustraction

Définition

Soient a, b deux éléments de $\mathbb{Z}$. Le nombre $c = a - b$ est l'unique nombre entier satisfaisant $b + c = a$. Il existe toujours puisqu'on a

$$a - b = a + (-b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

C'est donc la même définition, mais l'opération est toujours définie. pour tous les nombres entiers:

$$18 - 7 = 18 + (-7) = 11, \quad 18 - (-34) = 18 + 34 = 52, \quad -18 - (-34) = -18 + 34 = 16,$$

et

$$-18 - 34 = -18 + (-34) = -52, \quad 18 - 34 = 18 + (-34) = -16.$$

Remarque : dans $-18 - 34$, les deux signes $-$ n'ont pas la même signification.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Division

On généralise la définition.

Définition

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}_0$. Il existe au plus un nombre entier c tel que $c \cdot b = a$. Si un tel nombre existe, on l'appelle quotient de a par b et on le note $a : b$. L'opération " : " est appelée division.

On obtient alors

$$18 : 3 = 6, \quad (-18) : 3 = -6, \quad 18 : (-3) = -6, \quad (-18) : (-3) = 6.$$

car

$$18 = 3 \times 6, \quad -18 = 3 \times (-6), \quad 18 = (-3) \times (-6), \quad -18 = (-3) \times 6.$$

Effectuer les opérations suivantes :

- 1 a) $-18 + 27$ b) $-95 - (-46)$ c) $-12 + 17 - (-9) - 42$
- 2 a) $-56 : (-7)$ b) $-(-3) \cdot (-6)$ c) $102 : (-3)$ d) $-192 : (-4)$
- 3 a) $152 : (-4)$ b) $-(-105) : (-3)$ c) $-(-99) - 3$

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques règles de calcul

On doit retenir les règles suivantes, qui sont très utiles pour travailler avec des **expressions littérales**.

Proposition

- ① Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on a : $-(a + b) = (-a) + (-b)$;
- ② Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on a : $-(a - b) = ((-a) + b) = b - a$;
- ③ Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on a : $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$;
- ④ Pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}_0$, on a : $(-a) : b = a : (-b) = -(a : b)$, pour autant que l'un de ces quotients existe (auquel cas ils existent tous), et en particulier, $(-a) : (-b) = a : b$.

Donc "**moins par moins donne plus**" pour les divisions aussi.

13

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Ordre et représentation

On définit une relation $<$ dans $\mathbb{Z}$ par

$$a < b \text{ si, et seulement si } b - a \text{ est dans } \mathbb{N}_0.$$

On peut lire dans l'autre sens (on introduit $>$):

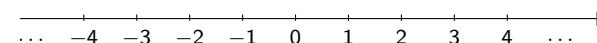
$$a > b \text{ si, et seulement si } a - b \text{ est dans } \mathbb{N}_0.$$

En admettant l'égalité, on obtient $\leq$ et $\geq$. Par exemple

$$a \leq b \equiv ((a < b) \text{ ou } a = b).$$

On a donc $-16 < -10$ parce que $-10 - (-16) = -10 + 16 = 6$.

On écrit alors naturellement $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ pour tenir compte de l'ordre, et on représente :

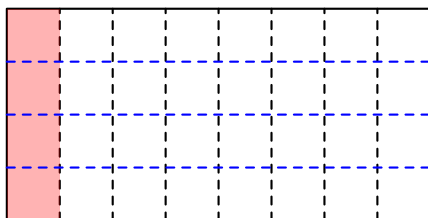


14

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fractions et équivalentes

Les fractions représentent des "parts" d'un tout :



Ceci est la fraction $\frac{1}{8}$, ou la fraction $\frac{2}{16}$: ces fractions sont **équivalentes**.

On peut continuer de la sorte : $\frac{1}{8}$ est équivalente à $\frac{4}{32}$ ou à $\frac{3}{24}$, etc... L'équivalence se lit dans les deux sens (elle est **symétrique**).

15

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Résumé des opérations sur les fractions/rationnels

① Multiplication :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

② Division :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

③ Addition :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

④ Soustraction :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Tout nombre entier est une fraction : $3 = \frac{3}{1}$.

Attention aux parenthèses (implicites) : l'expression $x = a/b/c$ n'est pas définie car on ne sait pas si cela veut dire

$$x = \frac{a}{\frac{b}{c}}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{\frac{b}{c}}.$$

Attention à la taille et à la position des barres de fractions.

16

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres rationnels : définition intuitive

Voici la définition que vous connaissez peut-être.

Définition

L'ensemble des rationnels est l'ensemble des fractions, mais dans lequel on décide de ne pas distinguer des fractions équivalentes. Les opérations $+$, $\times$, $-$ et $:$ dans l'ensemble des rationnels sont induites par celles des fractions.

Autrement dit, les fractions $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{16}$ sont équivalentes et **définissent donc le même nombre rationnel**.

Je préfère la définition qui suit, qui ressemble à celle des nombres entiers.

17

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Conséquences

Les conséquences tirées pour l'ensemble $\mathbb{Z}$ restent valides. On note naturellement $\frac{a}{b}$ le nombre $a \cdot \frac{1}{b}$ et on a

Proposition

Les propriétés suivantes sont satisfaites.

- ① Le nombre 1 est le seul neutre pour la multiplication;
- ② Tout nombre $a \in \mathbb{Q}_0$ admet un seul inverse;
- ③ Pour tout $a \in \mathbb{Q}_0$, on a l'égalité $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$.
- ④ Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}_0$, on a l'égalité $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$.
- ⑤ Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}_0$, on a l'égalité $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$.
- ⑥ Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $b, q \in \mathbb{Q}_0$, on a l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot q}{b \cdot q} = \frac{q \cdot a}{q \cdot b}$.

Conséquence $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Attention aux parenthèses implicites !

19

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres rationnels : Définition

Proposition

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{Q}$, muni d'une opération d'addition $+$ et de multiplication $\cdot$ satisfaisant les conditions suivantes.

- ① On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;
- ② L'addition et la multiplication des entiers sont celles de $\mathbb{Z}$.

De plus,

- ③ $(a + b) + c = a + (b + c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (l'addition est associative);
- ④ $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$ (l'addition admet un neutre 0);
- ⑤ $a + b = b + a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$ (l'addition est commutative);
- ⑥ Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé l'opposé de a , tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
- ⑦ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (la multiplication est associative);
- ⑧ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$ (la multiplication admet un neutre 1);
- ⑨ $a \cdot b = b \cdot a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$ (la multiplication est commutative);
- ⑩ Pour tout nombre $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \mathbb{Q}_0$, il existe un nombre noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} et appelé l'inverse de a , tel que $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$;
- ⑪ Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

18

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres réels

Nous avons vu les nombres rationnels et les ensembles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

- Les rationnels sont des fractions $\frac{a}{b}$ où a, b sont entiers ($b \neq 0$).
- On peut écrire les rationnels sous forme décimale, en effectuant la division (à la main, ou avec la machine à calculer).
- On a des développements limités

$$\frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{1}{8} = 0,125, \quad \frac{1}{5} = 0,2$$

car

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}, \quad \frac{1}{8} = \frac{125}{1000}, \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10}.$$

- On a aussi des développements illimités périodiques

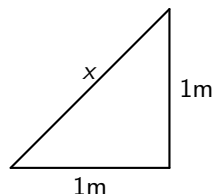
$$\frac{1}{3} = 0,333\dots, \quad \frac{1}{6} = 0,166\dots, \quad \frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$$

20

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres irrationnels

Certains nombres qui apparaissent en géométrie (en particulier, mais pas uniquement) ne sont pas rationnels.



- D'après le théorème de Pythagore, la longueur de l'hypoténuse, notée x , est un nombre positif (de mètres) tel que $x^2 = x \cdot x = 2$.
- On démontre qu'un tel nombre ne peut pas être rationnel.
- De même, le nombre π n'est pas rationnel.
- De tels nombres ont un développement décimal illimité, et non périodique, ils sont **réels** mais **irrationnels**.

21

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Définition

L'ensemble $\mathbb{R}$ est formé de tous les nombres avec un développement décimal quelconque. Il a les propriétés suivantes.

- 1 On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- 2 L'addition et la multiplication des rationnels sont celles de $\mathbb{Q}$.

De plus,

- 3 $(a + b) + c = a + (b + c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (l'addition est associative);
- 4 $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (l'addition admet un neutre 0);
- 5 $a + b = b + a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (l'addition est commutative);
- 6 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé *l'opposé* de a , tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
- 7 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (la multiplication est associative);
- 8 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (la multiplication admet un neutre 1);
- 9 $a \cdot b = b \cdot a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (la multiplication est commutative);
- 10 Pour tout nombre $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$, il existe un nombre noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} et appelé *l'inverse* de a , tel que $a \cdot (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) \cdot a = 1$;
- 11 Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

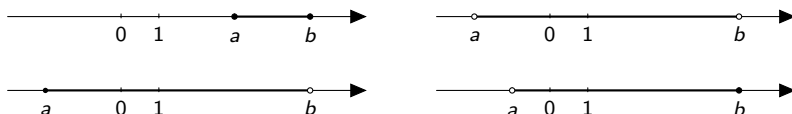
22

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Valeur absolue et intervalles

Les intervalles bornés :

- 1 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé);
- 2 $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert);
- 3 $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervalle semi-ouvert);
- 4 $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervalle semi-ouvert).



Les intervalles non bornés :

- 1 $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ et $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ (ouverts)
- 2 $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ et $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ (fermés)

Définition

Si x est un réel, on appelle module de x , ou valeur absolue de x le nombre $|x| = \max\{-x, x\}$. (C'est à dire le nombre positif dans $\{x, -x\}$.)

On a donc $|- \sqrt{2}| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|\pi - 4| = 4 - \pi$ etc...

23

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Puissances naturelles

Définition

Pour tout nombre a et tout naturel $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On pose $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Dans l'expression a^n , a est la **base** et n est **l'exposant**.

Rem. : Pour $a = 0$ et $n \neq 0$, on a $a^n = 0$.

Proposition

Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a

- 1 $a^m a^n = a^{m+n}$;
- 2 $(a^m)^n = a^{mn}$;
- 3 si $m \geq n$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- 4 $(ab)^m = a^m b^m$.

24

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Notation scientifique I

L'idée : $10^2 = 100$, $10^3 = 1000, \dots$, $10^9 = 1000\,000\,000, \dots$

Définition

Pour tout nombre x tel que $|x| \geq 1$, il existe un nombre a tel que $1 \leq a < 10$ et un naturel n tel que

$$x = a \times 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la **mantisse**, et n l'**exposant**.

Exemples : $3400 = 3,4 \times 1000 = 3,4 \times 10^3$, $-27000 = -2,7 \times 10^4$ ou $-340 = -3,4 \times 10^2$.

Méthode de conversion : On déplace la virgule. (Tout nombre peut être écrit avec une virgule).

Utilité : "Voir" les ordres de grandeur, multiplier des grands nombres.

25

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Propriétés et notation scientifique

Proposition

Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a

- ① $a^m a^n = a^{m+n}$;
- ② $(a^m)^n = a^{mn}$;
- ③ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- ④ $(ab)^m = a^m b^m$.

Définition

Pour tout nombre x non nul, il existe un nombre a tel que $1 \leq a < 10$ et un entier n tel que

$$x = a \times 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la **mantisse**, et n l'**exposant**.

27

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Puissances entières

L'idée: compléter la suite des puissances de 10 :

$1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $1000\,000 = 10^6 \dots$
en incluant les fractions

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \frac{1}{100} = 10^{-2}, \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \frac{1}{1000\,000} = 10^{-6}, \dots$$

que l'on peut lire

$$0,1 = 10^{-1}, 0,01 = 10^{-2}, 0,001 = 10^{-3}, 0,0001 = 10^{-4}, 0,000001 = 10^{-6},$$

Cela permet d'écrire par exemple $0,00043 = 4,3 \times 10^{-4}$.

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Rem. : Cette notation avec des exposants négatifs est utilisée en sciences pour les unités. $m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2}$.

Proposition

L'identité $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ est vraie pour tous $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

26

Priorité des opérations

Dans les expressions algébriques faisant intervenir les opérations, il faut une **convention** pour l'ordre dans lequel on les effectue. En résumé :

P E (M D) (A S)

Règle

Dans une expression ne contenant **que des additions et des soustractions**, on effectue les calculs **de gauche à droite**. On peut toutefois modifier l'ordre des termes, à condition de les déplacer avec le signe qui les précède.

Exemples : $12 - 4 + 3 = 8 + 3 = 11$, $12 + 3 - 4 = 11$,
 $18 + 27 - 32 + 24 = 45 - 32 + 24 = 13 + 24 = 37$

Règle

Dans une expression ne contenant **que des multiplications et des divisions**, on effectue les calculs **de gauche à droite**. On peut toutefois modifier l'ordre des termes, à condition de les déplacer avec le signe qui les précède.

Exemples : $12 : 4 \times 3 = 3 \times 3 = 9$, $12 \times 3 : 4 = 36 : 4 = 9$.

28

Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Règle

Dans une expression ne contenant que des multiplications/divisions et des additions/soustractions, on effectue les multiplications/divisions d'abord.

Exemples : $4 \cdot 7 + 6 = 28 + 6 = 34$, ou $52 : 4 + 5 = 13 + 5 = 18$

Règle

Dans une expression contenant des exposants, ceux-ci sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions, soustractions.

Exemple : $26 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 = 26 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 1000 = 4326$.

Règle

Dans une expression contenant des parenthèses, on effectue **d'abord les expressions dans les parenthèses**. Cette règle s'applique à plusieurs reprises s'il y a plusieurs parenthèses emboîtées.

Exemple : $(3 + 6) \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$.

Attention aux parenthèses implicites !

Certains symboles contiennent des parenthèses non écrites :

$$\frac{18}{4 + 2} = \frac{18}{(4 + 2)} = \frac{18}{6} = 3.$$

Mais

$$\begin{array}{ll} \frac{16}{4 + 2} \neq \frac{4}{1 + 2} & \frac{16}{4 + 2} \neq \frac{4}{1} + 2 \\ \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \neq \frac{x + 1}{1 + 1} & \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1. \end{array}$$

La même remarque vaut pour les racines (voir plus bas) : on a par exemple

$$\sqrt{9 + 3} = \sqrt{(9 + 3)} = \sqrt{12}.$$