Cours préparatoire de Mathématique
Sciences de la santé
Analyse

Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, les 16 et 17 Août 2019

Fonctions en mathématique : une définition

Soient A et B des ensembles (de nombres).

Définition 3.1.1 p.47

Une fonction de A dans B est une “loi” qui a tout élément x de A associe (au plus) un élément $f(x)$ de B. Le **domaine** de f est l'ensemble des $x \in A$ tels que $f(x)$ est défini. L'**image** de f est $\{f(x) : x \in A\}$.

On note alors parfois $\boldsymbol{f : A \to B : x \mapsto f(x)}$.

- Si f est une telle loi, alors on peut définir le **graphe** de f par

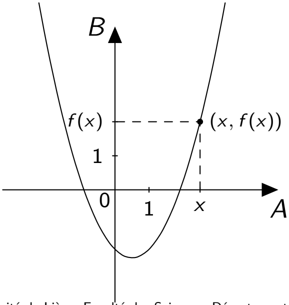
$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

- Cet ensemble est une **relation**. On peut définir les fonctions comme des relations particulières.
- Quel que soit le point de vue, quand on écrit $f(x)$, x est un nombre, $f(x)$ est un nombre, et la fonction est f.
- D'ailleurs, on peut remplacer x et y par n'importe quelle lettre.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentations graphiques

- On considère des fonctions de $A = \mathbb{R}$ dans $B = \mathbb{R}$. Le graphe d'une telle fonction f est donc
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$
- Si on se donne un repère (généralement on prend les axes orthogonaux), on peut alors **repésenter** les points du graphe, comme nous l'avons vu en géométrie.
- On obtient ainsi la représentation graphique de f, que l'on appelle encore *le graphique* de f.



Constructions de fonctions I

Définition 3.1.2 p.48 (Egalité)

Deux fonctions f et g sont égales si **elles ont même domaine et** si on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Exemple : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ne sont pas égales, f prolonge g.

Définition 3.1.3 p.48 (Restriction)

Si $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ est une fonction et si $A' \subset A$, alors la restriction de f à A' est donnée par $f|_{A'} : A' \to B : x \mapsto f(x)$.

La fonction $f|_{A'}$ est donc la même “loi de transformation” que f, mais définie sur un ensemble plus petit.

Définition 3.1.4 p.48 (Somme et produit)

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Les fonctions $f + g$ et $f \cdot g$ ont pour domaine $\mathrm{dom}_f \cap \mathrm{dom}_g$.
- On définit $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$.
- On définit le produit $f\,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)\,g(x)$.
- En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, la fonction $c\,f$ a pour domaine dom_f et est définie par $c\,f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$.

Constructions de fonctions II

Définition 3.1.5 p.48 (Composition)

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la composée de f et g (f après g) a pour domaine $\mathrm{dom}_{f\circ g} = \mathrm{dom}_g \cap \{x : g(x) \in \mathrm{dom}_f\}$ et est donnée par

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

La condition sur le domaine de $f \circ g$ est claire si on considère que l'on transforme x au moyen de g, puis le résultat au moyen de f.
Exemple : La fonction

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{y}$$

admet $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme domaine. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors $i \circ g : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est définie sur $\mathrm{dom}_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.
Comment les repérer : $f(g(x))$ se lit f **de** g de x, par exemple $h(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\,(3x)}$. Attention à $\mathrm{tg}\,^2(3x)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Parité

Définition 3.1.6 p.49

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire si son domaine est symétrique par rapport à zéro et si on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_f$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f.$$

Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, -y) \in G_f.$$

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 3$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Périodicité

Les fonctions périodiques correspondent aux phénomènes scientifiques qui se répètent à intervalle régulier.

Définition 3.1.7 p.49

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est *périodique de période* T (où $T > 0$) si

$$f(x + T) = f(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.8 p.49

Si f est une fonction périodique, on appelle *période* de f le plus petit nombre T tel que f soit périodique de période T (s'il existe).

Exemples : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$,

Exercices 1 et 3

Soit f une fonction dont le domaine est $[0,2]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de $f \circ g$?

Solution :

1. La condition est $x^2 \in \mathrm{dom}_f = [0;2]$
2. On a donc $x^2 \geqslant 0$ et $x^2 \leqslant 2$
3. On résout l'inéquation.
4. Solution : $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Soient les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y}.$$

Déterminer le domaine de définition de f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.

Solution :

1. $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$
2. $\mathrm{dom}_g = [0; +\infty[$
3. $\mathrm{dom}_{g \circ f} = \{x : \cos(x) \geqslant 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
4. $\mathrm{dom}_{f \circ g} = [0; +\infty[$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Encore des exercices

La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \cos(x^4) + x^2$ est-elle paire, impaire ou aucun des deux ?

Solution : Aucun des deux, attention aux détails.

Déterminer le domaine de $f(x) = \mathrm{arcos}(x^2 - 8)$

Solution :

1. Le domaine de la fonction arccos est $[-1; 1]$
2. La condition est donc $-1 \leqslant x^2 - 8 \leqslant 1$
3. On résout séparément les deux inéquations
4. On trouve $[-3; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; 3]$
5. On peut vérifier en prenant des valeurs.

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(3 - x^2))$?

1) $]-\infty; \sqrt{2}[$ 2) $]-\infty; \sqrt{3}[$ 3) $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ 4) $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

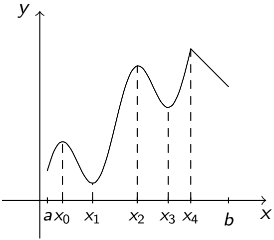
P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Croissance, décroissance

Définition 3.1.9 p.49

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.

1. f est (strictement) croissante sur A si
$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x)(<) \leqslant f(y).$$
2. f est (strictement) décroissante sur $A \subset \mathbb{R}$ si
$$(x, y \in A \text{ et } x < y) \Rightarrow f(x)(>) \geqslant f(y).$$



Cette fonction est croissante sur $[a, x_0]$, $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ elle est décroissante sur $[x_0, x_1]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_4, b]$.

Fonctions du premier degré

On appelle fonction du premier degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + p,$$

où m et p sont réels (on suppose $m \neq 0$, mais ce n'est pas obligatoire).

- Cette fonction a un domaine égal à $\mathbb{R}$.
- Sa représentation graphique est une droite, d'équation $y = mx + p$.
- Le nombre p est $f(0)$. On l'appelle donc ordonnée à l'origine.
- Le nombre m est la pente ou le taux d'accroissement. On a en effet pour $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

  $$f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1) \text{ donc } m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- Cette fonction est croissante si $m > 0$ et décroissante si $m < 0$. Elle est constante si $m = 0$. Elle est déterminée par ses valeurs en deux points distincts.
- Elle ne change de signe que si elle s'annule, on a déjà étudié le signe.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Fonctions du second degré

On appelle fonction du second degré toute fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont réels (on suppose $a \neq 0$, sinon on est ramené au cas précédent).

- Cette fonction a un domaine égal à $\mathbb{R}$.
- Sa représentation graphique est une parabole.
- Le nombre c est $f(0)$.
- On a

  $$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}],$$

  pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Donc f est une translatée de g donnée par $g(x) = ax^2$. Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

Extremum et signe

- Donc fonction f admet un extremum global strict en $x_e = -\frac{b}{2a}$. C'est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.
- De plus, on a $f(x_e) = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$.
- L'équation $f(x) = 0$ est une équation du second degré à une inconnue. Nous l'avons déjà traitée.
- Si cette équation admet deux solutions x_0 et x_1, éventuellement confondues, alors on a

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1).$$

- Cela permet d'étudier le signe de $f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Ce signe est le signe de a quand $x \notin [x_0, x_1]$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 5,6 p.69

5. Déterminer l'unique fonction du premier degré f telle que $f(1) = 3$ et $f(5) = 11$.

Solution :

1. C'est le même problème que trouver une équation de la droite qui passe par deux points (1.3) et $(5; 11)$.
2. On peut écrire $f(x) = mx + p$, et imposer les deux conditions $3 = f(1) = m + p$ et $11 = f(5) = 5m + p$, on trouve $m = 2$ et $p = 1$.
3. On vérifie que $f(x) = 2x + 1$ répond à la question.
4. On peut aussi appliquer la formule pour m : $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}$.

6. Déterminer l'unique fonction du premier degré g telle que $g(2) = 3$ et dont la pente est -3.

Solution :

1. On a $g(x) = mx + p$, et $m = -3$, donc $g(x) = -3x + p$.
2. On impose l'autre condition : $3 = -6 + p$, donc $p = 9$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 7,9 p.69

7. Déterminer en quel point la fonction du second degré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ admet un extremum. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?

Solution :

1. La fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet son extremum en $x_e = -\frac{b}{2a}$ (si on ne se souvient plus, on peut annuler la dérivée).
2. Ici c'est donc en $\frac{5}{2}$
3. C'est un min car $a > 0$ (penser à x^2).

Exercice 9 (voir notes)

Solution : On a $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout x.Le graphique donne $f(0) = f(6) = -2$, on a aussi $f(3) = 1$, et l'axe de symétrie est en $x = 3$. Donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} c & = & -2 \\ 36a + 6b + c & = & -2 \\ 9a + 3b + c & = & 1 \end{array}\right.$$

De plus, on peut remplacer une des cond. par $-\frac{b}{2a} = 3$. On résout le systèmea $= -\frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = -2$. Donc $f(-2) = -\frac{22}{3}$.

Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

- La fonction puissance entière de degré $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0$ est définie

$$P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ facteurs}}.$$

- Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. C'est un produit de fonctions plus simples.
- En multipliant ces fonctions par des nombres et en les additionnant on obtient des *fonctions polynomiales*.

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$

- Cette dermière fonction est dite de degré n si $c_n \neq 0$, et $\mathrm{dom}_P = \mathbb{R}$.
- En utilisant le produit, la fonction

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x},$$

et les fonctions polynomiales, on obtient les fractions rationnelles :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{c_n x^n + \cdots + c_0}{a_m x^m + \cdots + a_0},$$

dont le domaine est $\{x \in \mathbb{R} : a_m x^m + \cdots + a_0 \neq 0\}$.

Les fonctions sinus et cosinus (p.51)

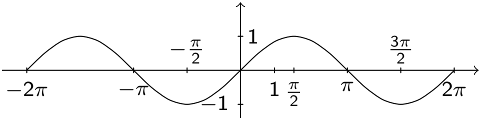


FIGURE – Représentation graphique de la fonction sin (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

La fonction sin est périodique, de période 2π. Elle est impaire. Son image est $[-1, 1]$.

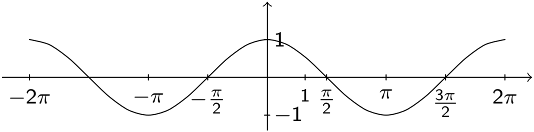


FIGURE – Représentation graphique de la fonction cos (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

La fonction cos est périodique, de période 2π. Elle est paire. Son image est $[-1, 1]$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La fonction tangente

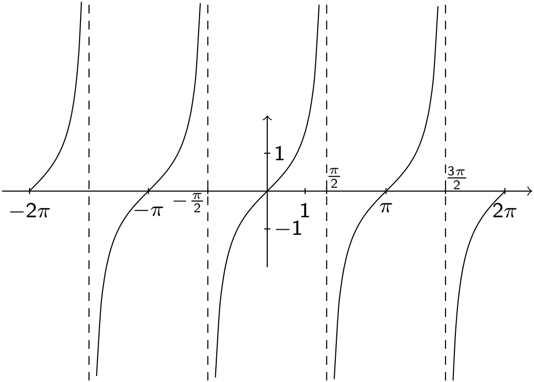


FIGURE – Représentation graphique de la fonction tg (restreinte à $[-2\pi, 2\pi]$).

Fonctions réciproques (ou inverses)

- Soit $f : A \to B$ un fonction. A tout $x \in A$, f associe un unique élement $f(x)$ de B.
- Etant donné $y \in B$, peut-on aller dans l'autre sens, trouver **un unique élement** x **tel que** $f(x) = y$?
- Il faut que y soit dans l'image de f, évidemment.
- Cela n'est pas possible pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- C'est possible pour $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$.

Définition 3.2.1 p.52

Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si $a \neq a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

On a aussi alors $f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'$.

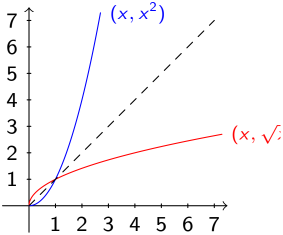
Proposition 3.2.1 p.52

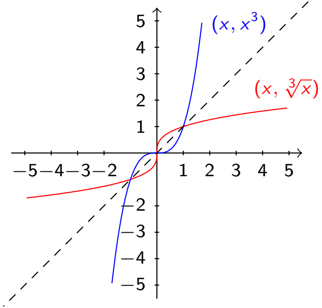
Si $f : A \to B$ est injective, pour tout y dans l'image de f, il existe un unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$. On note $x = f^{-1}(y)$, et la fonction f^{-1} est la réciproque de f.

Si l'image de f est B, on dit que f est une bijection et le domaine de f^{-1} est B.

Exemples

- La fonction $f : \mathbf{[0, +\infty[} \to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est injective, la réciproque est la racine carrée.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$est injective, la réciproque est la racine cubique.





Les racines p-èmes se définissent et représentent de manière similaires.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

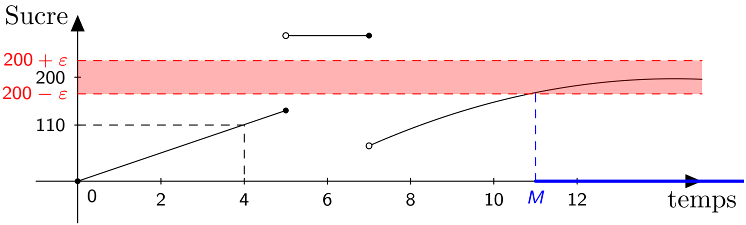
Limites : Instruments de mesure et erreurs

- Tout instrument donne une mesure avec une marge d'erreur. La balance de gauche a une marge d'erreur $\varepsilon = 2.5$ grammes. Sa capacité est limitée à N =2000g :


- Pour celle de droite, $\varepsilon = 0.005$ grammes et $N = 20g$.
- La balance de gauche indique $50g$ quand on est en réalité entre $50 - \varepsilon$ et $50 + \varepsilon$. Elle indique "$+\infty$" dès qu'on dépasse 2000g (elle n'indique plus rien).
- Celle de gauche indique 0.5g quand la mesure réelle est entre $0.5g - \varepsilon$ et $0.5g + \varepsilon$, et $+\infty$ dès qu'on dépasse $20g$.
- La définition de la limite en mathématique utilise ces marges d'erreur, mais on a le droit d'avoir toutes les balances, aussi précises que l'on veut.

Les limites dans ma cuisine

Je verse du sucre dans ma balance de cuisine, pour atteindre 200g :



Si je prends une balance plus précise, j'ai un autre ε, mais à partir d'un instant, elle indiquera quand même 200. On écrit

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = 200.$$

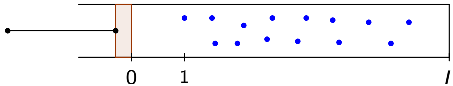
La condition est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : (t > M \text{ et } t \in \mathrm{dom}_f) \Rightarrow S(t) \in]200-\varepsilon, 200+\varepsilon[.$$

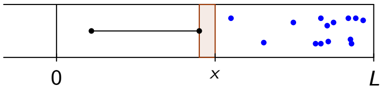
On a aussi $\lim_{t\to 4} S(t) = 110$. Mais $\lim_{t\to 5} S(t)$ n'existe pas.

Limites : exemple en physique

Considérons la situation physique suivante, où on a représenté (de profil), un tube cylindrique dont la base a une surface unitaire.



On indique la position du piston à l'aide d'une graduation sur le cylindre.

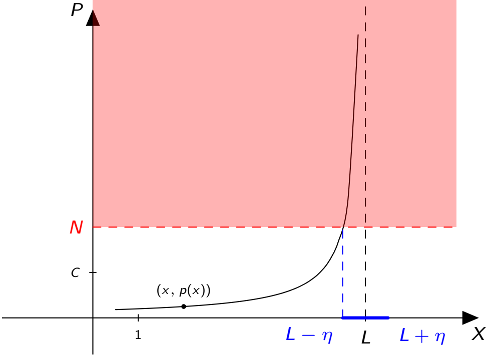


La pression est alors une fonction de la position x du piston : si on note C le produit de la pression et du volume en la position initiale, on a

$$p : [0, L[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{C}{L - x}.$$

Représentation graphique et questions

- Quel est le comportement de la pression quand x "tend vers L" ?



- Condition : $\forall N \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : L - \eta < x < L + \eta \Rightarrow p(x) > N$.
- On note $\lim\limits_{x \to L} p(x) = +\infty$ (ou plus rarement $\lim_L p = +\infty$).
- Il s'agit d'une limite infinie en un nombre fini (L).

Limite finie en un nombre a : une définition

Définition 3.3.1 p.56

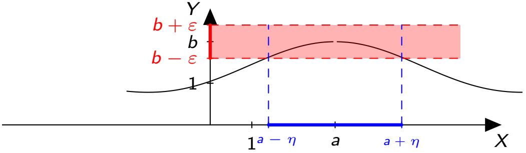
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point adhérent à dom_f et b un nombre réel. On dit que la limite de f pour x tendant vers a est égale à b, ou que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in \mathrm{dom}_f \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

et on dit que f *admet une limite finie en a, égale à b.*



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exemples

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} x = a.$$
2. Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a
$$\lim_{x\to a} f_2(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$
.
3. La fonction
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$
n'admet pas de limite finie (ou infinie) en 1.
4. Même résultat pour la fonction f_4 définie par
$$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Premiers résultats

Proposition 3.3.1 p.57

(1) Si f admet une limite finie en a, alors cette limite est unique :

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b', \quad \text{alors} \quad b = b'.$$

(2) Si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si f admet une limite finie en a alors on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Définition 3.3.2 p.57 (Continuité)

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathrm{dom}_f$ et si la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Cette limite vaut alors $f(a)$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques fonctions continues (p. 57)

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
2. Les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition ;
3. Les fonctions racines p-èmes pour p pair sont continues sur $[0, +\infty[$;
4. Les fonctions racines p-èmes pour p impair sont continues sur $\mathbb{R}$;
5. La fonction sin et la fonction cos sont continues sur $\mathbb{R}$;
6. Les fonctions tg et cotg sont continues sur leur domaine de définition ;
7. Les fonctions exponentielle et logarithmes sont continues sur leur domaine de définition (nous reverrons ces fonctions d'ici peu).

Règles de calcul I

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.3.2 p.58 (Sommes et produits : limites finies)

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Si on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = b', \quad (b, b' \in \mathbb{R}),$$

alors on a

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = b + b', \quad \lim_{x \to a}(fg)(x) = bb', \quad \lim_{x \to a}(cf)(x) = cb.$$

La limite d'une somme est la somme des limites et la limite du produit est le produit des limites, quand elles existent.

Remarque : ces résultats valent aussi pour $a \in \{-\infty, +\infty\}$. Il existe des résultats analogues pour des limites infinies. On les retient avec un peut de bon sens.

Règles de calcul II

Proposition 3.3.3 Fonctions composées

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $b' \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, +\infty\}$.
Si on a

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

et

$$\lim_{x \to b} f(x) = b'$$

alors on a

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = b'.$$

Exemple : $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = 2$, car $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Proposition 3.3.4 p.58 Quotients

Soient des fonctions f et g et un point a adhérent au domaine de f et de g. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}_{\mathbf{0}}$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Localité et prolongement

Idée : remplacer une fonction f compliquée par une fonction plus simple g, égale à f au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 3.3.5 p.58 (Localité et prolongement)

Soient f et g deux fonctions telles que

1. il existe un voisinage V de a tel que
   1. $\mathrm{dom}_{f|_V} \subset \mathrm{dom}_{g|_V}$;
   2. on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom}_{f|_V} = \mathrm{dom}_f \cap V$;
2. la fonction g admet une limite en a ;

alors la fonction f admet une limite en a et on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Exemples : $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ et $\lim_{x \to 2} \frac{|x| - 2}{x - 2} = 1$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 10,12,13,14,16 p.70

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$.
    C'est un polynôme, donc c'est continu. On calcule $f(1) = 0$.
12. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x-2}$. Calculer $\lim_{x\to 2} h(x)$.
    1. C'est un quotient, donc on calcule la limite du num. et du déno. On trouve 0 et 0. Le thm. ne s'applique pas (on note $\frac{0}{0}$). On factorise et on prolonge.
    2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 3 = 5$.
13. Si $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$. Calculer $\lim_{x\to -2} f(x)$ et $\lim_{x\to 2} f(x)$.
    1. Le domaine de f est $]-\infty; -1-\sqrt{2}] \cup [-1-\sqrt{2}; +\infty[$, donc on ne peut pas calculer $\lim_{x\to -2} f(x)$, car -2 n'est pas adhérent au domaine.
    2. Pour $\lim_{x\to 2} f(x)$, on calcule d'abord $\lim_{x\to 2} x^2 + 2x - 1 = 7$
    3. Puis $\lim_{x\to 7} \sqrt{x} = \sqrt{7}$.
14. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$.
    1. C'est un quotient, donc on calcule la limite du num. et du déno. On trouve 0 et 0. Le thm. ne s'applique pas (on note $\frac{0}{0}$).

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

② On multiplie haut et bas par le conjugué et on prolonge :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x} \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

16. La limite $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

① vaut 0

② vaut 6

③ vaut $\frac{0}{0}$

④ n'est pas définie

Solution : Quotient : on trouve "$\frac{0}{0}$". Le thm ne s'applique pas.
Conjugué et factorisation.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \sqrt{x+5}+3 = 6.$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices supplémentaires

1. **Faire le 15** (même que le 16), et **faire le 17** (2 mult. par le conjugué)
2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x-3)^3 \sin(\frac{\pi}{8}x)}{x^2(\sqrt{x+5}-3)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-3)^3 \sin(\frac{\pi}{8}x)}{x^2} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3 - 4x + 7 = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{7}{2x^3}) = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-4x}{3x^3-2x+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2(1-\frac{4x}{2x^2})}{3x^3(1-\frac{2x}{3x^3}+\frac{1}{3x^3})} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{3x^3} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-4x}}{3x+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(2-\frac{4x}{2x^2})}}{3x+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{|x|\sqrt{(2-\frac{4x}{2x^2})}}{3x+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$
6. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-4x}}{3x+2} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$

Ce sont les principales techniques, avec le thm de l'Hospital, que je ne reverrai pas.

Nombre dérivé en x_0

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de dom_f. Nous cherchons un *taux de variation instantané* en un point x_0.

Définition 3.4.2 p.59

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{u \to x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

existe et est finie. Si tel est le cas, le nombre dérivé de f en x_0 est la valeur de cette limite. On le note $Df(x_0)$ ou $f'(x_0)$, ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Remarque : (a) Nous supposerons que f est définie sur un voisinage de x_0. Il suffit en fait que $x_0 \in \mathrm{dom}_f$ soit adhérent à $\mathrm{dom}_f \setminus \{x_0\}$.
(b) Le nombre dérivé en x_0 est la pente de la tangente au graphe en $(x_0, f(x_0))$.
Exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $x_0 = 3$. On a

$$f'(3) = Df(3) = \lim_{u \to 3} \frac{u^2 - 9}{u - 3} = 6.$$

La fonction dérivée

Définition 3.4.3 p.60

Soit f une fonction. La fonction dérivée de f, notée f' ou Df, est la fonction

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

Elle associe donc à chaque nombre x le nombre dérivé de f en x.
Une fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$.

Notation (en sciences) :

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Si y est fonction de x, ce que l'on note $y = y(x)$ où $\Delta y = y(x + h) - y(x)$ est la variation de la "*variable*" y quand on passe de x à $x + h$ et
$\Delta x = (x + h) - x$ est la variation de la "*variable*" x.

Premières dérivées

En appliquant la définition, on obtient les dérivées de fonctions élémentaires.

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Df_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $Df_2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $Df_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$.
4. $f_4 : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a
$$Df_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
5. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
6. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Règles de calcul I

Proposition 0.1

Soient f et g deux fonctions dérivables en sur l'intervalle $]a, b[$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. *La fonction $f + g$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a*

$$(f + g)' = f' + g'.$$

2. *La fonction $f\,g$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a (la règle de Leibniz)*

$$(f\,g)' = (f')g + f(g').$$

   En particulier, on a aussi, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$(cf)' = c\,f'.$$

3. *Si $g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Applications

1. On pzut montre que pour tout entier positif m, $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^m$ est dérivable et qu'on a $g_m'(x) = mx^{m-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2. Pour toute fonction polynôme P définie par $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ ($x \in \mathbb{R}$), on a $P'(x) = ma_m x^{m-1} + \cdots + a_1$;
3. Soit $f_3 : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. Par le résultat sur les quotients, $f_3'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.
4. On peut montrer que pour tout entier *positif* m, la fonction $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et qu'on a $g_m'(x) = -mx^{-m+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dérivées et fonctions composées

Proposition 3.4.2 p.61

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle contenant $g(I)$. La fonction $f \circ g$ est dérivable sur I et on a

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \forall x \in I$$

Exemple : Calculer la dérivée de h donnée par $h(x) = \sin(4x^2)$.
C'est une fonction composée de la forme $f \circ g(x)$, où $f(u) = \sin(u)$ et $g(x) = 4x^2$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Dérivées et variations

Les propriétés suivantes se voient sur les graphiques. Elles peuvent être démontrées.

Proposition 3.4.3 p.62

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$, si f admet un extremum (local) en $x_0 \in]a, b[$, alors $Df(x_0) = 0$.

Proposition 3.4.4 p.62

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$ si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur $]a, b[$;
2. Si f' est strictement positif (resp. négatif) sur $]a, b[$, alors f est strictement croissant (resp. décroissant) sur $]a, b[$.

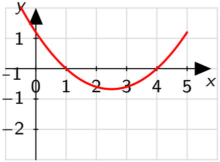
La réciproque du deuxième point est fausse : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est un contre-exemple.

Proposition 3.4.5 p.63

Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $f' \equiv 0$ sur $]a, b[$, alors f est constante sur $]a, b[$. Si f et g sont dérivables sur $]a, b[$ et si $f' = g'$ sur $]a, b[$ alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f = g + k$ sur $]a, b[$.

Exercices 19 (b,d), 20 (a,b,d,e,f), 21 , 23

La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f, définie sur $\mathbb{R}$, que peut-on nécessairement déduire sur F ?



1) La fonction F s'annule en $x = 1$.
2) La fonction F admet un minimum (local) en $x = 2.5$.
3) La fonction F est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2.5$.
4) La fonction F admet un maximum (local) en $x = 1$.

Rem. On pourrait proposer des graphiques pour F.

Primitives : définitions

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$.

Définition 3.5.1 p.61

Une primitive de f sur I est une fonction F sur I telle que $DF(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.
On dit que f est primitivable sur I. On note $\int f(x)\mathrm{d}x$ une primitive de f sur I. Toute fonction continue sur I est primitivable sur I.

Proposition 3.5.1 p.63

1. Si F est une primitive de f sur $]a, b[$, alors pour toute constante c, la fonction $F + c$ est une primitive de f sur $]a, b[$;
2. Si F et G sont deux primitives de f sur $]a, b[$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $G = F + c$ sur $]a, b[$;

Si F et G sont définies sur un même intervalle, on note $F \simeq G$ si $F' = G'$. Cela veut dire $F = G + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Logarithmes et exponentielles I : le logarithme népérien

But : définir a^x, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et généraliser tout ce qu'on connaît.

Définition 3.5.2 p.63

La fonction *logarithme népérien* ln est l'unique fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $D\ln(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $\ln(1) = 0$.

La fonction a été introduite par John Napier of Merchiston (1550 -1617).

Proposition 3.5.2 p.61 (Propriété fondamentale)

Pour tous $a, b > 0$, on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b),$$

et bien sûr $\ln(1) = 0$.

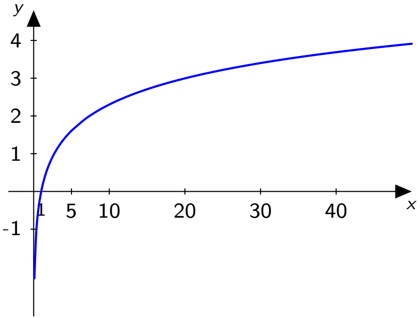
Propriétés et représentation graphique

Proposition 3.5.3 p.63

La fonction

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$$

est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.



P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

La fonction exponentielle

Définition 3.5.3 p.64

La fonction exponentielle

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[: x \mapsto \exp(x)$$

est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Proposition 3.5.4 p.64 (Propriété fondamentale)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(0) = 1$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

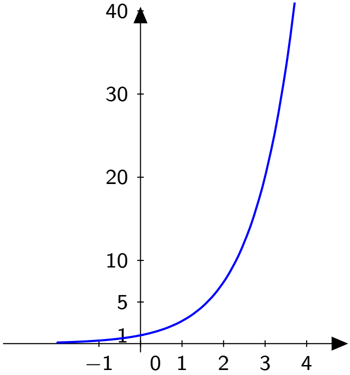
Proposition 3.5.5 p.64

La fonction exp est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$D(\exp(x)) = \exp(x)' = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Représentation graphique et propriétés



Proposition 3.5.6 p.64

On a $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $\ln(\exp(y)) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exponentielle de base a

Définition 3.5.4 p.64

Pour tout $a > 0$, l'exponentielle de base a est la fonction

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a)).$$

On note e le nombre tel que $\ln(e) = 1$. On a alors $e^x = \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Remarques : (a) Pour x rationnel, $a^x = \exp(x \ln(a)) = e^{x \ln(a)}$ coïncide avec nos définitions précédentes.
(b) On trouve alors

$$(a^x)' = a^x \ln(a).$$

Proposition 3.5.7 p.65

La fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$ est strictement décroissante si $a < 1$, constante si $a = 1$, strictement croissante si $a > 1$.
Pour tout $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Logarithme de base a

Définition 3.5.5 p.65

La fonction logarithme de base a est la fonction réciproque de $\exp_a$. On a donc

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a(x).$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{et} \quad a^{\log_a(y)} = y,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0, +\infty[$.

Proposition 3.5.8 p.65

On a en fait

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 24 (a,c,f), 25

24 a $\ln(4-x) = \ln(x+8)$;

1. Attention aux CE : $4-x>0$ et $x+8>0$ (inutile de résoudre)
2. Si les CE sont OK, ln est injective, donc l'équation s'écrit $4-x = x+8$, donc $x=-2$ (cela revient à prendre l'exponentielle des deux membres) On vérifie les CE.

24 c $\ln(x-6) = 1$;

1. CE : $x-6>0$.
2. On écrit 1 comme $\ln(e)$, ou on prend l'exp. des deux membres, l'équation devient $x-6=e$. On vérifie que $x=6+e$ est une sol..

24 f $\ln(x+2)+\ln(x-5) = \ln(30)$;

1. CE : $x+2>0$ et $x-5>0$
2. On prend l'exp des deux membres ou la prop. fond. du logarithme $\ln((x+2)(x-5)) = \ln(30)$;
3. On a l'éq. équivalente $(x+2)(x-5) = 30$. Solutions : 8, -5.
4. Mais -5 est à rejeter !

25 Soient a et x deux nombres strictement positifs et n un nombre naturel non nul. L'expression $\log_{a^n}(x)$ vaut

1. $\log_a(x^n)$;
2. $\log_a(nx)$;
3. $\frac{1}{n}\log_a(x)$;
4. $n\log_a(x)$.

Formule de changement de base ou $\log_{a^n}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a^n)} = \frac{\ln(x)}{n\ln(a)} = \frac{1}{n}\log_a(x)$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Une liste de primitives à connaître

A connaître absolument :

1. Si m est entier distinct de -1, on a $\int x^m \mathrm{d}x \simeq \frac{x^{m+1}}{m+1}$ sur $\mathbb{R}$;
2. De manière générale, on a $\int x^r \mathrm{d}x \simeq \frac{x^{r+1}}{r+1}$ sur $]0,+\infty[$ si $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
3. On a $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \simeq \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$;
4. On a $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \simeq \ln(-x)$ sur $]-\infty,0[$;
5. On a $\int \exp(x)\mathrm{d}x \simeq \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$;
6. On a $\int \sin(x)\mathrm{d}x \simeq -\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$;
7. On a $\int \cos(x)\mathrm{d}x \simeq \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$;

Un peu plus difficiles :

8. On a $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x \simeq \mathrm{tg}\,(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$;
9. On a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \simeq \arcsin(x)$ sur $]-1,1[$;
10. On a $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \simeq \mathrm{arctg}(x)$ sur $\mathbb{R}$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Règles de calcul I : combinaisons linéaires

Ces règles découlent des règles analogues pour les dérivées.

Proposition 3.5.9 p.65 (Combinaisons linéaires)

Si f, g sont primitivables sur $]a, b[$ et $r, s \in \mathbb{R}$, alors $rf + sg$ est primitivable sur $]a, b[$ et

$$\int (rf + sg)(x)\mathrm{d}x \simeq r \int f(x)\mathrm{d}x + s \int g(x)\mathrm{d}x$$

sur $]a, b[$.

Exemples :

1. $\int 3x^3 + 4x^2 + 1\mathrm{d}x = 3\int x^3\mathrm{d}x + 4\int x^2\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x \simeq 3\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + x$, sur $\mathbb{R}$
2. $\int \frac{3}{1+x^2} + x^5\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int x^5\mathrm{d}x \simeq 3\mathrm{arctg}(x) + \frac{x^6}{6}$ sur $\mathbb{R}$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Primitivation par substitution

- On regarde la formule $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
- Une primitive du membre de droite est donnée par $f \circ g$.
- Si on veut primitiver une fonction du type $f(g(x))g'(x)$, il faut plutôt écrire $\boldsymbol{(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x)}$, si $F'(x) = f(x)$

Proposition 3.5.10 p.66 (Primitivation par substitution)

Si f admet la primitive F alors

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x \simeq F(g(x)) = \int f(u)\mathrm{d}u|_{u=g(x)}.$$

- **Applications** : repérer une fonction composée, multipliée par la dérivée de la fonction "interne" ;
- **Notation :**
  1. On pose $u = g(x)$ et on calcule $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$, on remplace.
  2. On calcule $F(u) = \int f(u)\mathrm{d}u$
  3. On remplace u par sa valeur $g(x)$.

Exemples

1. Calcul d'une primitive $\int 3\cos(3x)\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.
   a) On pose $u = 3x$ et on obtient $\mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$;
   b) On calcule $\int \cos(u)\mathrm{d}u \simeq \sin(u)$;
   c) On remplace u par $3x$, donc $\int 3\cos(3x)\mathrm{d}x \simeq \sin(3x)$
   d) On vérifie en dérivant !

2. Calcul d'une primitive $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$:
   a) On pose $u = 1 + x^2$ et on a $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$;
   b) On remplace et on calcule $\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \simeq \sqrt{u}$;
   c) On remplace u par $1 + x^2$, et on obtient $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \simeq \sqrt{1+x^2}$.
   d) On vérifie en dérivant !

3. Faire de même pour $\int x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Règles de calcul : primitivation par parties

Idée : si f et g sont dérivables sur $]a, b[$ alors $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)g'(x)$. Alors $\int f'(x)\,g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \simeq f(x)\,g(x)$, ou

Proposition 3.5.11 p.66

$$\int f'(x)\,g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple : calcul de $\int x\sin(x)\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

On pose	$f'(x) = \sin(x)$	$g(x) = x$.
On obtient	$f(x) = -\cos(x)$	$g'(x) = 1$,

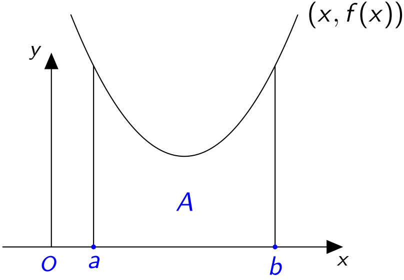
donc

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \int 1\,\cos(x)\mathrm{d}x \simeq -x\cos(x) + \sin(x).$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$

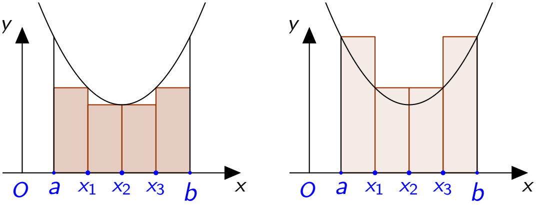
Soit d'abord une fonction f continue et à valeurs positives sur $[a, b]$.



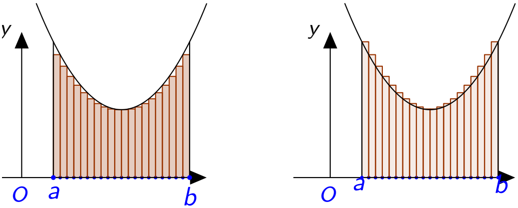
L'intégrale permet de définir rigoureusement l'aire "sous la courbe".

Approximations de l'aire

On obtient cette intégrale en approchant l'aire par une somme d'aires de rectangles. On découpe $[a, b]$ et on utilise f pour créer des rectangles.

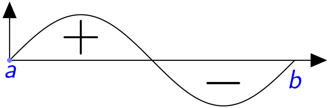


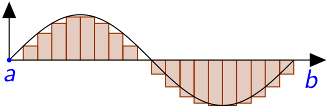
On raffine le découpage, puis on passe à la limite :

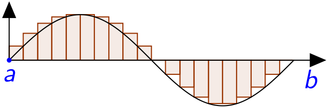


En général

Si f est strictement négative, on compte l'aire négativement. Quand f change de signe sur $[a, b]$, on calcule la partie positive de l'aire, et on ajoute la partie négative :







L'aire signée est encore calculée comme la limite des sommes d'aires de rectangles, comptées avec un signe, pour autant que cette limite existe. C'est l'intégrale de f sur $[a, b]$. On la note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

La définition justifie l'apparition de l'intégrale en sciences.

Théorème fondamental

Rappel : toute fonction f continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $]a, b[$ qui est continue sur $[a, b]$.

Théorème 3.6.1 p.68 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

Remarque : Si G est une autre primitive de f sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors $G(x) = F(x) + c$ et $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$;

Exemples

1. Calcul de $\int_{-2}^{5} \frac{x^2+1}{3} \mathrm{d}x$.
   - La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
   - Une primitive de $\frac{x^2+1}{3}$ y est donnée par $F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3}$. On a donc

$$\int_{-2}^{5} \frac{x^2+1}{3} \mathrm{d}x = [\frac{x^3}{9} + \frac{x}{3}]_{-2}^{5} = (\frac{5^3}{9} + \frac{5}{3}) - (\frac{(-2)^3}{9} - \frac{2}{3}) = \frac{154}{9}.$$

2. Calcul de $\int_{a}^{b} x \mathrm{d}x$.
   - La fonction est intégrable sur l'intervalle considéré.
   - Une primitive de $f(x) = x$ est donnée par $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. On a donc

$$\int_{a}^{b} x \mathrm{d}x = [\frac{1}{2}x^2]_{a}^{b} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

3. On a

$$\int_{1}^{2} (x^2 + \frac{1}{x}) \mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3} + \ln(x)]_{1}^{2} = \frac{7}{3} + \ln(2).$$

4. On a

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = [\sqrt{1+x^2}]_{0}^{\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1.$$

Exercice 29 a,e,f,g,h

Pour chaque primitive, on regarde si elle est directe ou s'y ramène par calcul algébrique, si c'est une somme de primitives directes, si on peut le faire par substitution ou par parties. On vérifie en dérivant le résultat.

29 a. On décompose en somme et multiples
$\int(\frac{x}{2}+x^2+\frac{x^3}{4})\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}+c, \quad c\in\mathbb{R}$

29 e. Directe : $\int\sqrt[3]{x^2}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+c=\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+c,\ c\in\mathbb{R}$

29 f. Presque directe (ou substitution) :
$\int\sin(kx)\mathrm{d}x=-\frac{\cos(kx)}{k}+c,\ c\in\mathbb{R}$

29 g. Ce n'est pas direct. Substitution ou parties ? On a une fonction composée dans $\int 2x\exp(x^2+1)\mathrm{d}x$
On pose $u=x^2+1$ et on obtient $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$.
On remplace et on calcule $\int\exp(u)\mathrm{d}u=e^u+c$.
On remplace u par x^2+1. Solution : $e^{(x^2+1)}+c$.

29 h. Même raisonnement. Dans $\int\cos(x)\sqrt{3+\sin(x)}\mathrm{d}x$, on pose $u=3+\sin(x)$.

Exercice 30 f,h, 32, 34

30 f. Calculer $\int_2^5 (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t$:

1. On calcule d'abord une primitive $\int (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t = \int t^2 - 3\,\mathrm{d}t$
2. On trouve directement $\int t^2 - 3\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 3t + c,\ c \in \mathbb{R}$.
3. On fait varier $\int_2^5 (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t = F(5) - F(2) = 30$

30 h. $\int_0^2 2xe^{(x^2)}\mathrm{d}x$

1. On calcule d'abord une primitive $F(x) = \int 2xe^{(x^2)}\mathrm{d}x$,
2. On trouve par substitution $F(x) = e^{(x^2)} + c,\ c \in \mathbb{R}$
3. On calcule $F((2) - F(0)$ (la constante disparaît) et on trouve $e^4 - 1$

32 Dériver les solutions proposées et voir celle qui donne $\ln(x)$. On peut aussi le faire par parties en dérivant $\ln(x)$ et en primitivant 1.

34 On applique plusieurs fois la règle de dérivation des fonctions composées.
On a $f(x) = (\cos(3x^2))^2$, donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\cos(3x^2))(\cos(3x^2))' = 2(\cos(3x^2))(-\sin(3x^2))(3x^2)' \\ &= 2(\cos(3x^2))(-\sin(3x^2))(6x) = -12x\cos(3x^2)\sin(3x^2). \end{aligned}$$

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Exercices 35, 37, 38

35 On cherche une information sur la croissance de f, on étudie donc le signe de sa dérivée : $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geqslant 0$.
Donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

37 On calcule d'abord une primitive de la fonction à intégrer :

$$F(x) = \int (1+\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x = \int 1+2\sqrt{x}+x\mathrm{d}x = x+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{x^2}{2}+c,\ c \in \mathbb{R}$$

On calcule $F(4) - F(1) = \frac{119}{6}$. Attention aux derniers calculs.

38 On cherche une information sur la croissance de F.
On étudie le signe de sa dérivée, qui est f. Elle est négative entre 1 et 2, positive ailleurs.
Donc f est décroissante sur $]1;2[$.