



Cours préparatoire de Mathématique
Sciences de la santé
Géométrie et trigonométrie

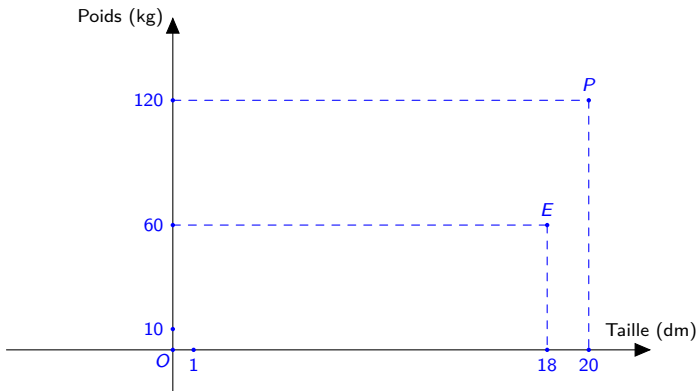
Pierre Mathonet

Département de Mathématique
Faculté des Sciences

Liège, les 14 et 16 Août 2019

Distance ou pas distance

Voici une situation classique en sciences :



Quelle est la distance entre le point P représentant le professeur et le point E représentant l'étudiant de corpulence moyenne? Quelle est la norme du vecteur \overrightarrow{EP} ? Quelles sont ses unités?

Définitions élémentaires

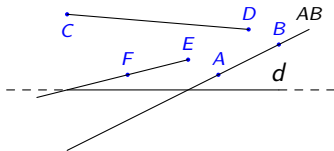
Les définitions données sont en général valables en géométrie plane, ou en géométrie dans l'espace. Quand une propriété n'est vraie qu'en géométrie plane, on avertit en indiquant "Dans le plan...".

Les objets élémentaires : point, droite, plan, demi-droite, segment

Postulat 1 p.25

Par deux points distincts A et B , il passe une et une seule droite. Cette droite est notée AB . Par trois points A, B, C de l'espace, non alignés (non sur une même droite), il passe un et un seul plan. On le note ABC .

Représentation : des droites d et AB , un segment $[C, D]$, une demi-droite $[E, F$:



Parallélisme, postulat et conséquences

Définition 2.1.1 p.26

Dans le plan, deux droites d_1 et d_2 dont l'intersection est un singleton $\{I\}$ sont dites sécantes (au point I). Dans le cas contraire, elles sont dites parallèles, et on note $d_1 // d_2$.

Attention : quand les droites d_1 et d_2 sont égales, elles sont parallèles.

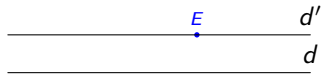
Postulat 2 p.26 (Euclide)

Par un point (extérieur) à une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite.

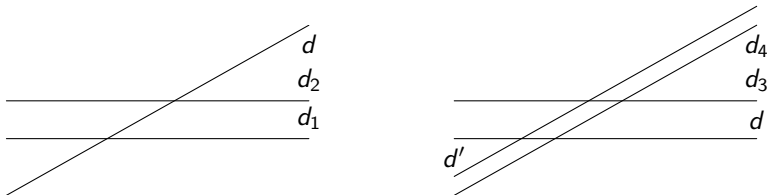
Proposition 2.1.1 p.26 (un peu raccourcie)

- Dans le plan, si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles, alors toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.
- Dans le plan, si deux droites d_3 et d_4 sont sécantes, toute parallèle à l'une est sécante à l'autre.

Représentations :

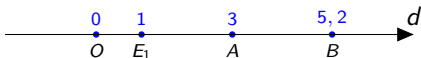


et

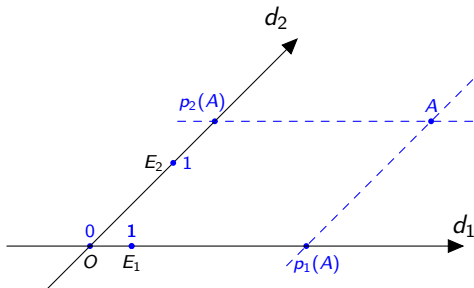


Repères et coordonnées cartésiennes du plan

On a une correspondance entre les points de “la droite” et les nombres réels, si on fixe l’origine et une unité.



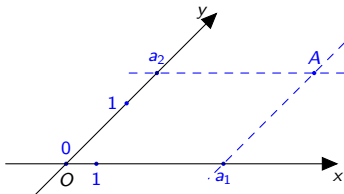
La notion de repère cartésien du plan prolonge cette idée :



On associe un nombre réel a_1 à $p_1(A)$ et un nombre a_2 à $p_2(A)$. Ainsi au point A correspond un couple de nombres (a_1, a_2) .

Définitions

- Le couple (a_1, a_2) formé par l'abscisse et l'ordonnée d'un point A est le couple de *coordonnées* de A dans le repère donné.
- Par habitude, on note x l'abscisse et y l'ordonnée d'un point du plan. On note aussi x le premier axe du repère et y le second.
- L'association point du plan – couple de coordonnées est une bijection (on dit aussi “correspondance biunivoque”) :
 - deux points distincts ont des coordonnées distinctes ;
 - tout couple de nombres réels (a_1, a_2) est le couple de coordonnées d'un point A .



Cette bijection permet de **représenter de manière géométrique** une situation où il n'y a que des nombres, et de **traiter de manière algébrique** une situation géométrique.

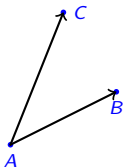
Vecteurs liés : définition géométrique

Les définitions suivantes sont valides dans le plan ou dans l'espace.

Définition 2.2.1 p. 27

Un vecteur lié en un point A est un couple (A, B) . De manière équivalente, il est défini par un segment orienté de A vers B . On le représente par une flèche de A à B .

Deux vecteurs liés en A .

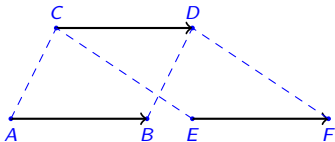


En physique, le vecteur lié en A peut représenter une **force** qui s'applique en A .

Equipollence et vecteurs libres

Définition 2.2.2 p. 28

Des vecteurs (A, B) et (C, D) liés en A et en C sont équipollents si $ABDC$ est un parallélogramme, ou s'ils sont équipollents à un même troisième. On note alors $(A, B) \uparrow (C, D)$.



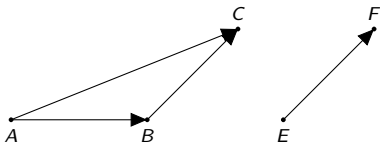
Remarque : on n'a pas ici $(A, B) \uparrow (D, C)$: l'ordre a de l'importance.

Définition 2.2.3 p.28

Un vecteur libre est un ensemble de vecteurs liés équipollents entre eux. Chacun de ces vecteurs liés est un **représentant** du vecteur libre en question. On note aussi \overrightarrow{AB} le vecteur libre représenté par (A, B) .

Opérations sur les vecteurs (libres)

- **L'Addition** : on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (c'est la relation de Chasles). Cette définition est *indépendante du représentant du vecteur*. Dans la figure suivante, on a donc aussi $\vec{AB} + \vec{EF} = \vec{AC}$, si $\vec{EF} = \vec{BC}$.



- L'addition est associative et suit la règle du parallélogramme ;
- Le vecteur (libre) \vec{AA} est neutre pour l'addition. On le note $\vec{0}$. C'est le vecteur nul.
- Alors l'opposé du vecteur \vec{AB} est \vec{BA} . On le note aussi $-\vec{AB}$.
- On définit alors la soustraction $\vec{u} - \vec{v}$ de deux vecteurs par

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

- On peut définir la **multiplication** des vecteurs par les nombres, d'abord les entiers, puis les rationnels (Thm de Thalès), et les réels.
- L'addition et la multiplication ont les propriétés habituelles.

Combinaisons linéaires, milieu, centre de gravité

En combinant les deux opérations, on peut former des multiples et des sommes de plusieurs vecteurs (des combinaisons linéaires) Les règles de priorité concernant les additions, multiplications et parenthèses sont celles déjà rencontrées.

Définition 2.2.4 p.29

Soit $[A, B]$ un segment de droite. Le milieu de $[A, B]$ est l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Soient A, B, C trois points du plan (non alignés), le centre de gravité du triangle ABC est le point, noté G , tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Composantes de vecteurs associées à un repère

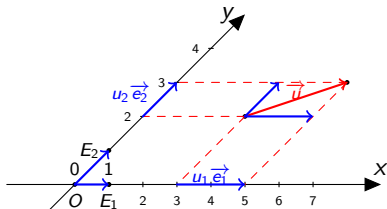
On considère un repère, déterminé par trois points O, E_1, E_2 . On note $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$.

Proposition 2.2.1 p.29

Tout vecteur (libre) \vec{u} se décompose de manière unique comme

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2,$$

où u_1, u_2 sont des nombres réels. On note $\vec{u} : (u_1, u_2)$. Ce sont les *composantes* de \vec{u} dans le repère.



Remarques : (a) Le couple (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est la base associée au repère. (b) En physique, on dit parfois que l'on projette le vecteur sur les axes.

Composantes de combinaisons linéaires

Proposition 2.2.2 p.29

Si $\vec{u} : (u_1, u_2)$, $\vec{v} : (v_1, v_2)$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} : (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \quad \text{et} \quad r\vec{u} : (ru_1, ru_2).$$

En particulier pour tous $r, s \in \mathbb{R}$,

$$r\vec{u} + s\vec{v} : (ru_1 + sv_1, ru_2 + sv_2).$$

Remarque : On définit l'addition des couples de réels et la multiplication des couples par des nombres :

Addition : $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Multiplication : $r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$. On peut alors dire :

Proposition 2.2.3 p.29

Les composantes d'une combinaison linéaire de vecteurs sont obtenues en prenant la combinaison correspondante des composantes.

Lien avec les coordonnées

Soit un repère cartésien défini par O , E_1 et E_2 . Vu la définition des composantes et des coordonnées, on a le lien suivant.

Proposition 2.2.4 p.29

Pour tout point A du plan, les coordonnées de A dans un repère sont les composantes de \overrightarrow{OA} dans ce repère.

Si B est un autre point du plan, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, ou

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Proposition 2.2.5 p.29

Dans un repère, si $A : (a_1, a_2)$ et si $B : (b_1, b_2)$, alors

$$\overrightarrow{AB} : (b_1, b_2) - (a_1, a_2).$$

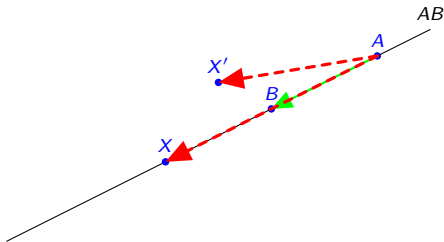
Exercices

- Exercice 1 p.42
- Exercices 26, 27 p.44
- A faire chez vous : exercice 28 p.44

Equations de droites dans le plan

- Données : une droite, et un repère cartésien du plan, donné par O, E_1 , et E_2 (ou O, \vec{e}_1 et \vec{e}_2).
- **But 1** : déterminer des coordonnées de certains points de la droite (**équation paramétrique**);
- **But 2** : étant donné un point X du plan, déterminer si oui ou non il appartient à la droite (**une équation cartésienne**), au moyen d'une relation simple à vérifier sur les coordonnées de X .

L'idée se voit :



Donc on a $X \in AB$ si, et seulement si, \vec{AX} est multiple de \vec{AB} .

Equations paramétriques de AB

D'après ce que nous avons vu, si dans le repère déterminé par O, E_1 et E_2 , on a $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$ (avec $A \neq B$) alors on a toujours

$$X \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AX} = r\overrightarrow{AB}.$$

C'est une **équation paramétrique vectorielle** de AB .

En termes des coordonnées de X , on a toujours

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - a_1 & = & r(b_1 - a_1) \\ y - a_2 & = & r(b_2 - a_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce sont **des équations paramétriques cartésiennes** de AB .

Exemple : Ecrire des équations paramétriques cartésiennes de la droite contenant $A : (2, 4)$ et $B : (-2, 5)$.

Question 1 : Donner les coordonnées d'un autre point de AB .

Question 2 : Le point $C : (10, 3)$ appartient-il à AB ?

Equations cartésiennes de AB

Pour obtenir une équation cartésienne de AB , il suffit d'exprimer la condition

(2.1). Trois cas peuvent se produire :

- $b_1 - a_1 \neq 0, b_2 - a_2 \neq 0$: alors

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}. \quad (2.2)$$

- $b_1 = a_1, b_2 - a_2 \neq 0$: alors AB est parallèle à l'axe y et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow x - a_1 = 0. \quad (2.3)$$

- $b_1 - a_1 \neq 0, b_2 = a_2$: alors AB est parallèle à l'axe x et

$$X : (x, y) \in AB \Leftrightarrow y - a_2 = 0. \quad (2.4)$$

En résumé : on applique le cas général (2.2), et quand un dénominateur s'annule, on remplace l'équation par l'annulation du numérateur correspondant.

Ou encore :

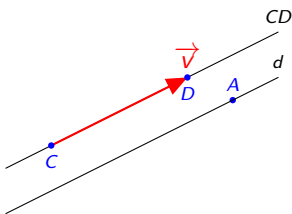
$$AB \equiv (b_2 - a_2)(x - a_1) = (b_1 - a_1)(y - a_2).$$

ou si $b_1 \neq a_1$,

$$AB \equiv y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1).$$

Droite donnée par un point et un vecteur directeur

- On se donne un vecteur libre \vec{v} non nul : $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ avec $C \neq D$.
- On se donne un point A .
- Il existe une seule droite d parallèle à CD et passant par A .



- On a $X \in d$ si, et seulement si, \overrightarrow{AX} est multiple de \vec{v} .
- On remplace donc \overrightarrow{AB} par \vec{v} dans les développements précédents.

Equation générale d'une droite

- Toute droite admet une équation du type

$$ax + by + c = 0,$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$;

- **Réciproque** : l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une telle équation est une droite :
 - a) Si $b \neq 0$, on vérifie que c'est la droite AB où $A : (0, -\frac{c}{b})$ et $B : (1, -\frac{a+c}{b})$.
 - b) Si $b = 0$, on vérifie que c'est la droite AB où $A : (-\frac{c}{a}, 0)$ et $B : (-\frac{c}{a}, 1)$.
 - Dans les deux cas, un vecteur directeur est donné par $(-b, a)$.
 - Si $b \neq 0$, la pente d'une telle droite est donnée par $-\frac{a}{b}$.
 - Si $b \neq 0$, l'équation est équivalente à $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
 - On retrouve donc l'équation sous la forme $y = mx + p$.

Pente et vecteur directeur, parallélisme

- Pour la droite d'équation $y = mx + p$, le nombre m est appelé **pente**, le nombre p est l'**ordonnée à l'origine**.
- La pente de AB est donnée par $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$, si $b_1 \neq a_1$.
- Si \vec{v} est un vecteur directeur, alors la pente est $m = \frac{v_2}{v_1}$, si $v_1 \neq 0$.

Proposition 2.3.1 p.31

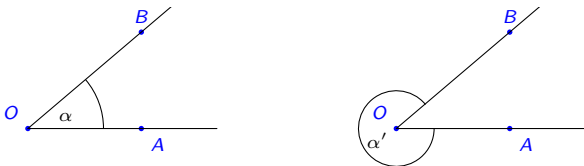
- Deux droites sont parallèles ssi elles admettent les mêmes ensembles de vecteurs directeurs.
- Deux droites admettant des pentes m et m' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Si $d \equiv ax + by + c = 0$, toute parallèle d' à d admet une équation du type $d' \equiv ax + by + c' = 0$, ou un multiple non nul de cette équation (membre à membre).

Exercices

- Exercices 2,3 p.42
- A faire : Ex 4 p.43 (Attention, l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$).

Géométrie métrique : Angles non orientés du plan

- Dans le plan, un angle (non orienté) est une portion de plan déterminée par deux demi-droites de même origine :



Il y en a deux, et on doit préciser lequel on considère, généralement en dessinant un arc de cercle.

- L'angle (non orienté) est indépendant de l'ordre dans lequel on précise les demi-droites et se mesure en degrés.
- Cas particuliers : angle nul, plein, plat, ou droit.

Angles non orientés, compléments

Quelques angles non orientés :

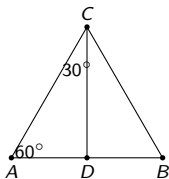


FIGURE – Un triangle équilatéral et des angles de 60° et 30° .

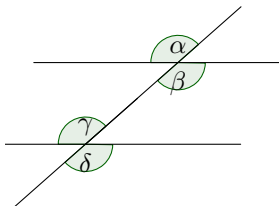


FIGURE – Des angles égaux déterminés par une sécante sur des parallèles.

P. Mathonet, Université de Liège, Faculté des Sciences, Département de Mathématique.

Quelques résultats

Proposition 2.4.1 p.32

Une sécante détermine avec deux droites parallèles des angles opposés par le sommet, alternes internes, correspondants et alternes externes de même amplitude.

Proposition 2.4.2 p.32

Des angles à côtés parallèles sont soit égaux, soit supplémentaires. Des angles à côtés perpendiculaires sont soit égaux, soit supplémentaires.

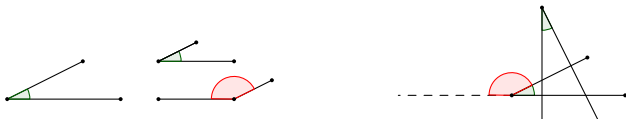


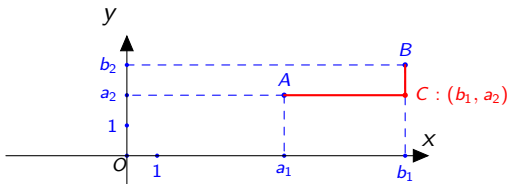
FIGURE – Des angles à côtés parallèles et perpendiculaires

Géométrie euclidienne : distances

- En géométrie, la distance entre deux points A et B dans le plan ou dans l'espace est mesurée avec une latte graduée. Elle s'exprime en cm, m, ... On la note $d(A, B)$ ou encore \overline{AB} .
- On a le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en C on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

- En géométrie, un repère orthonormé du plan est un repère où les axes sont perpendiculaires et où les points E_1, E_2 sont à la même distance de O .



Les longueurs des segments $[A, C]$ et $[C, B]$ sont données par $|b_1 - a_1|$ et $|b_2 - a_2|$ respectivement.

Calcul de la distance dans un repère orthonormé

Proposition 2.4.3 p.33

Dans un repère orthonormé du plan, la distance du point A ayant pour coordonnées (a_1, a_2) au point B ayant pour coordonnées (b_1, b_2) est donnée par

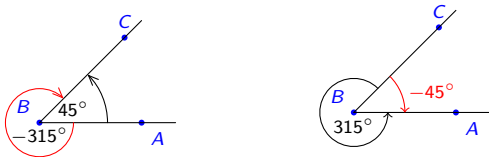
$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \quad (0.1)$$

- Le nombre calculé via (0.1) est appelé longueur ou norme du vecteur \overrightarrow{AB} . On la note $|\overrightarrow{AB}|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- En sciences, on parle uniquement de norme. Si \vec{v} modélise une force, alors sa norme est son intensité.
- Un vecteur non nul est alors caractérisé par
 - ① sa direction (une droite dont c'est un vecteur directeur);
 - ② sa norme;
 - ③ son sens.

Exercice : Exercice 5 p.43.

Angles orientés du plan, angles de vecteurs

- Dans le plan, on a deux sens de rotation :
 - ① Le sens trigonométrique positif, opposé à celui des aiguilles de la montre (selon le repère habituel) ;
 - ② Le sens trigonométrique négatif : celui des aiguilles de la montre.

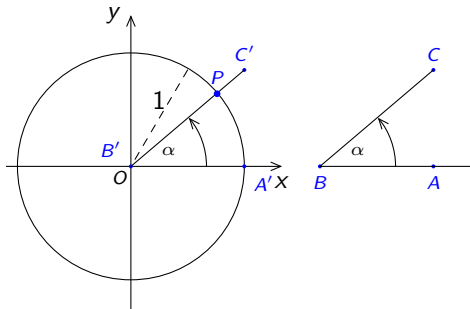


L'angle \widehat{ABC} vaut 45 degrés. L'angle \widehat{CBA} vaut 315 degrés (ou -45 degrés).

- L'angle non orienté de deux vecteurs libres \vec{u} et \vec{v} est obtenu en liant ces vecteurs en un point O . On obtient deux demi-droites et donc deux angles non orientés. Par définition, l'angle de \vec{u} et \vec{v} est le plus petit des deux. Il est entre 0 et 180 degrés. On fait de même pour définir l'angle orienté de \vec{u} et \vec{v} ,

Le cercle trigonométrique I

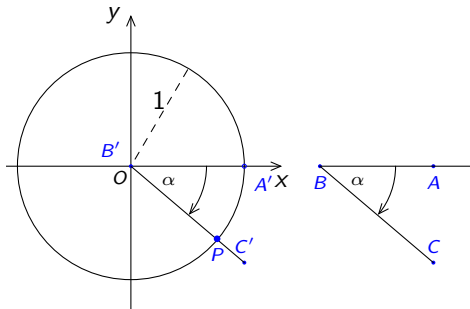
- On se donne un système d'axes orthonormés du plan, d'origine O et d'axes (gradués) x et y ;
- Le cercle *trigonométrique* est cercle **de rayon 1**, centré à l'origine O ;



Tout angle orienté \widehat{ABC} permet de définir un point P sur le cercle trigonométrique, et vice versa.

Le cercle trigonométrique II

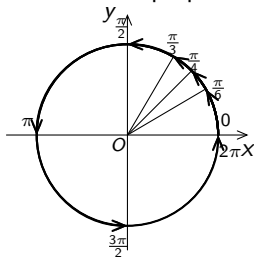
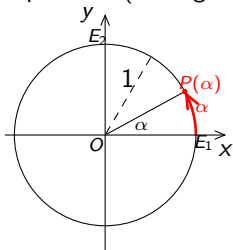
Attention, les angles sont orientés : voyez la situation suivante.



Ici, l'angle orienté $\alpha = \widehat{ABC}$ a une amplitude négative.

Degrés et radians

- Nous avons associé à chaque amplitude α (en degrés) un point P sur le cercle trigonométrique.
- Ce point peut aussi être repéré par la longueur d'arc parcourue (également notée α), entre le point E_1 définissant le repère et le point P ;
- Cette longueur d'arc est comptée positivement si on suit le sens trigonométrique positif et négativement sinon.
- 2π correspond à 360 degrés et “longueur d'arc” (en radians) et “amplitude” (en degrés) sont directement proportionnelles.

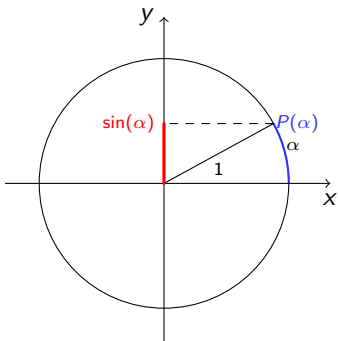
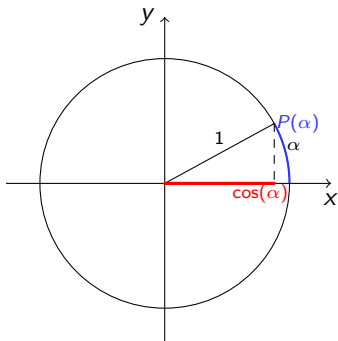


Nombres trigonométriques, définitions I (p.34)

Soit α l'amplitude d'un angle exprimée en radians ou en degrés. Par définition, les **coordonnées** du point P correspondant du cercle trigonométrique sont

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)).$$

On a donc



32

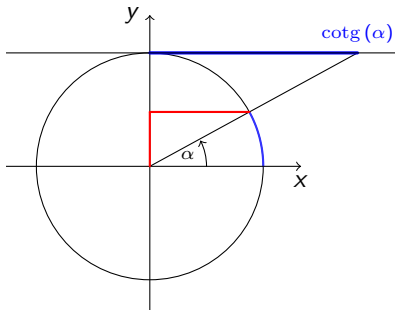
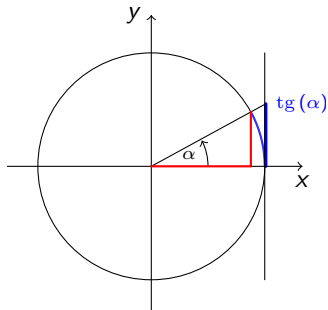
Attention, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont des coordonnées et non des longueurs : ce sont des nombres éventuellement négatifs, compris entre -1 et 1 .

Nombres trigonométriques, définitions II

On définit la tangente et cotangente de α par

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

Bien sûr, ces nombres ne sont définis que si le dénominateur est non nul. On peut les représenter de manière géométrique.



Premières propriétés I

Proposition 2.4.4 p.35 [Relation fondamentale]

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la relation fondamentale :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Proposition 2.4.5 p.35 [2π -Périodicité]

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha).$$

En général, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha).$$

De même, on a

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha) \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha).$$

Premières propriétés II

Proposition 2.4.6 p.36 [Angles opposés]

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Proposition 2.4.7 p.36 [Angles supplémentaires]

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Proposition 2.4.8 p.36 [Angles antisupplémentaires]

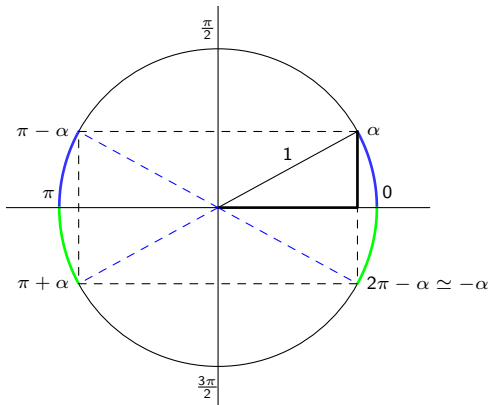
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha),$$

et donc $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}(\alpha)$ et $\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg}(\alpha)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

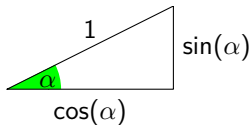
Une bonne nouvelle : cela se voit

Ces résultats sont dus aux symétries de la figure suivantes, qui préservent les longueurs.

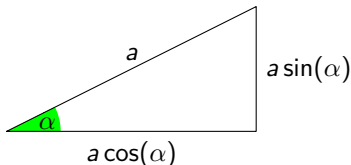


Relations dans les triangles rectangles

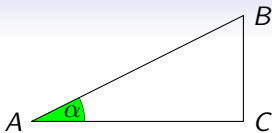
Attention, on parle ici de longueurs, et d'angles non orientés, compris entre 0 et 90 degrés (car on a des triangles rectangles).



Mais le triangle obtenu en multipliant toutes les dimensions du triangle précédent par un nombre positif a est *semblable* à celui-ci et a donc les mêmes angles :



Les rapports entre les longueurs des côtés sont donc les mêmes que dans le cas précédent.



On a alors les relations suivantes (avec la notation introduite plus haut pour la distance)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin(\alpha), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \operatorname{tg}(\alpha).$$

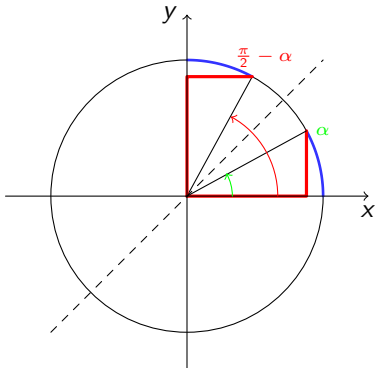
que l'on peut retenir par

- “sinus=côté opposé sur hypoténuse” (le sinus est si loin) ;
- “cosinus=côté adjacent sur hypoténuse” (le cosinus est collé) ;
- “tangente =côté opposé sur côté adjacent” ;
- ou encore “S.O.H.C.A.H.T.O.A”.

Cependant, il est préférable de tracer le cercle trigonométrique et d'y placer un triangle semblable à celui considéré, plutôt que de mémoriser des sigles qui perdent vite leur sens.

Angles complémentaires

Les relations dans les triangles rectangles, ainsi que la figure qui suit donnent la relation qui lie sinus et cosinus des angles complémentaires.



On a donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha), \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha).$$

Valeurs particulières

A l'aide des identités que nous venons de démontrer, on peut toujours se ramener à un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Certains angles sont fréquemment utilisés. Voici les valeurs des nombres trigonométriques correspondants.

Proposition 2.4.9 p.37

On a le tableau de valeurs suivant.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg}(\alpha)$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Il est utile de les retenir par coeur. Les valeurs sont $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$;
- On peut toujours les retrouver en traçant le cercle trigonométrique et en repérant les triangles particuliers.

Formules d'addition

Proposition 2.4.10 p.37

Pour tous nombres réels α et β , on a

- 1 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
- 2 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
- 3 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
- 4 $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

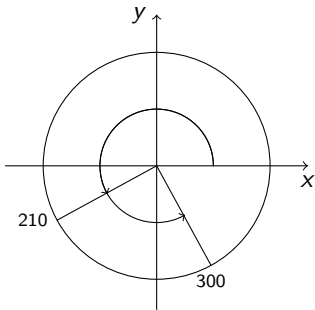
- Il suffit de retenir une formule, car les autres s'en déduisent (mais on peut retenir les quatre si on a une bonne mémoire).
- Pour avoir par exemple la deuxième à partir de la première, on y remplace β par $-\beta$;
- Pour avoir la troisième, on écrit $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta))$;
- On retient “cosinus d'une somme :cos cos -sin sin” ;
- Si on hésite sur le signe, on prend un exemple simple comme $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6 p.43 : c,e

Transformer en degrés les nombres (radians), $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{3}$ et placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Solution :

- 1 π correspond à 180 degrés, et $\frac{\pi}{6}$ à 30 degrés (retenir par coeur), donc $\frac{7\pi}{6}$ correspond à 210 degrés = 180 + 30 degrés
- 2 de même $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60 degrés, et $\frac{5\pi}{3}$, à 300 degrés = 270 + 30 degrés

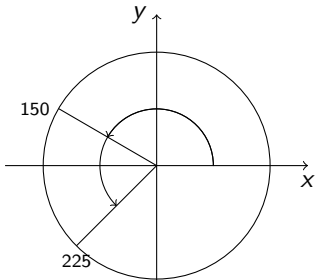


Exercice 7 p.43 : b,c

Transformer en radians les amplitudes 150° et 225° ; et placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Solution :

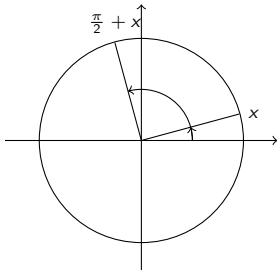
- 180 degrés correspondent à π radians, donc 1 degré correspond à $\frac{\pi}{180}$ radians, et 150 degrés correspondent à $\frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ radians.
- On peut aller plus vite si on sait que 30° correspondent à $\frac{\pi}{6}$ radians. Alors 150° correspondent à $\frac{5\pi}{6}$ radians
- Enfin $225 = 5 \cdot 45 = 180 + 45$, donc 225 degrés correspondent à $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ radians



Exercice 8a, 9a, 10, 11b

- 1 Evaluer $\cos(\frac{7\pi}{6})$. C'est $\cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2 Evaluer $\sin(-60^\circ)$. C'est $-\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3 Soit x un nombre réel, le nombre $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ est-il égal à $\cos(x)$, $\sin(x)$, ou à $-\cos(x)$?

On fait un dessin et on le voit :



On peut aussi utiliser la formule d'addition :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(x).$$

Exercice 12, 17

12. Soit x tel que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ et $\sin(x) = 0,8$. Que vaut $\cos(x)$?

- 1 On a $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 0,36$.
- 2 Donc $\cos(x) = 0,6$ ou $\cos(x) = -0,6$.
- 3 Mais $\cos(x)$ est négatif.

Faire l'exercice 15

17. Un triangle ABC rectangle en A est tel que le côté $[A, B]$ mesure 5m et que l'angle \widehat{ABC} soit égal à 30° . Déterminer l'aire du triangle ABC , ainsi que la norme de \overrightarrow{BC} .

- 1 On fait un dessin. On indique ce que l'on a (et éventuellement ce que l'on cherche).
- 2 La longueur de $[A; C]$ est $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ mètres.
- 3 L'aire vaut $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ mètres carrés et la norme de \overrightarrow{BC} vaut $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ mètres.

Faire l'exercice 16

Exercices 19 et 20

19. Un observateur placé au bord d'une rivière voit un arbre placé sur la rive opposée sous un angle de 60 degrés. S'il s'éloigne de 40 m, l'angle n'est plus que de 30 degrés. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

- 1 Faire un dessin.
- 2 Il y a deux triangles rectangles.
- 3 Il y a aussi un trianglesisocèle, qui permet de déterminer des angles.
- 4 On trouve $20\sqrt{3}$ mètres.

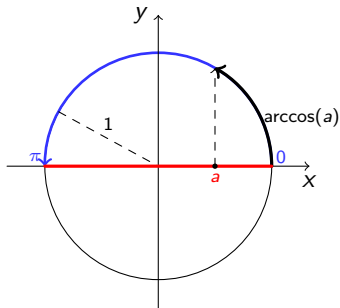
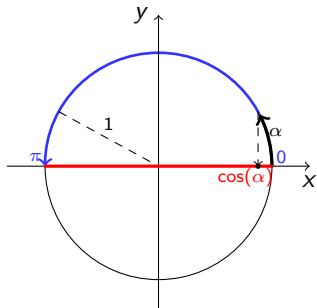
20 Soit un triangle ABC rectangle en A . Le côté $[A, B]$ mesure 3 mètres. Déterminer l'angle \widehat{ABC} pour que l'aire du triangle soit $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

- 1 Faire un dessin. L'aire permet de trouver la longueur de $[A, C]$: $3\sqrt{3}$ mètres.
- 2 La tangente de l'angle \widehat{ABC} vaut alors $\sqrt{3}$.
- 3 Donc l'angle a une amplitude de 60° .

L'arc cosinus

Définition 2.4.1 p.38

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arccos(a)$.



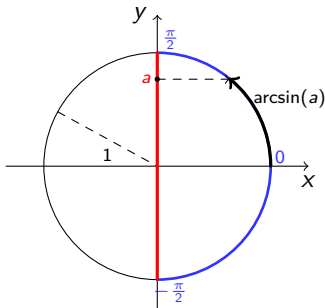
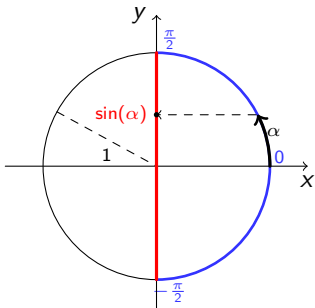
L'arc cosinus jouit des propriétés suivantes.

- On a $\cos(\arccos x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arccos(\cos x) = x$, $\forall x \in [0, \pi]$;

L'arc sinus

Définition 2.4.2 p.38

Pour tout nombre $a \in [-1, 1]$, il existe un unique nombre $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\arcsin(a)$.



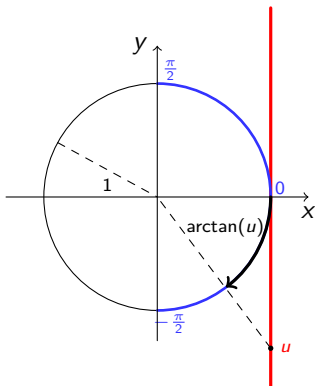
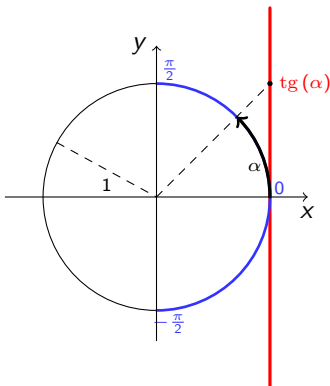
La fonction arc sinus a les propriétés suivantes.

- On a $\sin(\arcsin x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$;
- On a $\arcsin(\sin x) = x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

L'arc tangente

Définition 2.4.3 p.38

Pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique nombre $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\operatorname{tg}(\alpha) = a$. Ce nombre est appelé $\operatorname{arctg}(a)$.



Equations trigonométriques

Proposition 2.4.11 p.39

L'équation $\cos(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :

Si $a \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution. Si $a \in [-1, 1]$, on a les solutions :

$$\alpha = \arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = -\arccos(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Proposition 2.4.12 p.39

L'équation $\sin(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :

Si $a \notin [-1, 1]$, il n'y a pas de solution. Si $a \in [-1, 1]$, on a les solutions :

$$\alpha = \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Proposition 2.4.13 p.39

L'équation $\operatorname{tg}(\alpha) = a$ admet les solutions suivantes :

$$\alpha = \operatorname{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}), \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi + \operatorname{arctg}(a) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Produit scalaire de vecteurs

Définition 2.5.1 p.39

Des vecteurs (libres) non nuls \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si $\vec{u} = \vec{0}$, ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou si l'angle non orienté α entre \vec{u} et \vec{v} est droit. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarque : On a $\vec{u} \perp \vec{v}$ ssi $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = 0$.

Définition 2.5.2 p.39

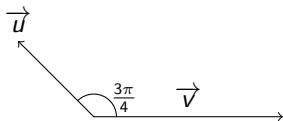
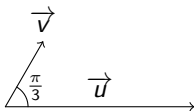
Le produit scalaire des vecteurs (libres) non nuls \vec{u} et \vec{v} est le **nombre réel**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

où $\alpha \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est le nombre 0.

- Attention : ne pas confondre avec la multiplication d'un vecteur par un nombre. Cette relation se lit dans les deux sens.
- On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Cela permet de calculer $\|\vec{u}\|$.

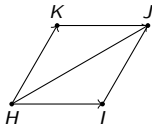
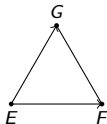
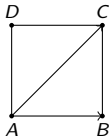
Quelques exemples



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Dans les figures suivantes, les côtés sont de longueur 2, et les triangles non rectangles équilatéraux :



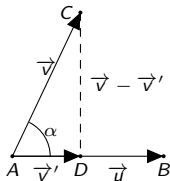
Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$, $\vec{FE} \cdot \vec{EG}$ et $\vec{HI} \cdot \vec{HJ}$.

Projection orthogonale et produit scalaire

Définition 2.5.3 p.40

Soient \vec{u} et \vec{v} des vecteurs du plan. La projection orthogonale de \vec{v} sur l'axe déterminé par \vec{u} , est l'unique vecteur \vec{v}' satisfaisant les deux conditions suivantes :

- 1 Le vecteur \vec{v}' est multiple du vecteur \vec{u} ;
- 2 Le vecteur $\vec{v} - \vec{v}'$ est orthogonal au vecteur \vec{u} .



Proposition 2.5.1 p.40

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs libres et notons \vec{v}' la projection orthogonale de \vec{v} sur \vec{u} . On a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$.

Repères orthonormés et produit scalaire

Définition 2.5.4 p.40

Un repère défini par l'origine O et les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 est orthonormé si ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1.$$

Les vecteurs de norme 1 sont aussi appelés *vecteurs unitaires*.

Proposition 2.5.2 p.40

Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan ont pour composantes (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans un repère orthonormé du plan défini par O et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Propriétés du produit scalaire

Proposition 2.5.3 p.41

- ① Le produit scalaire est symétrique : on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

pour tous vecteurs libres \vec{u} et \vec{v} ;

- ② Le produit scalaire est bilinéaire : on a

$$\bullet (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$

$$\bullet (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$$

pour tous vecteurs libres \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et tout nombre λ .

- ③ En général, on a

$$\bullet (r\vec{u} + s\vec{v}) \cdot \vec{w} = r(\vec{u} \cdot \vec{w}) + s(\vec{v} \cdot \vec{w}), \text{ et}$$

$$\bullet \vec{u} \cdot (r\vec{v} + s\vec{w}) = r(\vec{u} \cdot \vec{v}) + s(\vec{u} \cdot \vec{w}),$$

pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et tous réels r et s .

En bref, on peut distribuer le produit scalaire.

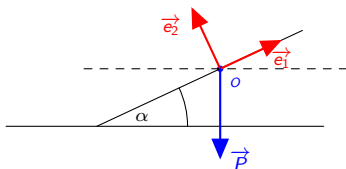
Composantes de vecteurs

Proposition 2.5.4 p.41

Dans tout repère orthonormé du plan, défini par O , \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , tout vecteur \vec{u} se décompose dans cette base en

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2.$$

Exemple : On se place dans la situation physique représentée par le schéma suivant et on veut décomposer \vec{P} :



Norme et relations dans les triangles

- On a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, par définition ;
- On a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$;
- Dans un triangle ABC , on a $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} - \vec{BA}$.

Théorème d'Al Kashi

Dans tout triangle ABC , on a

- $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$;
 - $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC}$;
 - $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 - 2\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\| \cos(\widehat{ABC})$.
- **Intérêt** : Lier les angles et les longueurs dans un triangle quelconque.
 - **Comment le retenir** : On commence comme Pythagore, on retire le double produit. Il y a un cosinus.

Exercices 21a, 22a

21a. Soient \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

- 1 Le produit scalaire est distributif et symétrique. Donc on a à calculer $2\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{v}$
- 2 De plus $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2 = 4, \dots$
- 3 La réponse est $-9 - 1 = -10$

Dans les mêmes conditions, calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

22 a Soit une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) du plan. Déterminer le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} donnés dans cette base par $\vec{u} : (1, 3)$, $\vec{v} : (2, -1)$

Expression du produit scalaire dans une base orthonormée. Réponse : $2 - 3 = -1$.

Remarque : on peut calculer l'angle entre ces vecteurs, et leur norme.

Exercices 23 et 30

23. Soit un triangle ABC tel que $\|\vec{AB}\| = 2$, $\|\vec{BC}\| = 4$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$. Déterminer $\|\vec{AC}\|$.

C'est le Théorème d'Al Kashi : $\sqrt{28}$. On peut le faire avec le produit scalaire.

30. Soit ABC un triangle tel que la norme de \vec{AB} est 8, celle de \vec{AC} est 3. De plus le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ vaut 12. Quelle est la norme de $\vec{u} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$?

① 2

② $\sqrt{52}$

③ $\sqrt{138}$

④ 17

Solution :

① On calcule $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

② On développe par distributivité et symétrie.

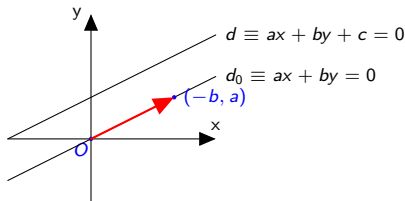
$$(\vec{AB} - 2\vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - 2\vec{AC}) = \|\vec{AB}\|^2 - 4\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 4\|\vec{AC}\|^2.$$

③ On prend la racine carrée.

Droites et perpendicularité I

Rappel : dans tout repère cartésien du plan, si d est une droite, alors

$$d \equiv ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$



Dans ce cas, d admet pour vecteur directeur $(-b, a)$.

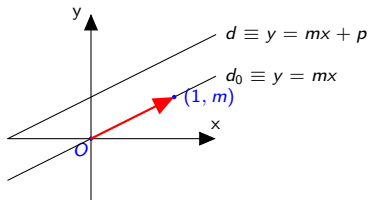
Proposition 2.5.5 p.42

Dans un repère orthonormé, si $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$, alors

- 1 le vecteur $\vec{n} : (a, b)$ est orthogonal à d ;
- 2 les droites d et d' sont orthogonales ssi $aa' + bb' = 0$;
- 3 les droites d et d' sont parallèles ssi $ab' - ba' = 0$, c'est à dire si (a, b) et (a', b') sont multiples l'un de l'autre.

Droites et perpendicularité II

Cas particulier : si $d \equiv y = mx + p$



Dans ce cas, d admet pour vecteur directeur $(1, m)$

Proposition 2.5.6 p.42

Dans un repère orthonormé, si $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$, alors

- 1 le vecteur $\vec{n} : (m, -1)$ est orthogonal à d ;
- 2 les droites d et d' sont orthogonales ssi $mm' = -1$;
- 3 les droites d et d' sont parallèles ssi $m = m'$;
- 4 le nombre m , coefficient angulaire ou pente de d , est la tangente de l'angle orienté entre le premier vecteur de la base associée au repère et un vecteur directeur de d .

Exercice 29

29. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation cartésienne $3x + 2y = 6$. La droite d' est perpendiculaire à d et contient le point P ayant pour coordonnées $(1, 1)$. Parmi les équations suivantes, laquelle est une équation cartésienne de d' ?

- ① $3x + 2y = 5$ ② $2x + 3y = 5$ ③ $3y - 2x = 5$ ④ $3y - 2x = 1$

Solution :

- ① La pente de d est $-\frac{3}{2}$, celle de d' est donc $\frac{2}{3}$.
② De plus la droite contient P !