2. Equations du premier et second degré

Le but de ce chapitre est d'utiliser l'algèbre élémentaire pour résoudre des problèmes à l'aide d'équations. Il y a donc plusieurs compétences nécessaires : mettre un problème exprimé en français en équations, résoudre les équations qui en découlent, et ensuite interpréter la ou les solutions. Bien sûr, pour les problèmes élémentaires, le lecteur sceptique pourra se passer de l'algèbre et résoudre les problèmes en utilisant l'une ou l'autre astuce. Cependant, l'intérêt de l'utilisation de l'algèbre est de rendre systématique la solution à certains problèmes et à mettre en place des méthodes généralisables à des problèmes plus complexes. Je vous invite donc à laisser de côté les solutions astucieuses et à faire un peu d'algèbre.

1 Equations et équivalences

Pour fixer les notations, nous dirons qu'une *égalité* est une assertion de la forme

$$M_1 = M_2$$

où M_1 et M_2 sont des expressions formées à partir de nombres et d'opérations sur ces nombres. Les égalités peuvent, comme toutes les assertions, être soit vraies, soit fausses. Par exemple

$$3 \times 8 + 5 = 2 \times 8 + 13 \tag{1}$$

est une égalité vraie, tandis que

$$3 \times 7 + 5 = 2 \times 7 + 13$$

est une égalité fausse. On sera bien sûr plus intéressé par les égalités vraies.

L'expression M_1 est appelée *membre de gauche* ou *premier membre* de l'égalité, tandis que M_2 est le *membre de droite* ou le *second membre* de l'égalité. Donc dans l'égalité (1), le premier membre est $3 \times 8 + 5$ et le second $2 \times 8 + 13$.

Une *équation* est une égalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent d'un ou de plusieurs nombres inconnus. Ces nombres sont désignés par une lettre (x, ou y ou A, ou ξ ou ...). Ces nombres sont appelés *inconnues* ou *variables.*[a] L'équation est alors vraie ou fausse selon la ou les valeurs prise(s) par la ou les inconnue(s). Une *solution* est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'égalité, et résoudre l'équation consiste à déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions. Par exemple,

$$3\xi + 5 = 2\xi + 13 \tag{2}$$

est une équation. Le nombre 8 est solution de cette équation, tandis que le nombre 7 ne l'est pas, puisqu'en assignant à ξ la valeur 8, on obtient une égalité vraie (voir (1)), tandis qu'en le remplaçant par 7, on a une égalité fausse, comme nous l'avons vu plus haut.

Le principe de résolution des équations est basé sur la notion d'*équivalence* : on transforme l'équation donnée sans changer son ensemble de solutions, pour se ramener à une équation plus simple. Quand on a l'ensemble des solutions de cette dernière équation, on sait que c'est aussi l'ensemble des solutions de l'équation de départ, puisque cet ensemble n'a pas changé dans le processus de transformation. Ceci vaut bien une définition.

Définition 1.1. Deux équations sont *équivalentes* si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions. Si les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes, on note $(E_1) \Leftrightarrow (E_2)$. Si toutes les solutions de (E_1) sont solutions de (E_2), on notera alors $(E_1) \Rightarrow (E_2)$ et on dira que (E_1) implique (E_2).

---

a. En effet, ce nombre peut "varier", c'est-à-dire prendre n'importe quelle valeur, dans un certain ensemble de nombres. Je n'aime pas trop cette dénomination et j'emploierai dans la suite le terme inconnue.

A titre d'exemple élémentaire, échanger les deux membres d'une équation ne change pas l'ensemble des solutions. On a donc par exemple :

$$3x^2 + 2x + 7 = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 3x^2 + 2x + 7.$$

Outre cette opération d'échange, il y a deux façons simples d'obtenir des équivalences entre équations. Elles sont reprises dans la proposition suivante, qui sera fondamentale dans la suite.

Proposition 1.2. *En additionnant un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente. En multipliant les deux membres d'une équation par un nombre* non nul*, on obtient une équation équivalente.*

Démonstration. Traitons le cas d'une équation à une inconnue que nous noterons x (comme c'est souvent le cas). Insistons sur le fait que les membres de l'équation dépendent de x en l'écrivant

$$M_1(x) = M_2(x). \tag{3}$$

Si x_0 est solution de cette équation, alors $M_1(x_0) = M_2(x_0)$ est une égalité vraie. Quel que soit le nombre c, l'égalité $M_1(x_0) + c = M_2(x_0) + c$ est encore vraie, donc x_0 est solution de l'équation

$$M_1(x) + c = M_2(x) + c. \tag{4}$$

Réciproquement, si x_0 est solution de cette dernière équation, alors, en procédant de la même façon avec le nombre $-c$, on montre que x_0 est solution de l'équation $M_1(x) = M_2(x)$. Les ensembles de solutions sont donc égaux et les équations (3) et (4) équivalentes.

On fait de même pour la multiplication : si x_0 est une solution de (3), alors $M_1(x_0) = M_2(x_0)$ est une égalité vraie. Quel que soit le nombre c, l'égalité $c.M_1(x_0) = c.M_2(x_0)$ est encore vraie et x_0 est donc solution de

$$c.M_1(x) = c.M_2(x). \tag{5}$$

On a donc (3) $\Rightarrow$ (5). Pour voir que toute solution de (5) est aussi solution de (3), on fait de même en multipliant par $\frac{1}{c}$. Ce nombre existe *parce que* c est non nul et finalement on a (3) $\Leftrightarrow$ (5). □

Remarque 1.3. Dans le cas de la multiplication, l'hypothèse que le nombre multiplicateur soit non nul est fondamentale. On voit dans la preuve que si tel n'est pas le cas, on a seulement une implication entre les deux équations, ce qui signifie qu'on introduit éventuellement des solutions supplémentaires.

Il est important de noter que le nombre que l'on ajoute ou par lequel on multiplie peut dépendre de l'inconnue. Si on multiplie, il faudra alors discuter [b] les cas où ce nombre peut s'annuler. Traitons le cas de l'équation (2) : on a

$$\begin{array}{rcl} 3\xi + 5 & = & 2\xi + 13 \\ \Leftrightarrow 3\xi + 5 - 2\xi & = & 2\xi + 13 - 2\xi, \end{array}$$

puisqu'on a ajouté le nombre -2ξ aux deux membres. Après simlification, on a l'équation équivalente $\xi + 5 = 13$, et on ajoute -5 aux deux membres pour obtenir finalement la suite d'équivalences

$$\begin{array}{cccc} & 3\xi + 5 & = & 2\xi + 13 \\ \Leftrightarrow & 3\xi + 5 - 2\xi & = & 2\xi + 13 - 2\xi \\ \Leftrightarrow & \xi + 5 & = & 13 \\ \Leftrightarrow & \xi + 5 - 5 & = & 13 - 5 \\ \Leftrightarrow & \xi & = & 8. \end{array}$$

La dernière équation n'a qu'une solution (c'est-à-dire 8), donc la première aussi, puisqu'on a utilisé des équivalences à chaque étape. Bien sûr, avec l'habitude, on peut réaliser plusieurs opérations à la fois et simplifier directement pour écrire tout de suite

$$3\xi + 5 = 2\xi + 13 \Leftrightarrow 3\xi - 2\xi = 13 - 5 \Leftrightarrow \xi = 8.$$

b. Discuter veut dire ici considérer tous les cas possibles.

2 Equations du premier degré à une inconnue

L'équation la plus simple que l'on puisse trouver est l'équation du premier degré à coefficients et inconnues réels. Elle s'écrit

$$ax + b = 0, \tag{6}$$

où a et b sont des nombres réels donnés et où x est l'inconnue (on note classiquement x l'inconnue, mais on pourrait la noter autrement : l'équation $3y + 2 = 0$ où y est l'inconnue, est une équation du premier degré).

La question est de trouver le(s) nombre(s) réel(s) x qui satisfont cette condition. La solution éventuelle dépend des valeurs de a et de b et vous la connaissez bien.

En appliquant la proposition 1.2 à l'équation on obtient l'équivalence

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = 0 - b \Leftrightarrow ax = -b.$$

On a alors les cas suivants, en notant S l'ensemble des solutions :

1. Si $a \neq 0$, on multiplie les deux membres par $1/a$ (qui existe bien dans ce cas) et l'équation est équivalente à l'équation $x = -b/a$. On a donc
$$S = \{\frac{-b}{a}\}.$$
2. Si $a = 0$, alors l'équation devient $0x = b$, ou encore $0 = b$. Deux cas peuvent alors se produire.
   (a) si $b \neq 0$, l'équation n'admet pas de solution, elle est *impossible* ou *incompatible* et on note $S = \varnothing$.
   (b) si $b = 0$, alors l'équation est en fait $0 = 0$ et tout x est solution. On dit que l'équation est *indéterminée* et on note $S = \mathbb{R}$.

Exemple 2.1. Voici quelques équations du premier degré à une inconnue que vous pouvez résoudre, soit en utilisant la formule toute faite (qu'il faut connaître) soit en utilisant les manipulations algébriques sur les équations que nous venons de mettre en oeuvre.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (l'inconnue est x ou y, ou t)

1. $3x - 6 = 0$;
2. $\pi x - 7 = 3$;
3. $5y - 7 = 18$;
4. $0t = 17$;
5. $\frac{6y-4}{2} = 4y + 2 - (y - 3)$
6. $17x = 0$.

La méthode générale consiste donc à

1. Simplifier au maximum les deux membres de l'équation ;
2. Regrouper les termes contenant l'inconnue dans un seul membre ;
3. Isoler l'inconnue ou appliquer la formule ;
4. *Vérifier la solution dans l'équation de départ*.

2.1 Un mot sur les "transformations de formules"

Il arrive fréquemment en sciences et particulièrement en physique, que des "grandeurs mesurables" soient liées par une formule toujours vraie. Prenons par exemple la masse volumique. Par définition, on a

$$\rho = \frac{m}{V}$$

où ρ représente la masse volumique, m la masse et V le volume d'un corps (supposé non nul). Cette relation exprime ρ en fonction de m et V : chaque fois que l'on "mesure" ces trois grandeurs sur un même corps, elles doivent vérifier cette relation. La proposition 1.2 se généralise ici et permet de trouver des formulations équivalentes de cette relation : si on veut isoler V, on multiplie les deux membres de cette égalité par V et on obtient une égalité équivalente :

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow \rho V = \frac{m}{V}V \Leftrightarrow \rho V = m.$$

C'est possible de le faire puisque V est non nul. Si ρ est non nul, alors on divise par ρ les deux membres de l'égalité, pour obtenir une égalité équivalente :

$$\rho V = m \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\rho V = \frac{1}{\rho}m \Leftrightarrow V = \frac{m}{\rho}.$$

Remarque 2.2. Il est possible d'aller un peu plus vite en utilisant les propriétés des proportions, mais l'utilisation systématique d'une seule méthode générale me paraît plus intéressante que le recours aux cas particuliers.

Dans un problème particulier où on vous donnerait deux des trois quantités, et vous demanderait la troisième, vous pouvez toujours remplacer dans l'une des trois relations et vous ramener, à l'aide de la proposition 1.2, à une équation du premier degré. Il est cependant utile de pouvoir passer d'une relation à une relation équivalente en utilisant la proposition 1.2, comme nous venons de le faire, en gardant à l'esprit que les lettres y *représentent des nombres*.

Voici un autre exemple pour terminer cette section. Il s'agit encore d'un exemple tiré de la physique, où l'on calcule la résistance d'un circuit agencé en parallèle par la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cette formule, les lettres R, R_1 et R_2 représentent les mesures (que l'on suppose non nulles) que l'on peut faire des résistances, et représentent donc donc des nombres. Supposons que je veuille isoler R_1. J'identifie le “bloc” où se trouve R_1 et je tente de l'isoler, en retirant $\frac{1}{R_2}$ aux deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}.$$

C'est mieux, mais R_1 est au dénominateur. Je multiplie les deux membres par R_1 (car $R_1 \neq 0$) et j'obtiens [c]

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow 1 = R_1(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}) \tag{7}$$

Maintenant R_1 est au numérateur, donc il y a un mieux. Pour autant que $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \neq 0$, je peux diviser par ce nombre les deux membres de l'égalité pour obtenir

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}}, \tag{8}$$

qui après simplification donne

$$R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}.$$

Remarque 2.3. Pour le passage de (7) à (8), on a multiplié et divisé, pour appliquer encore la règle générale sur les équivalences, mais on pouvait aller plus vite, en notant que deux nombres non nuls sont égaux si et seulement si leurs inverses sont égaux (ce que l'on peut démontrer à partir de la règle générale).

Vous pourriez vous demander ce qui se passerait si on avait commencé par multiplier par R_1 : cela donnerait la même conclusion, avec des calculs un peu différents. Je vous suggère de le faire.

c. Remarquez l'emploi des parenthèses, parce qu'on multiplie tout le membre de l'équation et pas le premier terme.

3 Equations du second degré à une inconnue

Passons maintenant aux équations du second degré à une inconnue réelle. Ce sont des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{9}$$

où les nombres a, b, c sont donnés et réels, et où l'inconnue x est réelle. La fonction (le terme sera précisé ultérieurement) qui à tout x réel fait correspondre le nombre $ax^2 + bx + c$ est appelée fonction trinôme du second degré (si $a \neq 0$). La méthode classique pour étudier ce type d'équation est d'utiliser la formule dite du produit remarquable $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, et les équivalences présentées à la première section. Traitons d'abord quelques cas particuliers simples.

On sait comment résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 = 9. \tag{10}$$

En effet, nous avons déjà une solution de cette équation, celle qui est positive, à savoir $\sqrt{9} = 3$.[d] On peut donc écrire l'équation sous la forme équivalente

$$x^2 = 3^2$$

ou encore

$$x^2 - 3^2 = 0.$$

En utilisant les produits remarquables, l'équation et finalement équivalente à

$$(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Puisque dans l'ensemble des nombres réels, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, l'ensemble des solutions de (10) est donc la paire

$$S = \{-3; 3\}.$$

On voit tout de suite que ces considérations se généralisent pour traiter l'équation

$$x^2 = A. \tag{11}$$

En effet, en procédant comme plus haut, on obtient les trois cas suivants :

1. Pour tout $A > 0$, l'équation (11) admet deux solutions opposées $-\sqrt{A}$ et $\sqrt{A}$;
2. Pour $A = 0$ cette équation s'écrit $x^2 = 0$ et admet une solution dite double 0 ;
3. Pour tout $A < 0$, l'équation (11) n'admet pas de solution réelle, car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

On peut alors résoudre des équations plus compliquées en se ramenant à celle-ci. Par exemple, l'équation

$$3(x + 2)^2 - 21 = 0$$

est équivalente à

$$3(x + 2)^2 = 21$$

ou encore à

$$(x + 2)^2 = 7. \tag{12}$$

On peut alors résoudre cette équation pour obtenir la valeur du "bloc" $x + 2$ pour que x soit une solution. L'équation (12) est équivalente à

$$x + 2 = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x + 2 = -\sqrt{7}.$$

On a donc finalement les valeurs de x qui sont solutions de l'équation de départ en résolvant ces dernières équations du premier degré et on trouve $S = \{-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}\}$.

d. Et pas $\sqrt{9} = \pm 3$, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.

Puisqu'on a $3(x+2)^2 - 21 = 3x^2 + 12x - 9$, nous venons en fait de résoudre l'équation

$$3x^2 + 12x - 9 = 0.$$

La bonne nouvelle est qu'il n'y a pas d'équation du second degré plus compliquée que cela. En effet, on a toujours pour $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Alors l'équation générale du second degré (9) est équivalente à

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

ou encore à

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

qui est une généralisation de l'équation (12). On se ramène alors à la discussion sur le signe du second membre, comme pour l'équation (11). Il est d'usage de définir $\Delta = b^2 - 4ac$. C'est le *réalisant* (ou discriminant) de l'équation du second degré. L'ensemble des solutions vient alors des propriétés des racines carrées.

Proposition 3.1. *L'ensemble des solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du réalisant.*

1. *Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de solution ; on note $S = \varnothing$.*
2. *Si $\Delta = 0$: l'équation admet une solution unique : $S = \{\frac{-b}{2a}\}$. On dit que la solution $\frac{-b}{2a}$ est* double.
3. *Si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes : on a*

$$S = \{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\}.$$

De plus, si $\Delta > 0$, alors la somme des solutions vaut $\frac{-b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$.[e]

Démonstration. La discussion et la forme des solutions vient de la forme équivalente de l'équation : nous avons montré

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Cette dernière équation est facile à résoudre, comme nous l'avons également vu plus haut.

On obtient la somme des solutions directement à partir de leur forme explicite :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

On fait de même pour le produit :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}).(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

et le résultat est prouvé. □

e. Le résultat reste vrai si $\Delta = 0$ pour autant que l'on compte deux fois la racine double : on calcule la somme ou le produit de deux solutions égales à $-\frac{b}{2a}$.

Exemple 3.2. Soit à résoudre l'équation d'inconnue x suivante

$$-12x^2 + 8x - 1 = 0.$$

Calculons $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times (-12) \times (-1) = 16 > 0$. On a donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-24} = 1/2 \text{ et } x_2 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-24} = 1/6.$$

Exemple 3.3. Soit à résoudre l'équation du second degré suivante d'inconnue t :

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0.$$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 12 - 12 = 0$. On a donc une racine réelle double

$$t_1 = t_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Exemple 3.4. Déterminons les solutions réelles éventuelles de l'équation suivante où x est l'inconnue, et où a et b sont des nombres réels.

$$x^2 + (a + 2b)x + 2ab = 0.$$

Calculons le discriminant

$$\Delta = (a + 2b)^2 - 4 \times 1 \times 2ab = a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab = a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2 \geqslant 0.$$

Par suite on obtient deux solutions (éventuellement confondues) :

$$x_1 = \frac{-(a + 2b) - (a - 2b)}{2} = -a \text{ et } x_2 = \frac{-(a + 2b) + (a - 2b)}{2} = -2b$$

On aurait pu trouver directement ces solutions en observant que la question revient à déterminer deux nombres dont la somme est $-(a + 2b)$ et le produit $2ab$.

Terminons cette section par le rappel d'un résultat sur la factorisation du trinôme du second degré.

Proposition 3.5. *Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet les solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors le trinôme correspondant se factorise :*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Il suffit de calculer le produit dans le membre de droite et d'utiliser le résultat sur la somme et le produit des solutions : on a

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = ax^2 + bx + c,$$

ce qui prouve le résultat. □

Ce résultat sera important pour l'étude du signe du trinôme du second degré, que nous reverrons d'ici quelques pages.

4 Mise en équation et problèmes

La résolution de problème à l'aide de l'algèbre nécessite de pouvoir traduire un énoncé écrit en français en équations. Pour y arriver, il faut comprendre ce qui est inconnu dans l'énoncé, et faire un choix d'inconnue, que l'on représente par une lettre. Il est utile de prendre une lettre adaptée au problème et de ne pas se limiter au célèbre x des mathématiciens. On exprime alors les conditions du problème par des équations impliquant cette inconnue. Il peut également être utile de considérer plusieurs inconnues et d'exprimer les conditions qui les lient. Je vous conseille d'ajouter du texte pour donner du sens aux calculs que vous faites. Vous risquerez moins de vous y perdre et pourrez plus facilement les revoir si vous n'arrivez pas au bon résultat. Quelques exemples valent mieux ici qu'une grande théorie.

Exemple 4.1. Un père a quatre fois l'âge de son fils. Il y a trois ans, le produit de leurs âges était 145 ans^2. Quelle est la somme de leurs âges actuellement ?

1. Choix et dénomination des inconnues : appelons f l'âge actuel du fils et p l'âge actuel du père. Ce sont en effet les deux nombres inconnus du problème qui vont conduire à la solution.
2. Mise en équations :
   – Le père a quatre fois l'âge du fils, on a donc
   $$p = 4f \tag{13}$$
   – Il y a trois ans, l'âge du fils était $f-3$ et l'âge du père $p-3$. La deuxième condition de l'énoncé donne donc
   $$(f-3)(p-3) = 145.$$
   Cela semble donc être un problème à deux inconnues, mais tout s'exprime facilement en termes de l'âge du fils, puisqu'on peut remplacer dans cette condition p par $4f$. L'âge du fils f est donc une solution de l'équation
   $$(f-3)(4f-3) = 145.$$
3. Résolution de l'équation : on effectue le produit et on donne la forme habituelle à l'équation, cela donne
   $$(f-3)(4f-3) = 145 \Leftrightarrow 4f^2 - 15f + 9 = 145 \Leftrightarrow 4f^2 - 15f - 136 = 0$$
   On calcule $\Delta = 225 + 16 \times 136 = 2401 > 0$, et on a donc
   $$f_1 = \frac{15-\sqrt{2401}}{8} = -\frac{34}{8}, \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{15+\sqrt{2401}}{8} = 8.$$
   Puisqu'un âge doit être positif, on trouve $f = 8$, et en utilisant (13), on trouve $p = 32$.
4. Vérification : on a bien que l'âge du père vaut quatre fois l'âge du fils. Il y a trois ans, ils avaient 5 ans et 29 ans, et le produit dannait bien 145 ans^2.
5. Solution : la somme de leurs âges vaut $p + f = 40$.

Exemple 4.2. L'aire d'un terrain rectangulaire vaut 54 m^2. Lorsqu'on considère un champ carré dont le coté mesure la somme de la longueur et de la largeur du terrain rectangulaire, on obtient une aire de 225 m^2. Quel est le rapport (supérieur à 1) des dimensions de ce terrain ?

1. Choix des inconnues : Soient L la longueur et l la largeur du rectangle, mesurées en mètres.
2. Mise en équations : on a
   $$L \times l = 54$$
   en appliquant la formule de l'aire d'un rectangle. De même, la deuxième condition de l'énoncé donne
   $$(L+l)^2 = 225.$$
   On en déduit que $L+l$ est la racine carrée positive de 225, et on obtient $L+l = 15$. En remplaçant dans la première équation l par $15-L$, on trouve que L satisfait l'équation sont les solutions de l'équation du second degré : $L^2 - 15L + 54 = 0$.
3. Résolution de l'équation : On a $\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times 1 \times 54 = 225 - 216 = 9$. On obtient donc les solutions $L_1 = \frac{15-\sqrt{9}}{2} = \frac{15-3}{2} = 6$ et $L_2 = \frac{15+\sqrt{9}}{2} = 9$. On obtient donc $L = 9m$ et $l = 6m$, ou le contraire, et le rapport demandé est
   $$\frac{9}{6} = \frac{3}{2} > 1.$$

En voici un autre exemple tout à fait semblable au premier.

Exemple 4.3. Une mère à trois fois l'âge de son fils. Il y a six ans, le produit de leurs âges était 96ans^2. Quelle est la différence (positive) de leurs âges ?

Voici un plus simple, donnant lieu à une équation du premier degré.

Exemple 4.4. Un père a 21 ans de plus que son fils. Il y a quatre ans, le père était quatre fois plus âgé que le fils. Quelle est la somme de leurs âges ?

5 Les inéquations

Les inéquations peuvent être résolues de manière semblable aux équations, en travaillant par équivalences. Il y a cependant une différence fondamentale : on ne peut pas multiplier les deux membres d'une inéquation par un même nombre et obtenir une inéquation équivalente. Commençons par un bref rappel des définitions. Elles sont semblables à celles des sections précédentes. Nous nous limiterons aux inéquations du premier et du second degré.

Une *inégalité* est une assertion de la forme

$$M_1 \leqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 \geqslant M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 < M_2 \quad \text{ou} \quad M_1 > M_2.$$

où M_1 et M_2 sont des expressions formées à partir de nombres et d'opérations sur ces nombres. Elles peuvent être soit vraies, soit fausses. Les deux premiers types sont appelées inégalités larges, tandis que les deux autres sont appelées inégalités strictes. Dans tous les cas ci-dessus, M_1 est appelé membre de gauche ou premier membre et M_2 membre de droite ou second membre. Une *inéquation* est une inégalité dans laquelle l'un des deux membres ou les deux dépendent d'un ou de plusieurs nombres inconnus (les inconnues). Une *solution* de l'inéquation est une valeur prise par la ou les inconnue(s) qui rend vraie l'inégalité considérée, et résoudre l'inéquation consiste à déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions. Deux inéquations sont *équivalentes* si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions. Ici encore, il est clair qu'on peut se limiter à deux cas sur les quatre présentés plus haut : en effet, l'inéquation $M_1 \geqslant M_2$ est clairement équivalente à l'inéquation $M_2 \geqslant M_1$ et le même constat vaut pour les inégalités strictes. Le résultat sur les équivalences est semblable à celui établi pour les équations, mais il est utile de se focaliser sur les différences.

Proposition 5.1. *En additionnant un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on obtient une équation équivalente.*

En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement positif*, on obtient une inéquation équivalente.*

En multipliant les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif, tout en changeant le sens du signe d'inégalité*, on obtient une inéquation équivalente.*

La démonstration suit les mêmes lignes que celle de la proposition correspondante sur les équations. Donnons un exemple élémentaire sur les inégalités : l'inégalité $-3 < 6$ est vraie. En multipliant les deux membres par 2, par exemple, on obtient $-6 < 12$, qui est encore vraie. Par contre, en multipliant les deux membres par -1 (sans changement de sens de l'inégalité) on obtient $3 < -6$, qui est fausse, tandis que $3 > -6$ (on a changé le sens du signe d'inégalité) est vraie.

Il est donc délicat de multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre. Il faut s'assurer que le nombre par lequel on multiple est positif. Dans la suite, on se contentera d'utiliser la première partie de l'énoncé pour se ramener à une étude du signe : l'inéquation

$$M_1 \leqslant M_2$$

est, vu la proposition ci-dessus, équivalente à

$$M_2 - M_1 \geqslant 0.$$

On est donc ramené à l'étude du signe de $M_2 - M_1$. L'idée est alors, lorsqu'il s'agit d'une expression algébrique simple, de la factoriser, et d'étudier le signe de chacun des facteurs, enfin, on utilise la fameuse règle "moins par moins donne plus" et "moins par plus donne moins".

Exemple 5.2. Déterminer les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$.

L'erreur classique consiste à procéder brutalement, comme si on était en présence d'une équation, et à dire que pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $3 \leqslant x$. On obtient alors l'ensemble de solutions $S = [3, +\infty[$.

C'est faux, parce que pour "faire passer" x dans le membre de droite, on a en fait multiplié par $3x$, qui est éventuellement négatif. Il est donc plus sage, pour ne pas avoir à distinguer les cas, d'écrire

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \leqslant 0.$$

On est alors amené à étudier le signe d'une expression simple et on trouve, comme nous allons le revoir $S =]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$.

5.1 Inéquations du premier degré

Les inéquations du premier degré sont de la forme

$$ax + b > 0 \text{ ou } ax + b < 0 \text{ ou } ax + b \leqslant 0 \text{ ou } ax + b \geqslant 0,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$. Ces inéquations se traitent toutes de la même manière. Nous considérons la première. Elle est équivalente à

$$ax > -b, \tag{14}$$

en ajoutant aux deux membres le réel $-b$. La suite de la résolution dépend du signe de a, en vertu de la proposition 5.1. On discute donc selon le signe de a :

- **Cas 1** : $a > 0$.
  On peut diviser les deux membres de l'inéquation par a (qui est strictement positif) pour obtenir que (14) est équivalente à
  $$x > -\frac{b}{a}.$$
  On note donc $S =]-\frac{b}{a}, +\infty[$.
- **Cas 2** : $a < 0$. On peut diviser les deux membres de l'inéquation par a (qui est strictement négatif) pour obtenir que (14) est équivalente à
  $$x < -\frac{b}{a}.$$
  On note donc $S =]-\infty, -\frac{b}{a}[$.

Nous venons de déterminer tous les nombres x satisfaisant $ax + b > 0$. Dans la section précédente, nous avons résolu l'équation associée, à savoir $ax + b = 0$ et trouvé que l'unique solution est $x = -\frac{b}{a}$. Nous avons donc aussi déterminé tous les x satisfaisant $ax + b < 0$: ce sont les autres. EN d'autres termes, nous venons d'étudier le signe du binôme du premier degré $ax + b$.

On peut retenir que ce binôme s'annule (sous l'hypothèse $a \neq 0$) en $x_0 = -\frac{b}{a}$. Celle valeur détermine deux régions de la droite réelle, et le binôme garde "un signe constant" sur chacune de ces régions. Ce signe dépend du signe de a comme nous l'avons vu.

On peut dans un premier temps scinder en deux cas distincts, comme nous l'avons fait plus haut, et donner l'information sous forme d'un tableau de signes, qui découle directement de la résolution de l'inéquation $ax + b > 0$.

- **Cas 1** : $a > 0$. Le signe de l'expression $ax + b$ en fonction de x est donné apr le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

- **Cas 2** : $a < 0$. Le signe de l'expression $ax + b$ en fonction de x est donné apr le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

On constate que l'on peut résumer ces deux tableaux en un seul :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

Enfin, si on a oublié la règle donnant le signe, on peut choisir un point dans une des régions et déterminer le signe de $ax + b$ en ce point, sachant que ce sera le signe de cette expression dans toute la région.

Exemple 5.3. Soit à résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$

$$2x - 7 \geqslant 0.$$

L'équation associée a pour racine $x = 7/2$. On a donc le tableau de signe ci-après

x	$-\infty$	$7/2$	$+\infty$
$2x-7$	$-$	0	$+$

Vu le sens de l'inégalité, on retient comme ensemble des solutions $S = [7/2, +\infty[$, l'intervalle est fermé à gauche car l'inégalité est large.

Exemple 5.4. Soit à déterminer les solutions de l'inéquation

$$\frac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4} < 0.$$

Les réels qui annulent les binômes constituant l'inéquation sont $\sqrt{3}$ pour $x-\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$ pour $-4x+2$ et pour le dénominateur $2x+4$, le nombre -2. On a le tableau suivant

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-4x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-\sqrt{3})(-4x+2)}{2x+4}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

On a donc comme ensemble des solutions $S =]-2, \frac{1}{2}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

5.2 Inéquations du second degré

Nous avons établi précédemment la factorisation des trinômes du second degré ax^2+bx+c, en fonction des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, encore appelées *racines* du trinôme. On a

$$ax^2+bx+c = \begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) & \text{si } \Delta > 0 \\ a(x+\frac{b}{2a})^2 & \text{si } \Delta = 0 \\ a\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{\Delta}{4a^2}\right) & \text{si } \Delta < 0, \end{cases}$$

où dans le premier cas, x_1 et x_2 sont les racines (distinctes) du trinôme. Par conséquent, on a les tableaux d'étude de signe suivants selon les cas.

1. **Cas 1** : $\Delta > 0$. On va supposer que $x_1 < x_2$. On a alors

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a		signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Dans la pratique, on passe directement à la dernière ligne qu'on mémorise par : « entre les racines, signe de $-a$ et à l'extérieur, celui de a. »

2. **Cas 2** : $\Delta = 0$. On établit dans ce cas le tableau suivant

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
a	signe de a		signe de a
$(x-x_1)^2$	$+$	0	$+$
$a(x-x_1)^2$	signe de a	0	signe de a

3. **Cas 3** : $\Delta < 0$. On retient la dernière ligne du tableau suivant

x	$-\infty$ $+\infty$
a	signe de a
$\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{\Delta}{4a^2}\right)$	$+$
$a\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{\Delta}{4a^2}\right)$	signe de a

Dans la pratique, les trois cas peuvent se résumer en une seule formule :

le trinôme du second degré ax^2+bx+c a le même signe que a dans la région extérieure aux racines du trinôme.

Exemple 5.5. Soit à résoudre l'inéquation suivante

$$-x^2+5x-6 < 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 25-24 = 1$ et les racines du trinôme sont 2 et 3. On a donc le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$-x^2+5x-6$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions est alors $S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

6 Proportionnalité

Passons en revue ici les définitions et propriétés des grandeurs ou quantités directement ou inversement proportionnelles. Les premières donneront lieu aux règles de trois comme on disait il y a bien longtemps, qui sont utilisées un peu partout, que ce soit dans la vie de tous les jours, ou dans la vie professionnelle.

6.1 Grandeurs directement proportionnelles

"*Si six scies scient six cigares, six cent six scies scient six cent six cigares*". Dans cette célèbre phrase, le nombre de cigares sciés dépend du nombre de scies de manière directement proportionnelle : si on multiplie le nombre de scies par 101 (pour passer de 6 à 606), alors le nombre de cigares sciés est multiplié de la même façon. Voici un autre exemple.

Exemple 6.1. Je suis allé au bar du chapiteau et j'ai acheté (en hurlant) 7 bières. Cela m'a coûté 10 euro 50 cents. Si j'achète 14 bières, cela me coûtera 21 euros (on suppose qu'il n'y a pas de ristourne pour grosses quantités). Ici le prix total à payer est directement proportionnel au nombre de bières. Si on en commande 10 fois plus, on paiera 10 fois plus.
Question : quel prix paiera-t-on pour 10 bières ?
Réponse : puisque le prix est directement proportionnel au nombre de bières, une bière coûte 7 fois moins que 7 bières, et 10 bières coûtent 10 fois plus cher qu'une bière. [f]

1. On a que 7 bières coûtent $10,5$€ ;
2. Donc une bière coûte $\frac{10,5€}{7} = 1,5$€ ;
3. Donc 10 bières coûtent 15€.

Ceci est une règle de trois. Vous pouvez remarquer que je n'utilise pas beaucoup de symboles mathématiques, mais plutôt des phrases pour résoudre ce problème. Cela permet de ne pas se perdre.

On peut aussi écrire ce procédé dans un tableau, dit tableau de proportionnalité, dont la signification me semble claire.

$:7$ $\qquad \cdot 10$

Nombre de bières	7	1	10	21
Prix total	$10,5$	$1,5$	15	$1,5 \times 21$

$:7$ $\qquad \cdot 10$

Attention : j'écris ce tableau parce qu'il me sera utile dans la suite, mais quand vous êtes sous le chapiteau, au bar, il vaut mieux connaître le procédé de la règle de trois, sinon vous risquez de payer un prix aléatoire pour vos bières.

Encore un exemple pour la route.

Exemple 6.2. Question : je vais à la mer en voiture et je roule à vitesse constante entre Liège et Bruxelles. Sur les trois dernières minutes, j'ai parcouru 6,6 km. Combien de kilomètres vais-je parcourir d'ici 5 minutes ?

Réponse : le nombre de kilomètres parcourus est directement proportionnel au nombre de minutes écoulées (au temps écoulé), car la vitesse est constante : si je roule 10 fois plus longtemps, je parcours 10 fois plus de kilomètres. On peut donc faire le même raisonnement que plus haut :

1. On sait qu'en 3 minutes, on parcourt $6,6$ km ;
2. Donc en 1 minute, on parcourt $\frac{6,6\text{km}}{3} = 2,2$km ;
3. Donc en 5 minutes, on parcourt $5.2,2\text{km} = 11\text{km}$.

On peut aussi écrire le tableau suivant (une fois que l'on s'est arrêté).

f. Vous avez remarqué que j'ai adapté les exemples que l'on donne d'habitude aux enfants. Ceux d'entre vous qui n'aiment pas la bière adapteront en remplaçant pas un autre liquide.

Minutes écoulées	3	1	5	t
Kilomètres parcourus	$6,6$	$2,2$	11	$2,2 \times t$

Ici t est une mesure quelconque du temps écoulé, exprimé en minutes.

Essayons maintenant de formaliser cette notion de dépendance directement proportionnelle, et ce que nous avons fait pour résoudre ce problème de bières. Cette définition n'est pas parfaitement formulée du point de vue mathématique, mais elle devrait vous permettre de repérer des grandeurs (ou variables ou quantités) directement proportionnelles.

Définition 6.3. Deux grandeurs (quantités mesurables, variables) sont directement proportionnelles si, quand la mesure de la première est multipliée par une constante C, alors la mesure de la deuxième est aussi multipliée par la même constante C.

Par exemple, le prix total que je paie au bar est directement proportionnel au nombre de bières que j'emporte. Si je prends deux fois plus de bières, je paie deux fois plus, si je prends 20 fois plus de bières, je paie 20 fois plus, etc... Evidemment, puisqu'une division est une multiplication déguisée, si on prend 20 fois moins de bières, alors on paie 20 fois moins.

Voici maintenant un critère qui permet d'exprimer une des quantités directement proportionnelles *en fonction* de l'autre. Dans les exemples précédents, c'est assez clair.

Proposition 6.4. *Une grandeur (une variable) est directement proportionnelle à une autre si, et seulement si, il existe une constante réelle k telle que toute mesure de la première est obtenue en multipliant la mesure correspondante de la deuxième par k. Le coefficient k est appelé* coefficient de proportionnalité *(de la première variable en fonction de la deuxième variable).*

Démonstration. Supposons que la deuxième variable soit directement proportionnelle à la première. On peut regarder le tableau de proportionnalité que nous avons écrit dans les exemples précédents.[g] Quelle que soit la mesure x_0 de la première variable, nous avons

Mesures de var 1	$\cdots$	1	$\cdots$	x_0
Mesures de var 2	$\cdots$	k	$\cdots$	$k \times x_0$

On constate que la mesure de la seconde variable est toujours obtenue en multipliant la valeur de la première par k. Inversement, supposons que deux variables satisfont les conditions de l'énoncé, alors on a

Mesures de x	x_0	$\cdots$	Cx_0
Mesures de y	$k \times x_0$	$\cdots$	$k \times (C \times x_0)$

On obtient le résultat demandé, puisque $k(Cx_0) = C(kx_0)$, vu l'associativité et la commutativité de la multiplication. □

g. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous supposons que la mesure de la variable x peut valoir 1, ce n'est pas une restriction.

Il est très important de remarquer que le coefficient de proportionnalité a généralement, dans toutes les utilisations scientifiques possibles, une interprétation très utile au problème. Dans l'exemple 6.1, le coefficient de proportionnalité est le prix par verre, exprimé en euros (par verres) tandis que dans l'exemple 6.2, il s'agit de la vitesse moyenne, exprimée en km/h.