Cours préparatoire de Mathématique
Sciences de la santé
Algèbre

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, les 12-13 Août 2019

Présentation et contenu du cours

- Contenu du cours préparatoire (à peu près la matière de l'examen) :
  - **Algèbre :** Nombres et opérations, équations à une inconnue et systèmes d'équations...
  - **Trigonométrie :** Définitions des nombres trigonométriques, propriétés, équations trigonométriques élémentaires, problèmes...
  - **Géométrie :** Géométrie analytique plane élémentaire, notions sur les droites et les angles, produit scalaire...
  - **Analyse :** Fonctions de référence, limites, dérivées et intégrales...
  - **Il manque la statistique**, voir cours en ligne
- Buts du cours :
  - Réactiver les notions mathématiques principales
  - Attirer l'attention sur les points délicats
  - Donner quelques méthodes pour améliorer la performance en mathématique
  - Analyser quelques questions de QCM
  - Répondre à vos questions, n'hésitez pas à en poser.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Informations importantes

- Notes de cours, qui contiennent la théorie et un certain nombre d'exercices (et les solutions).
- Le contenu des dia projetées est *inclus* dans ces notes.
- Accès à la plateforme de cours préparatoires en ligne.
  Utilité : un texte plus complet, des exercices résolus et des exercices à faire, des tests.
  Un contenu un peu interactif avec des corrections directes des tests.
- Attention à l'**horaire des cours 9h-12h**. On fera une pause (voire deux).
- Attention à l'auditoire : **Roskam sauf vendredi ! (204)**
- Accès à mon site web : `www.geodiff.ulg.ac.be`
- Accès au Sart-Tilman en voiture :
  - Chercher les numéros de parking
  - Attention aux routes sinueuses

Conseils généraux I

Conditions raisonnables pour étudier

1. Fixez-vous des objectifs, en termes de matière et de temps d'étude
2. Faites des pauses régulières (pas trop longues) et aérez-vous. Le temps de travail maximal varie selon ce que vous faites.
3. Mais 45 minutes/ une heure de travail avec grande concentration sont déjà bien, et mieux que trois heures à moitié endormi.

Comment étudier :

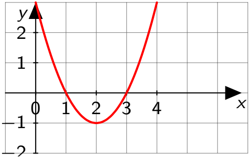
1. S'y prendre le plus tôt possible à l'avance
2. Passer de préférence plusieurs fois sur la matière
3. Connaître la matière, mais aussi savoir ce que l'on sait. Par exemple, que savez-vous sur le second degré ? Que savez-vous sur les dérivées ?
4. Relire les exercices, en synthétisant les méthodes utilisées
5. Refaire des exercices (sans regarder la solution)

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Le jour de l'examen

1. Il y a des questions qui vous conviennent mieux que d'autres. Identifiez-les rapidement.
2. Par contre, ne lisez pas trop vite les questions. Tous les mots et symboles peuvent être importants. Par exemple :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est représentée (sur l'intervalle $]0,4[$) par le graphique suivant.



Déterminer l'unique proposition correcte parmi celles qui suivent pour la fonction f :

1) elle est décroissante sur $]0,2[$
2) elle est croissante sur $]0,2[$
3) elle admet un maximum local au point d'abscisse $x = 1$
4) elle admet un minimum local au point d'abscisse $x = 2$

Ce n'est pas le graphique de f qui est donné !

Conseils généraux III

3. Identifiez bien ce que l'on vous demande.
4. Les questions ont généralement une étape de plus qu'à l'école secondaire.
5. Vous pouvez souvent éliminer des réponses fausses.
6. Vérifiez vos réponses, quand c'est possible, à partir de l'énoncé :

> Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a en totalité 27 animaux, et 72 pattes d'animaux. En vente directe, un lapin vaut 15 euros et un poulet 10 euros. Quelle est la valeur totale des animaux de la ferme ?
>
> 1. 270 euros
> 2. 315 euros
> 3. 360 euros
> 4. 405 euros

   On ne vous demande pas le nombre de lapins. Mais cela pourrait être une des réponses proposées.

Solution :

1. Soit p le nombre de poulets et l le nombre de lapins.
2. On a les conditions $p + l = 27$ et $2p + 4l = 72$. C'est un système. On le résout. On trouve $p = 18$ et $l = 9$. On vérifie à ce stade.
3. On cherche $10p + 15l$. On vérifie son calcul (écrit éventuellement), et que c'est bien ce qui est demandé. On trouve 315.
4. On pourrait avoir mis 18 dans les propositions.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Nombres

Les ensembles de nombres classiques :

- Les nombres *naturels* : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- Les nombres *entiers* : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$, et $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- Les nombres *rationnels* : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0\}$, modulo l'équivalence des fractions, et $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

Quelques remarques :

- Tous ces nombres admettent un développement décimal fini ou infini périodique.
- On commence à compter avec les nombres naturels, on définit les opérations, et on les prolonge.
- Dans $\mathbb{Z}$, tout nombre a admet un opposé, noté $-a$, tel que $a + (-a) = 0$. On pense en termes de gains et pertes.
- Dans $\mathbb{Q}$, tout nombre non nul a admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$, tel que $a.\frac{1}{a} = 1$. On pense en termes de fractions.

Si on ajoute les nombres avec des développements décimaux quelconques, on a les nombres réels ($\mathbb{R}$). On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Propriétés des nombres réels

Proposition 1.1.1 p.3

Les opérations dans les nombres réels satisfont les propriétés suivantes :

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (l'addition est *associative*) ;
2. $a+0 = 0+a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (l'addition admet un *neutre* 0) ;
3. $a+b = b+a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (l'addition est *commutative*) ;
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un nombre noté $-a$ et appelé *l'opposé* de a, tel que $a+(-a) = (-a)+a = 0$;
5. $(a.b).c = a.(b.c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ (la multiplication est *associative*) ;
6. $a.1 = 1.a = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (la multiplication admet un *neutre* 1) ;
7. $a.b = b.a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (la multiplication est *commutative*).
8. Pour tout nombre $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$, il existe un nombre noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} et appelé *l'inverse* de a, tel que $a.(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}).a = 1,$;
9. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a.(b+c) = a.b + a.c$ et $(b+c).a = b.a + c.a$ (la multiplication *distribue* l'addition).

Remarques : Comment étudier une telle liste ? Lire les identités dans les deux sens.

Conséquences

Proposition 1.1.2 p.4

1. Le nombre 0 est absorbant : $0.a = a.0 = 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ satisfont $a.b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ (règle du produit nul) ;
3. Si $a \in \mathbb{R}$, alors $-a = (-1).a$
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$ et si $a \neq 0$, $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$;
5. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a).b = a.(-b) = -(a.b)$ et $(-a).(-b) = a.b$;
6. De même, si $b \neq 0$, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

Remarques :

1. Proposition utile pour résoudre des équations en *factorisant* et en utilisant la règle du produit ;
2. Manipuler des expressions algébriques : “moins par moins donne plus” ;
3. Attention à $(x + y - t + 2z) - 3(2x - 4y + 3t - 4z)$!

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Opérations et priorités

- Opérations sur les fractions (quotients), les dénominateurs sont supposés non nuls, ils peuvent être entiers ou non

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\,d+b\,c}{b\,d} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$$

- Bref : pour les sommes et les différences : mettre au même dénominateur (le produit marche toujours).
- Calculer $\frac{1}{4}:2$.Tout nombre (entier) est une fraction : $3=\frac{3}{1}$.
- Attention aux parenthèses implicites : $\frac{x+2}{x}=\frac{(x+2)}{x}$.
- Simplifaction : *presque jamais*, sauf mise en évidence possible.
- Place et à la taille des barres de fractions $a/b/c$ et $\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{a}{\frac{b}{c}}$
- Priorités :

P E (M D) (A S)

- Exemples $8:4\cdot 2=$, $8-4+2=$, $3.2^2=$

Produits remarquables

Proposition 1.1.4 p.5

Les identités suivantes sont valables pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$;
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$;
4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

- **Remarque :** Les identités se lisent aussi dans les deux sens.
- **Exercice :** Démontrer ces formules à l'aide des propriétés des nombres réels.
- **Utilité :** Résolution d'équations, factorisation
- **Conseil :** Faire toujours les calculs dans le même sens.

Deux Exercices

Soient a, b, c, d des nombres strictement positifs. Parmi les propositions suivantes, supposées définies, laquelle est égale à l'opposé de l'inverse de $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$?

1. $\frac{bd}{bc-ad}$
2. $\frac{bd}{ad-bc}$
3. $\frac{bc-ad}{bd}$
4. $\frac{ad-bc}{bd}$

Si $\frac{9-a^2}{3+a} = 0,01$, que vaut a ?

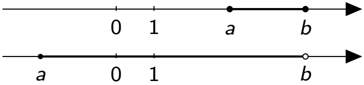
1. $-3,01$
2. $-2,99$
3. $2,99$
4. $3,01$

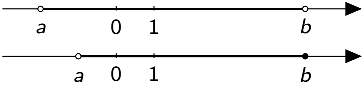
Exercices

- Exercice 1 p. 16 : a,b,f,h
- Exercice 2 p. 16 : e,f
- Exercices 22, 23 p. 18.

Les intervalles bornés :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$.





Les intervalles non bornés :

1. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
2. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
3. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
4. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$

Définition 1.1.1 p.5

Si x est un réel, on appelle module de x, ou valeur absolue de x le nombre $|x| = \max\{-x, x\}$.

Donc $|-\sqrt{2}| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|\pi - 4| = |4 - \pi| = 4 - \pi$.
De manière générale $|b - a| = |a - b|$ est la **distance** de a à b.

Puissances

Définition 1.2.1 p.6

Pour tout nombre a et tout naturel $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}, \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

On pose $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Dans l'expression a^n, a est la *base* et n est *l'exposant*.

Remarque : Pour $a = 0$ et $n \neq 0$, on a $a^n = 0$.

Proposition 1.2.1 p.6

Pour tout nombres $a, b \in \mathbb{R}_0$ et tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a

1. $a^m a^n = a^{m+n}$;
2. $(a^m)^n = a^{mn}$;
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
4. $(ab)^m = a^m b^m$.

Si on a un doute, prendre un exemple, ou utiliser la définition.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Notation scientifique

L'idée :

$$10^2 = 100, 10^3 = 1000, ..., 10^9 = 1000\,000\,000, ...$$
$$\frac{1}{10} = 10^{-1}, \frac{1}{100} = 10^{-2}, \frac{1}{1000} = 10^{-3}, \frac{1}{1000\,000} = 10^{-6}, \ldots$$

ou encore

$0,1 = 10^{-1}, 0,01 = 10^{-2}, 0,001 = 10^{-3}, \quad 0,0001 = 10^{-4}, 0,000001 = 10^{-6},$

Définition 1.2.2 p.6

Pour tout nombre x non nul, il existe un nombre a tel que $1 \leqslant a < 10$ et un entier n tel que

$$x = a \cdot 10^n, \quad \text{ou} \quad x = -a \cdot 10^n.$$

Cette expression de x est appelée notation scientifique, a est la *mantisse*, et n l'*exposant*.

Exemples : $3400 = 3,4 \cdot 1000 = 3,4 \cdot 10^3$, $-27000 = -2,7 \cdot 10^4$ ou $-340 = -3,4 \cdot 10^2$

Méthode de conversion : On déplace la virgule (tout nombre peut être écrit avec une virgule)

Utilisation pour les unités : $ms^{-2} = m/s^2$. Cela permet une conversion simple.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines carrées et cubiques

Définition 1.2.3 p.7

La racine carrée (positive) du nombre réel a est l'unique nombre *positif* x satisfaisant $x^2 = a$. Elle est notée $\sqrt{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

Attention : $\sqrt{9} = 3$ et pas ± 3.

Proposition 1.2.2 p.7

Pour tous $a, b \geqslant 0$, on a

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
2. si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Définition 1.2.4 p.7

La racine cubique du nombre réel a est l'unique nombre réel x satisfaisant $x^3 = a$. Elle est notée $\sqrt[3]{a}$. Elle existe toujours.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Racines p-èmes

Définition 1.2.5, Racines p-èmes, p pair

Si p est pair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre *positif* x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle n'existe que si $a \geqslant 0$.

Définition 1.2.6, Racines p-èmes, p impair

Si p est impair, la racine p-ème du nombre réel a est l'unique nombre x satisfaisant $x^p = a$. Elle est notée $\sqrt[p]{a}$. Elle existe toujours.

Proposition 1.2.3 p.7

1. Si p est naturel pair,
   - On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \geqslant 0$;
   - On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \geqslant 0$, $b > 0$;
2. Si p est naturel impair,
   - On a $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$;
   - On a $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$ pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$;

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Proposition 1.2.4 p.7

1. Si p ou q est pair, on a

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \text{pour tout } a \geqslant 0.$$

2. Si p et q sont impairs, on a

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

Exposants fractionnaires

On généralise $(a^m)^n = a^{mn}$ aux fractions. On définit donc $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$.

Définition 1.2.7 p.7

Pour tout $a \geqslant 0$, et tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

et pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}.$$

Définition 1.2.8 p.7

Pour tout $a > 0$, et tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{(\sqrt[q]{a})^p}.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices

- Ex 3 p.16, c,f,h
- Ex 4 p.17 e,f,g
- Ex 5 p.17, b,c,f
- Ex 6 p.17 a,e,f
- Ex 7 c,f,h
- Ex 8 b,d
- Ex 25 p.18

Equations : théorie générale (p.8)

- Une ***égalité*** est une assertion, une expression de la forme

$$M_1 = M_2.$$

- Elle est soit vraie soit fausse.
- M_1 et M_2 sont les membres de l'égalité, fomés à partir de nombres et opérations.
- $3 \cdot 8 + 5 = 2 \cdot 8 + 13$ est vraie, $3 \cdot 7 + 5 = 2 \cdot 7 + 13$ est fausse.
- Une ***équation*** est une égalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent de nombres inconnus (notés, x, y,...)
- Une ***solution*** est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'égalité : 8 est une solution de $3\xi + 5 = 2\xi + 13$, mais pas 7.
- ***Résoudre*** l'équation consiste à déterminer l'ensemble de ***toutes*** ses solutions.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equivalences

Pour résoudre une équation, on la transforme sans changer son ensemble de solutions. C'est le principe d'équivalence.

Définition 1.3.3 p.8

Deux équations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. Si les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes, on note $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$. Si toutes les solutions de (E_1) sont solutions de (E_2), on notera alors $(E_1) \Rightarrow (E_2)$ et on dira que (E_1) implique (E_2).

Proposition 1.3.1 p.8

En additionnant un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente. En multipliant les deux membres d'une équation par un nombre *non nul*, on obtient une équation équivalente.

Remarques : (a) si on multipliait par 0, on introduirait des solutions supplémentaires. (b) Le nombre que l'on ajoute ou par lequel on multiplie peut dépendre de l'inconnue.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations du premier degré à une inconnue réelle

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, traitons les équations

$$ax + b = 0$$

- Si $a \neq 0$, on a $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, donc $S = \{-\frac{b}{a}\}$.
- Si $a = 0$, l'équation devient $0x = b$, ou $0 = b$.
  1. Si $b = 0$, on a $S = \mathbb{R}$;
  2. Si $b \neq 0$, on a $S = \varnothing$.

Méthode générale :

1. Simplifier au maximum les deux membres de l'équation ;
2. Regrouper les termes contenant l'inconnue dans un seul membre ;
3. Isoler l'inconnue ou appliquer la formule ;
4. *Vérifier la solution dans l'équation de départ*.

Transformation de formules

- En physique, des "grandeurs mesurables" sont souvent liées par une formule toujours vraie. Par exemple

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

- En multipliant par $V \neq 0$, on a

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \rho V = \frac{m}{V} V \Leftrightarrow \boxed{\rho V = m}.$$

- En divisant par $\rho \neq 0$ les deux membres :

$$\rho V = m \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\rho V = \frac{1}{\rho} m \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{m}{\rho}}.$$

Exemple : déterminer R_1 en fonction de R et R_2 à partir de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equations du second degré

Les équations du second degré sont des équations ayant la forme générale (pour $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1.1}$$

On définit le *réalisant* ou *discriminant* de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 1.3.2 p.9

1. Si $\Delta < 0$: l'équation est incompatible ; on note $S = \varnothing$;
2. si $\Delta = 0$: l'équation admet une solution unique : $S = \{\frac{-b}{2a}\}$. On dit que la solution $\frac{-b}{2a}$ est double.
3. si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes : on a

$$S = \{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\}.$$

Factorisation et exemple

Proposition 1.3.3 p.9

Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors le trinôme correspondant se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, la somme des solutions vaut $\frac{-b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$.

Exemple 1.3.1 p.10

Soit à résoudre l'équation du second degré suivante d'inconnue t :

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0.$$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 12 - 12 = 0$. On a donc une racine réelle (double)

$$t_1 = t_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Mise en équations

Un père a quatre fois l'âge de son fils. Il y a trois ans, le produit de leurs âges était 145 ans^2. Quelle est la somme de leurs âges actuellement ?

1. **Choix et dénomination des inconnues** : soit f l'âge actuel du fils et p l'âge actuel du père.
2. **Mise en équations** :
   - Le père a quatre fois l'âge du fils, on a donc
     $$p = 4f \tag{1.2}$$
   - Il y a trois ans, l'âge du fils était $f-3$ et l'âge du père $p-3$:
     $$(f-3)(p-3) = 145.$$
     On utilise (1.2), et f est donc une solution de
     $\boxed{(f-3)(4f-3) = 145.}$
3. **Résolution de l'équation** :
   $$(f-3)(4f-3) = 145 \Leftrightarrow 4f^2 - 15f + 9 = 145 \Leftrightarrow 4f^2 - 15f - 136 = 0.$$
   On a $\Delta = 225 + 16 \cdot 136 = 2401 > 0$, et donc
   $$f_1 = \frac{15 - \sqrt{2401}}{8} = -\frac{34}{8}, \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{15 + \sqrt{2401}}{8} = 8.$$
   On trouve $f = 8$ car $f \geqslant 0$, et donc $p = 32$, d'où $p + f = 40$.
4. **Vérification !**

Exercice résolu I

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet pour solutions $x = 6$ et $x = -2$. Que vaut le nombre $\frac{b}{c}$?

1) -12 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 12

Solution :

1. On a une information sur le produit et la somme : $\frac{c}{a} = -12$ et $-\frac{b}{a} = 4$, donc $\frac{b}{a} = -4$.
2. Alors $\frac{b}{c} = \frac{b}{a}\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$.
3. On peut aussi utiliser la factorisation du trinôme et obtenir $ax^2 + bx + c = a(x-6)(x+2)$, et identifier.

Faire l'exercice 27 p.21 pour voir si on a bien compris.

Exercice 10, a,e,f

10. a Résoudre $16x + 4 = 22x - 8$:
   - On ajoute $-16x$ aux deux membres
   - On ajoute 8 aux deux membres
   - On obtient l'éq. équivalente $12 = 6x$.
   - On divise les deux membres par 6, l'éq. est équivalente à $x = 2$.
   - Vérifier

10. e Résoudre $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{2}$:
   - Condition d'existence $x \neq 1$
   - On multiplie des deux côtés par $x - 1$
   - Eq. équivalente $x + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$, on multiplie par 2
   - Eq. équivalente $2(x + 1) = 3(x - 1)$, attention aux parenthèses. On développe.
   - Eq. équivalente $2x + 2 = 3x - 3$, on ajoute $-2x$, on ajoute 3. On trouve $x = 5$.
   - Vérifier.

10. f Résoudre $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = 2$:
   - On multiplie par 6 et on obtient $3(3x - 1) + 2(x - 2) = 12$
   - On développe et on obtient $11x - 7 = 12$
   - On fait comme plus haut et on a $x = \frac{19}{11}$.
   - On peut vérifier, même si c'est long.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercice 11, a,c,f

11. a Résoudre $3x^2 - 8x + 3 = 0$;
    - On a $\Delta = (-8)^2 - 4.3.3 = 28 > 0$
    - Les solutions sont $\frac{8 \pm \sqrt{28}}{6}$
    - De plus $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

11. c Résoudre $2y^2 = 16y - 18$;
    - On simplifie par 2, et on a une éq. équivalente $y^2 - 8y + 9 = 0$
    - On trouve $\Delta = (-8)^2 - 4.3.3 = 28 > 0$
    - Les solutions sont $4 \pm \sqrt{7}$.

11. f Résoudre $6x^2 + 3x - 12 = 0$.
    - On simplifie par 3, et on a une éq. équivalente $2x^2 + x - 4 = 0$
    - On trouve $\Delta = 1 - 4(2)(-4) = 33 > 0$
    - Les solutions sont $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Il est parfois difficile de vérifier. On peut refaire les calculs.

Exercices 12 et 13 p.20

Dans une salle de la bibliothèque, un tiers des étudiants ont un livre de mathématiques, un quart ont un livre de biologie. Les autres, 10 étudiants, ne font rien. Combien y a-t-il d'élèves dans la salle ?

1. On note n le nombre d'étudiants. C'est un entier positif, multiple de 3 et 4.
2. Etudiants math : $\frac{n}{3}$, étudiants en bio : $\frac{n}{4}$, autres 10
3. Equation : $n = \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + 10$
4. On multiplie par 12 et on développe $12n = 4n + +3n + 120$.
5. On trouve $n = 24$. On vérifie.

En 2013, un père a 43 ans et son fils 24. En quelle année l'âge du père a-t-il été ou sera-t-il le double de l'âge du fils ?

1. Soit n l'année en question.
2. Age du père à l'année n : $n - 1970$. Age du fils à cette année $n - 1989$.
3. Equation : $n - 1970 = 2(n - 1989)$.
4. Solution $n = 2.1989 - 1970 = 2008$. Vérification : Ils avaient 38 et 19 ans.

Exercices 17, 26

Sachant que les nombres réels strictement positifs R_1, R_2 et f sont liées par la relation $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ avec $n > 1$, exprimer R_2 en fonction des autres nombres.

1. On divise les deux membres par $(n-1)$: $\frac{1}{f(n-1)} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
2. On retire $\frac{1}{R_1}$ des deux membres : $\frac{1}{f(n-1)} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$.
3. On met au même dénominateur $\frac{R_1 - f(n-1)}{f(n-1)R_1} = \frac{1}{R_2}$.
4. On inverse les deux fractions : $R_2 = \frac{f(n-1)R_1}{R_1 - f(n-1)}$.

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 5632x + 1133407 = 0$?

1. $\{209, -5423\}$
2. $\{209, -5422\}$
3. $\{209, 5422\}$
4. $\{209, 5423\}$

1. En théorie, on pourrait résoudre, mais pas mentalement, il faut trouver autre chose.
2. La somme des solutions proposées est facile à calculer. Elle doit valoir 5632.
3. On procède par élimination, c'est la réponse 4.

Pourcentages

Quelques informations :

- Les pourcentages sont des fractions : $30\% = \frac{30}{100}$, $15\% = \frac{15}{100}$...
- Ajouter ou retirer un pourcentage d'un prix, d'une quantité... revient à multiplier par une faction adéquate : si un prix initial p augmente de 20%, le prix final F sera

$$F = p + \frac{20}{100}p = \frac{120}{100}p = 1,2p.$$

  Si on a une réduction de 20% d'une quantité initiale Q, la quantité finale F sera

$$F = Q - \frac{20}{100}Q = \frac{80}{100}Q.$$

- Les pourcentages de réductions ne s'additionnent pas, en général.
- Tous ces problèmes sont des équations du premier degré. On peut prendre des valeurs numériques pour vérifier.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 29 et 30

En décembre dernier, le prix du pull que je voulais m'acheter avait mystérieusement augmenté de 20%. Heureusement, à la fin janvier, le commerçant a dû afficher une ristourne de 40% sur ce nouveau prix. Quelle était la ristourne réelle sur le prix initial du pull.

1. 20%
2. 28%
3. 40%
4. une autre réponse

- Soit p le prix initial du pull.
- Après augmentation de 20%, le prix est $p + \frac{20}{100}p = \frac{120}{100}p$
- Après diminution de 40%, le prix est $\frac{60}{100}\frac{120}{100}p = \frac{72}{100}p$
- C'est donc une diminution de 28%.

J'achète un téléphone à 80 euros TVA comprise. Le taux de TVA sur ce produit est de 21 %. Quel est le prix de ce téléphone hors TVA ?

1. $80 - \frac{21}{100}$ euros
2. $80 \times \frac{79}{100}$ euros
3. $80 \times \frac{100}{121}$ euros
4. $80 \times \frac{121}{100}$ euros

- Soit p le prix hors TVA.
- Le prix TVA Comprise est $80 = p + \frac{21}{100}p = \frac{121}{100}p$
- On trouve alors p. Lire la section sur les proportionnalités !

Inéquations : théorie générale (p.10)

- Une ***inégalité*** est une assertion :

$$M_1 \leqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 \geqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 < M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 > M_2.$$

- Elle est soit vraie soit fausse.
- M_1 et M_2 sont les membres de l'inégalité, fomés à partir de nombres et opérations.
- $3 \cdot 8 + 5 \leqslant 2 \cdot 8 + 13$ est vraie, $3 \cdot 7 + 5 \geqslant 2 \cdot 7 + 13$ est fausse.
- Une ***inéquation*** est une inégalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent de nombres inconnus (notés, x, y,...)
- Une ***solution*** est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'inégalité.
- Exemple : 10 est une solution de $3\xi + 5 \geqslant 2\xi + 13$, mais pas 7.
- Résoudre l'inéquation consiste à déterminer l'ensemble de ***toutes*** ses solutions.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Equivalences

Pour résoudre une inéquation, on peut procéder par équivalences. Ce n'est pas toujours suffisant.

Définition 1.4.1 p.10

Deux inéquations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. Si (I_1) et (I_2) sont équivalentes, on note $(I_1) \Leftrightarrow (I_2)$.

Proposition 1.4.1 p.11

En additionnant un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on obtient une équation équivalente.
En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre *strictement positif*, on obtient une inéquation équivalente.
En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre *strictement négatif*, *tout en changeant le sens du signe d'inégalité*, on obtient une inéquation équivalente.

Remarques : Le nombre que l'on ajoute ou par lequel on multiplie peut dépendre de l'inconnue. On doit alors discuter.
Exemple : $-x - 3 \leqslant 7 \Leftrightarrow x + 3 \geqslant -7$.

Réduction du problème et exemple

- Les inégalités larges se ramènent aux inégalités strictes et inversement :
$$M_1 \leqslant M_2 \equiv (M_1 < M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 = M_2).$$
- L'inégalité $M_1 \leqslant M_2$ est equivalente à $M_2 \geqslant M_1$.
- Un exemple : résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$$
- Cette inéquation n'est pas équivalente à $3 \leqslant x$!
- Elle est équivalente à
$$\frac{3-x}{3x} \leqslant 0.$$
- On a donc $S =]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$.
- On peut toujours se ramener à une étude du signe :
$$M_1 \leqslant M_2 \Leftrightarrow M_1 - M_2 \leqslant 0.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Inéquations du premier degré

- Elles sont de la forme

$$ax + b > 0 \text{ ou } ax + b < 0 \text{ ou } ax + b \leqslant 0 \text{ ou } ax + b \geqslant 0.$$

- La première est équivalente à $ax > -b$.
  - **Cas 1,** $a > 0$ **:** On a $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. On a $S =]-\frac{b}{a}, +\infty[$.
  - **Cas 2,** $a < 0$ **:** On a $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. On a $S =]-\infty, -\frac{b}{a}[$.
- Nous avons donc étudié le signe de $ax + b$ en fonction de x :
  Cas 1 : $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

Cas 2 : $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

- L'expression $ax + b$ est de signe constant dans chaque région déterminée par $-\frac{b}{a}$ (**solution de l'équation correspondante** $ax + b = 0$). En résumé : on résout l'équation correspondante et on écrit le tableau

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Résoudre l'inéquation $2x - 7 \geqslant 0$.
   - Par équivalences, cette inéquation est équivalente à $x \geqslant \frac{7}{2}$.
   - On a donc $S = [\frac{7}{2}, +\infty[$.
   - On peut aussi résoudre $2x - 7 = 0$ et utiliser le tableau de signes :

x	$-\infty$	$7/2$	$+\infty$
$2x-7$	$-$	0	$+$

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4} < 0$.
   - On étudie le signe de chaque facteur.
   - On fait attention au dénominateur.
   - On utilise la règle "moins par moins donne plus".
   - Sous forme de tableau (en ordonnant les nombres utiles) :

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-4x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

   - On a donc $S =]-2, \frac{1}{2}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

Inéquations du second degré (p.12)

On a

$$ax^2+bx+c=\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) & \text{si } \Delta>0\\ a(x+\frac{b}{2a})^2 & \text{si } \Delta=0\\ a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) & \text{si } \Delta<0, \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont les racines (distinctes) du trinôme.

Conséquences :

Cas 1 : $\Delta>0$. On va supposer que $x_1<x_2$. On a alors

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a		signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Cas 2 : $\Delta=0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
a	signe de a		signe de a
$(x-x_1)^2$	$+$	0	$+$
$a(x-x_1)^2$	signe de a	0	signe de a

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Cas 3 : $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
a	signe de a
$\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$	$+$
$a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$	signe de a

Une (seule) formule à retenir :

Le trinôme du second degré ax^2+bx+c a le même signe que a dans la région extérieure aux racines du trinôme.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercice résolu

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre réel m qui rendent l'expression

$$-x^2 + 4x + 3m - 2$$

strictement négative, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

1) $[\frac{2}{3}; +\infty[$ 2) $]\frac{2}{3}; +\infty[$ 3) $]-\infty; -\frac{2}{3}]$ 4) $]-\infty; -\frac{2}{3}[$

Solution :

1. On étudie le signe d'une expression du second degré.
2. On calcule $\Delta = 16 - 4(-1)(3m - 2) = 12m + 8$.
3. La condition est $\Delta < 0$. Le signe est alors toujours négatif.
4. On a donc la condition $12m + 8 < 0$, qui donne $m < -\frac{2}{3}$.

Exercice : Résoudre l'exercice 18 d pg 18.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Systèmes linéaires : exemples I (p.12)

Exemple 1 : Dans un restaurant italien, nous avons commandé quatre pizzas identiques et deux cafés. Cela nous a coûté 38 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés. Leur addition était 50,5 euros. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

Exemple 2 : Nous commandons encore quatre pizzas identiques et deux cafés. Mais les 4 convives ont également eu un apéritif identique, pour un total de 50 euros. La table voisine a commandé cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés et cinq apéritifs (identiques) pour 65,5 euros. Quel est le prix d'un café, d'une pizza et d'un apéritif ?

Exemple 3 : Le lendemain, on commande toujours quatre pizzas identiques et deux cafés, pour 44 euros. La table voisine commande cinq pizzas identiques aux nôtres et quatre cafés pour 58 euros. Une troisième table commande deux pizzas et un café pour une somme de 25 euros. On se pose la question habituelle.

Mise en équations

On s'attaque à l'exemple 1 :

1. Choix et dénomination des inconnues :
   Appelons p le prix d'une pizza et c le prix d'un café.
2. Mise en équations : pour notre table on a
   $$4p + 2c = 38$$
   Celle de la table voisine donne
   $$5p + 4c = 50,5.$$
   On les rassemble ces équations "{", comme ceci :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 4p + 2c & = & 38 \\ 5p + 4c & = & 50,5. \end{array}\right.$$
3. Résolution de ce *système* d'équations : on trouvera un seul couple de nombres $(p; c)$ qui rend vraies ces deux égalités simultanément, à savoir $p = 8,5$ et $c = 2$, ce que l'on écrit $(p; c) = (8,5; 2)$.
4. Vérification des solutions.

Exercice : faire de même pour les autres exemples.

Systèmes linéaires : définition générale

Juste pour avoir une définition formelle :

Définition 1.5.1 p.13

Un *système linéaire* de p équations à n inconnues $(p, n \in \mathbb{N}^*)$ est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p, \end{array}\right.$$

où les nombres $\{a_{11}, \ldots, a_{pn}\}$ sont donnés et appelés coefficients du système et où les nombres $\{b_1, \ldots, b_p\}$ sont donnés et forment le "terme indépendant".

Définition 1.5.2 p.13

Une solution du système est un n-uplet $(x_1; \ldots; x_n)$ de nombres qui satisfont toutes les équations.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Types de systèmes et équivalences

Définition 1.5.3 p.13

Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit *incompatible*. Un système admettant une solution unique est dit *déterminé*. Un système admettant une infinité de solutions est dit *indéterminé*.

Il n'y a pas d'autre possibilité.

Définition 1.5.4 p.14

Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits équivalents si ils admettent le même ensemble de solutions. On note alors $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$. Si toute solution de (S_1) est solution de (S_2), on dit que (S_1) implique (S_2) et on note $(S_1) \Rightarrow (S_2)$.

Idée de résolution : transformer un système en un système équivalent, mais plus simple. Répéter l'opération jusqu'à pouvoir résoudre le dernier système. Ses solutions seront alors exactement les solutions du premier.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Le système d'équations en les inconnues x,y
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$$
est déterminé puisqu'on a $S=\{(-2;3)\}$.
2. Le système d'équations en x, y donné par
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y & = & 2 \\ 10x+8y & = & 4 \end{array}\right.$$
est équivalent au système $5x+4y=2$ et est indéterminé puisqu'il admet comme ensemble de solutions
$$S=\left\{\left(\frac{2-4y}{5};y\right):y\in\mathbb{R}\right\}.$$
3. Le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+4y & = & 2 \\ 10x+8y & = & 5 \end{array}\right.$$
est incompatible : on note $S=\varnothing$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Méthode du pivot

La méthode *d'élimination* présentée ici est attribuée à Carl Friedrich Gauss, mathématicien et physicien Allemand (1777-1855).

Proposition 1.5.1 p.14

Un système linéaire (S) est équivalent à tout système (S') obtenu

- soit en multipliant les deux membres d'une des équations de (S) par un même nombre *non nul* ;
- soit en remplaçant une équation (k) du système (S) par une équation obtenue en additionnant l'équation (k) et une équation (l) de (S), membre à membre ;
- soit en permutant les équations du système (S).

Utilisation : éliminer des inconnues, pour obtenir un système plus simple.
Avantage : ne pas avoir de fractions
Inconvénient : ne fonctionne qu'avec des systèmes linéaires.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un exemple simple

Résoudre

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ -x & + & 2y & = & 8. \end{array} \right.$$

On a

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ & & 3y & = & 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 7 \\ & & y & = & 5. \end{array} \right.$$

Le système est ***triangulaire***, donc on peut s'arrêter là. On pourrait aussi éliminer y dans la première équation de ce système, mais on peut substituer la valeur de y dans la première équation, donc

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 5 & = & 7 \\ & & y & = & 5. \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(2; 5)\}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemple II (hors matière, je pense)

Soit le système

$$(S):\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 7 \\ -x & +2y & -z & = & 8 \\ 2x & -2y & +z & = & -3. \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 7 \\ & 3y & -2z & = & 15 \\ & -4y & +3z & = & -17. \end{array}\right.$$

Puis en additionnant 4 fois l'équation (2) et 3 fois l'équation (3),

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 7 \\ & 3y & -2z & = & 15 \\ & & z & = & 9. \end{array}\right.$$

On trouve z, puis on substitue pour avoir y, on substitue de nouveau pour avoir x. On a $S=\{(5;11;9)\}$.

Exemple moins simple (hors matière examen)

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ 3x & + & 11y & + & 3z & - & 5t & = & -15 \\ 2x & - & y & & & + & t & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & 3z & + & 3t & = & 4 \end{array}\right.$$

On soustrait 3 fois la première équation de la deuxième, 2 fois de la troisième, et 4 fois de la quatrième :

$$(S) \Leftrightarrow (S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & - & 5y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ & - & 5y & - & z & + & 3t & = & 8. \end{array}\right.$$

On recommence avec les équations (2), (3) et (4) :

$$(S_1) \Leftrightarrow (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & & & - & 2z & - & 4t & = & -8 \\ & & & - & z & - & 2t & = & -4. \end{array}\right.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

On recommence avec (3) et (4), après changement de signe

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & & & = & -1 \\ & & 5y & & & - & 5t & = & -12 \\ & & & & z & + & 2t & = & 4 \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

- On ne peut plus éliminer.
- Quelle que soit la valeur de t que l'on choisit, on peut obtenir la valeur de z : on a $z = 4 - 2t$.
- On obtient la valeur de y, puis on *substitue* ces valeurs dans la première équation, pour déterminer x. On a donc

$$S = \left\{ (x; y; z; t) = \left(\frac{-1}{5}; t - \frac{12}{5}; 4 - 2t; t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Mettre les valeurs trouvées pour x, y, z, t dans le bon ordre ;
2. Vérifier, en substituant les valeurs trouvées dans le système de départ.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La méthode de substitution

L'idée de cette autre méthode, qui est équivalente à l'élimination, est également de faire "disparaître" des inconnues.

1. On choisit une équation que l'on résout par rapport à une des inconnues ;
2. On utilise la relation obtenue pour substituer cette inconnue dans les autres équations ;
3. On recommence avec une autre inconnue.

Attention à ne pas tourner en rond !

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ -x+2y & = & 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -x+2y & = & 8. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7-y \\ -(7-y)+2y & = & 8. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 7 \\ 3y & = & 15. \end{array}\right.$$

On trouve le nombre y dans la deuxième équation et on substitue alors la valeur de y dans la première équation : $S=\{(2;5)\}$.

Remarque : la méthode du pivot aurait donné le résultat plus rapidement car les calculs (équivalents) y sont mieux organisés.

Encore un exemple

On a

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+y-z & = & -25 \\ -x+2y+z & = & 15 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3x+y-z & = & -25 \\ 2x-3y+2z & = & -16 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 3(2y+z-15)+y-z & = & -25 \\ 2(2y+z-15)-3y+2z & = & -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ 7y+2z & = & 20 \\ y+4z & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y+4z & = & 14 \\ 7y+2z & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2y+z-15 \\ y & = & 14-4z \\ 7(14-4z)+2z & = & 20 \end{array}\right.$$

On trouve $z=3$, que l'on substitue dans la deuxième équation. On trouve $y=2$, puis $x=-8$. La solution est donc $(x;y;z)=(-8;2;3)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Un petit exemple en chimie (Ex 20 (a) p.18)

Déterminer les coefficients stœchiométriques x, y, z, t de la réaction (équilibrée)

$$x\mathrm{CH}_4 + y\mathrm{O}_2 \to z\mathrm{CO}_2 + t\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Principe : le nombre d'atomes est conservé lors de la réaction. En inspectant les réactifs et les produits, on obtient les conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \qquad (C) \\ 4x & = & 2t \qquad (H) \\ 2y & = & 2z+t \qquad (O) \end{array}\right.$$

Remarque : On ne peut pas espérer une solution unique !

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Solution

On substitue progressivement en gardant toutes les équations. On écrit donc des systèmes équivalents.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4x & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ 4z & = & 2t \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ 2y & = & 2z+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & z \\ t & = & 2z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Les solutions s'écrivent en fonction de z : on écrit en mathématiques

$$S = \{(x; y; z; t) = (z; 2z; z; 2z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

En chimie, il suffit de savoir que $(x; y; z; t) = (1; 2; 1; 2)$ est une solution, on écrit

$$\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O}.$$

Problème résolu I

Adrien et Bertrand jouent l'un contre l'autre aux échecs et comptent les points de la façon suivante : une victoire rapporte 3 points au gagnant tandis qu'un match nul rapporte un point à chaque joueur. Sachant qu'Adrien a remporté 6 parties, que Bertrand a 77 points et qu'ils ont joué en tout 37 parties, déterminer le nombre de matchs nuls.

1) 6 2) 8 3) 23 4) 28

Solution :

1. Notons a le nombre de victoires d'Adrien, b le nombre de victoires de Bertrand et n le nombre de nuls.
2. Les conditions de l'énoncé donnent un système d'équations, que l'on travaille tout de suite en utilisant la valeur de a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 6 \\ a+b+n & = & 37 \\ 3b+n & = & 77 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 6 \\ b+n & = & 31 \\ 3b+n & = & 77 \end{array}\right.$$

3. En soustrayant par exemple la deuxième équation de la troisième, on trouve $b = 23$, puis $n = 8$, (on vérifie) et c'est bien n qui est demandé.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Problème résolu II

Dans un parking, il y a des voitures et des motos. Il y a 180 véhicules et 500 roues. Si à la fin de la journée, tous les véhicules sortent et paient leur place, si toutes les voitures paient 10 euros, et toutes les motos 5 euros, quelle est la recette de la journée (en euros) ?

1) 950 euros
2) 1150 euros
3) 1350 euros
4) un autre montant

Solution :

1. On cherche le nombre de voitures v et le nombre de motos m
2. Ensuite, on demande $10v + 5m$.
3. Les conditions de l'énoncé donnent

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4v + 2m & = & 500 \\ v + m & = & 180 \end{array}\right.$$

4. On procède par élimination ou par substitution pour obtenir $v = 70$ et $m = 110$. On vérifie.
5. Ensuite, on a $10v + 5m = 1250$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Problème résolu III

Il y a six ans, un père avait 6 fois l'âge de son fils. Dans trois ans, son âge ne sera plus que le triple de l'age de son fils. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

Solution :

1. Que veut-on ? L'âge actuel du père (p) et celui du fils (f). Puis on fera la somme.
2. On exprime les conditions :
   Il y a 6 ans, leurs âges étaient $p-6$ et $f-6$. Donc $p-6=6(f-6)$.
   Dans 3 ans, leurs âges seront $p+3$ et $f+3$, donc $p+3=3(f+3)$.
   On a donc
   $$\left\{\begin{array}{lcl} p & = & 6f-30 \\ p & = & 3f+6 \end{array}\right.$$
3. On fait la différence des équations et on obtient $3f-36=0$, ou $f=12$. Une des deux équations donne $p=42$. Que fait-on ?
4. On vérifie
5. On fait la somme et la réponse est 54.

Exercices 32 et 34

A la boulangerie, si j'achète 5 tartes aux pommes et 3 tartes aux abricots, je dois payer 38 euros. Si j'achète 7 tartes aux pommes et une tarte aux abricots, je dois payer 34 euros. Combien devrais-je payer si j'achetais 2 tartes aux pommes et une tarte aux abricots ?

1. 12 euros
2. 14 euros
3. 16 euros
4. 18 euros

- Soit p le prix d'une tarte aux pommes et a celui d'une aux abricots.
- On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcll} 5p+3a & = & 38 & (1) \\ 7p+a & = & 34 & (2) \end{array}\right.$$

- On résout par substitution ou pivot : (2)-3.(1) : $-16p=-64$
- On trouve $p=4$ et $a=6$. On vérifie. On calcule $2p+a=16$.

Les nombres réels x et y satisfont le système d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+8y & = & 3 \\ 9x-4y & = & 2. \end{array}\right.$

Que vaut $x+y$?

1. $-\frac{7}{12}$
2. $-\frac{2}{3}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{7}{12}$

- On obtient y en considérant l'équation $(2)-3(1)$: $-28y=-7$
- On obtient x en considérant l'équation $(1)+2(2)$: $21x=7$
- On vérifie.

Faire les exercices 36,37,38

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.