Remédiation en mathématiques
Examen
le 22 mai 2015

Nom :
Prénom :
Matricule :
Questionnaire A :

1. Parmi les égalités suivantes, quelle est celle qui est vraie quels que soient les ensembles $A$, $B$ et $C$ ?
   1) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup B$
   2) ♣ $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \setminus B$
   3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
   4) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

   On peut dessiner les diagrammes de Venn et on voit la réponse. La dernière solution est tentante, car elle ressemble à une formule connue, mais elle est fausse.
2. Que vaut $-81^{-\frac{1}{4}}$ ?

   1) $-3$ 2) ♣ $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $3$

   On traite l'exposant avant le signe - situé devant 81. L'expression vaut donc $-(81^{-\frac{1}{4}})$. Ensuite on peut gérer le signe négatif de l'exposant, puis sa nature fractionnaire. On a donc
$$-81^{-\frac{1}{4}} = -(81^{-\frac{1}{4}}) = -\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{81}} = -\frac{1}{3}.$$
3. Que vaut $\sin(\frac{7\pi}{2} + x)$, pour tout nombre réel $x$ ?

   1) ♣ $-\cos(x)$ 2) $-\sin(x)$ 3) $\cos(x)$ 4) $\sin(x)$

   On transforme $\frac{7\pi}{2} + x$ en $2\pi + \frac{3\pi}{2} + x$. Vu la périodicité de la fonction sinus, on a donc
$$\sin(\frac{7\pi}{2} + x) = \sin(\frac{3\pi}{2} + x).$$
   On dessine le cercle trigonométrique et on constate que ce nombre vaut $-\cos(x)$.
4. Parmi les expressions suivantes, supposées définies, laquelle est égale à
$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}?$$
   1) ♣ $-\frac{5}{x+1}$
   2) $-\frac{3}{x+1}$
   3) $\frac{2x-3}{x+1}$
   4) Aucune des expressions précédentes.

   C'est un exercice où la factorisation est mise en oeuvre. On peut d'abord remarquer que le second terme se simplifie directement : puisque $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, il vaut $\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}$, c'est-à-dire 1, chaque fois que l'expression est définie. On peut donc calculer :
$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2} - 1 = \frac{(x^2 - 6x + 8) - (x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2}.$$
   Cette expression vaut
$$\frac{-5x + 10}{x^2 - x - 2} = -5(\frac{x - 2}{x^2 - x - 2}).$$
   Vu les réponses proposées, il est utile de voir si le dénominateur ne serait pas multiple de $(x-2)$. Il vaut $(x-2)(x+1)$. On simplifie (puisque l'expression est supposée définie), et on obtient le résultat.
5. Que vaut l'expression $\frac{(6 \cdot 10^2)^4 10^{-4}}{0{,}36 \cdot 10^6}$ ?

1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $0,36$ 4) ♣ $36$

On se débarrasse des difficultés en distribuant l'exposant au-dessus de la parenthèse et en exprimant 0,36 comme un nombre entier fois une puissance de 10. On obtient donc

$$\frac{(6\cdot 10^2)^4 10^{-4}}{0,36\cdot 10^6} = \frac{6^4\cdot 10^8\cdot 10^{-4}}{36\cdot 10^{-2}\cdot 10^6} = \frac{6^4\cdot 10^4}{36\cdot 10^4} = \frac{6^4}{6^2} = 36.$$

6. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x+4}{9-x^2} \leqslant \frac{3}{x-3}$, où le nombre $x$ est réel ?

1) $]-\infty;-\frac{13}{4}]$
3) ♣ $[-\frac{13}{4};-3[\cup]3;+\infty[$
2) $]-\infty;-\frac{13}{4}]\cup]3;+\infty[$
4) $[-\frac{13}{4};-3[\cup[3;+\infty[$

Il faut éviter le piège classique qui consiste à traiter les inéquations comme les équations (en supprimant les dénominateurs). On peut quand même ramener tout dans le premier membre et obtenir l'inéquation équivalente :

$$\frac{x+4}{9-x^2} - \frac{3}{x-3} \leqslant 0.$$

On met au même dénominateur en remarquant que $9-x^2 = (3-x)(3+x)$. On obtient donc l'inéquation

$$\frac{x+4}{9-x^2} + \frac{3}{3-x} \leqslant 0$$

ou encore

$$\frac{(x+4)+3(3+x)}{(3-x)(3+x)} \leqslant 0.$$

C'est alors une étude du signe classique pour le numérateur et pour le dénominateur. On obtient le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{13}{4}$ | | $-3$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x+13$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $3+x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{4x+13}{(3-x)(3+x)}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ |

7. Si 36 ouvriers mettent 24h pour effectuer un certain travail, combien d'ouvriers faudra-t-il pour faire le même travail en 18 heures (on suppose que le rythme de travail est le même quel que soit le nombre d'ouvriers) ?

1) 24
3) ♣ 48
2) 27
4) Aucune des réponses précédentes.

Le nombre d'ouvriers nécessaires et le nombre d'heures nécessaires sont, selon les hypothèses, inversement proportionnels : si on double le nombre d'ouvriers, on ira deux fois plus vite, donc on divisera le nombre d'heures nécessaires par deux. Il y a donc une constante, c'est le nombre d'heures.ouvriers nécessaires, qui par hypothèse, est égal à $36\cdot 24ho$. Si pour le faire en 18 heures, il faut $n$ ouvriers, alors on a $18n = 36\cdot 24$, qui donne tout de suite $n = 48$. On peut aussi raisonner comme pour une règle de trois, mais en inversant les opérations : Si pour faire le travail en 24h, il faut 36 ouvriers, alors pour le faire en 1h, il faut $36\cdot 24$ ouvriers. Pour le faire en 18 heures, il faut $\frac{36\cdot 24}{18}$ ouvriers.

8. On réalise une expérience scientifique où la quantité d'un produit augmente de 25% entre le début de l'expérience et la fin de l'expérience. On note $q$ la quantité initiale du produit et $Q$ la quantité finale. Quelle est l'expression de $q$ en fonction de $Q$ ?

1) $q = \frac{3}{4}Q$
3) $q = \frac{5}{4}Q$
2) ♣ $q = \frac{4}{5}Q$
4) Aucune des réponses précédentes.

D'après les hypothèses, on a

$$Q = q + 25\%\cdot q = q + \frac{25}{100}q = (\frac{100}{100} + \frac{25}{100})q = \frac{125}{100}q = \frac{5}{4}q.$$

On résout l'équation pour obtenir $q$.

9. Les nombres réels $x, y, z$ satisfont le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 4 \\ 4x - y + 2z & = & -2 \\ 2x + 3y - 2z & = & 9. \end{array}\right.$$

Que vaut $2x + 3y + z$ ?

1) 4
2) ♣ 6
3) 12
4) Aucune des réponses proposées.

Il faut résoudre le système. Par exemple, on peut faire disparaître l'inconnue $x$ des deux dernières équations en retirant deux fois la première de la deuxième et une fois de la troisième. On obtient donc le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & -3y & + & 4z & = & -10 \\ & & 2y & - & z & = & 5. \end{array}\right.$$

On peut alors éliminer l'inconnue $y$ de la troisième équation en ajoutant 2 fois la deuxième équation à 3 fois la troisième, ou éliminer $z$ en ajoutant 4 fois la troisième équation à la deuxième. On obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & -3y & + & 4z & = & -10 \\ & & 5y & & & = & 10. \end{array}\right.$$

Cela donne successivement $y = 2$, $z = -1$ et $x = \frac{1}{2}$. On vérifie dans toutes les équations de départ. Il reste alors à calculer la quantité demandée.

10. Il y a quatre ans, un père avait le quadruple de l'âge de son fils. Dans dix ans, son âge n'en sera plus que le double. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

1) 35
2) ♣ 43
3) 63
4) Cette situation est impossible.

Notons $p$ l'âge actuel du père et $f$ l'âge actuel du fils. La première condition donne

$$p - 4 = 4(f - 4).$$

La deuxième condition donne

$$p + 10 = 2(f + 10).$$

On a donc le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} p & = & 4f - 12 \\ p & = & 2f + 10 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} p & = & 4f - 12 \\ 4f - 12 & = & 2f + 10. \end{array}\right.$$

On trouve $f = 11$ et $p = 32$. Donc la somme vaut 43.

11. On considère trois points $A, B, C$ du plan donnés par leurs coordonnées dans un repère cartésien : $A : (1;2)$, $B : (4;3)$, $C : (3;4)$. On note $D$ l'intersection de la droite $d$ parallèle à $AB$ menée par $C$ et de la droite $d'$ parallèle à $AC$ menée par $B$. Quelles sont les coordonnées de $D$ dans le repère ?

1) $(6;7)$
2) $(6;6)$
3) $(5;6)$
4) ♣ $(6;5)$

En dessinant, on voit que $D$ est le dernier sommet du parallélogramme $ACDB$. On peut donc résoudre vectoriellement en utilisant la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Si on ne le voit pas, on écrit les deux équations de droites : on trouve

$$d \equiv x - 3 = 3y - 12 \quad \text{et} \quad d' \equiv y = x - 1.$$

Soit on résout le système formé par les deux équations, soit on regarde quelle solution proposée satisfait les deux équations.

12. On considère deux points $A$ et $B$ du plan donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé : $A : (1;2)$, $B : (-3;4)$. Quelle est l'équation de la médiatrice $d$ de $[A, B]$ ?

1) ♣ $d \equiv -2x + y - 5 = 0$

2) $d \equiv -2x + y + 5 = 0$

3) $d \equiv 2x + 4y - 10 = 0$

4) $d \equiv 2x + 4y + 10 = 0$

Cette droite admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AB} : (-4; 2)$. Elle passe par le milieu de $[A, B]$, qui a pour coordonnées $(-1; 3)$. Elle a donc pour équation

$$-4(x + 1) + 2(y - 3) = 0,$$

ou encore $-2x - 2 + y - 3 = 0$.

13. Une échelle posée contre un mur vertical et faisant un angle de 45° avec le sol (horizontal) touche le mur à une hauteur de 5 mètres. A quelle hauteur touchera-t-elle le mur si on la place avec un angle de 60° par rapport au sol ? Suggestion : faire deux dessins et calculer d'abord la longueur de l'échelle.

1) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ mètres

2) ♣ $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ mètres

3) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ mètres

4) $5\sqrt{6}$ mètres

On calcule la longueur de l'échelle en utilisant la première situation. Soit on utilise la trigonométrie du triangle rectangle, soit on utilise que le triangle formé par l'échelle est isocèle rectangle. Si $l$ est la longueur de l'échelle, on a, selon la méthode utilisée,

$$l^2 = 50 \quad \text{ou} \quad \frac{5}{l} = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc on a $l = 5\sqrt{2}$. Si on place l'échelle avec un angle de 60°, et si on note $h$ la hauteur sur le mur, on a $\frac{h}{l} = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $h = 5\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. Soit $ABC$ un triangle tel que la norme de $\overrightarrow{AB}$ est 8, celle de $\overrightarrow{AC}$ est 3. De plus, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ vaut 12. Quelle est la norme de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ ?

1) 2

2) ♣ $\sqrt{52}$

3) $\sqrt{138}$

4) 17

On calcule

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) \bullet (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}).$$

On développe en utilisant les propriétés du produit scalaire :

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = 64 - 48 + 36 = 52.$$

Il reste juste à prendre la racine.

15. Soit $f$ la fonction du premier degré telle que $f(2) = 3$ et $f(8) = -9$. Que vaut $f(25)$ ?

1) ♣ $-43$

2) $-41$

3) $-39$

4) $-37$

Il existe des nombres $a$ et $b$ tels que $f(x) = ax + b$ pour tout $x$. On a $3 = 2a + b$ et $-9 = 8a + b$. On trouve $a$ en appliquant la formule donnant la pente des fonctions du premier degré ou en considérant la différence membre à membre de ces deux équations. On trouve $a = -2$ et $b = 7$. On a donc $f(x) = -2x + 7$ (on vérifie) et enfin $f(25) = -43$.

16. Que vaut $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{3}))$ ?

1) $\cos(\arccos(\frac{5\pi}{3}))$

2) ♣ $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{5\pi}{3}$

4) Cette expression n'est pas définie.

On dessine sur le cercle trigonométrique et on voit que $\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. L'arc cosinus de ce nombre est l'angle compris entre 0 et $\pi$ dont le cosinus est $\frac{1}{2}$. C'est donc $\frac{\pi}{3}$.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{(x^2+1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{(\sqrt{4+x^2}-2)\cos(2x)}$. Que vaut la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ ?

1) ♣ 2
2) $+\infty$
3) $\frac{0}{0}$
4) Elle n'existe pas.

On analyse ce qui pose problème quand $x$ tend vers 0. Le numérateur et le dénominateur sont des fonctions continues qui tendent toutes les deux vers 0 quand $x$ tend vers 0. Donc le théorème sur les limites de quotients ne s'applique pas directement. Au numérateur, c'est le facteur $\sqrt{1+x^2}-1$ qui tend vers 0, tandis qu'au dénominateur, c'est $\sqrt{4+x^2}-2$. On écrit donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{(\sqrt{4+x^2}-2)\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)}{\cos(2x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2},$$

pour autant que les deux limites dans le membre de droite puissent être calculées et soient finies. La première vaut 1 vu le théorème sur les quotients et la continuité des fonctions considérées. Pour la deuxième, on multiplie par les binômes conjugués pour faire disparaître les facteurs qui tendent vers 0 :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{4+x^2}-2} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{4+x^2}+2)(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

En utilisant le théorème de prolongement, on peut simplifier les facteurs $x^2$ pour calculer la limite, et la limite vaut donc 2. C'est donc aussi le résultat final.

18. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (2;-1;-2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1;1;2).$$

Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

1) $(0;-2;-1)$
2) $(0;2;-1)$
3) $(0;2;1)$
4) ♣ $(0;-2;1)$

On applique la formule et on trouve $(0;-2;1)$. On vérifie que ce vecteur est bien orthogonal aux vecteurs donnés.

19. Soit $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par $f(x)=\ln(2+x^4)$. Parmi les propositions suivantes, une seule est nécessairement correcte, laquelle ?

1) ♣ La fonction $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction $F$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction $F$ admet un maximum (local) en 0.
4) La fonction $F$ admet un minimum (local) en 0.

Pour répondre, il faut des informations sur la dérivée de $F$, qui est précisément $f$. On étudie le signe de $f$. Le logarithme est positif si, et seulement si, son argument est supérieur à 1. C'est le cas de $2+x^4$ quel que soit $x$. Donc la dérivée de $F$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $F$ est strictement croissante.

20. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^3\ln(x^2)$ ?

1) $x(3x\ln(x^2)+1)$
2) ♣ $x^2(3\ln(x^2)+2)$
3) $x^2(3\ln(x^2)+2x)$
4) $3x^2\ln(x^2)+2$

Il s'agit d'un produit, et l'un des facteurs est une fonction composée. On applique donc les deux règles adéquates :

$$f'(x) = 3x^2\ln(x^2) + x^3\frac{1}{x^2}(2x) = 3x^2\ln(x^2)+2x^2.$$

21. Que vaut l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)\sin^3(x)\mathrm{d}x$ ?

1) $-\frac{1}{16}$

2) ♣ $\frac{1}{16}$

3) $\frac{1}{4}$

4) Aucune des réponses précédentes.

On calcule une primitive de la fonction à intégrer. On reconnaît qu'il s'agit d'une fonction composée, multipliée (à une constante près) par la dérivée de la fonction "interne". Une primitive est donc donnée par $F(x) = \frac{\sin^4(x)}{4}$. L'intégrale est donc donnée par

$$[\frac{\sin^4(x)}{4}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 = \frac{1}{16}$$

22. On considère l'équation $\log_3(-x^2+4x+20) - \log_3(x^2-x-2) = \log_3(2)$ (où $x$ est un nombre réel). Quelle est l'unique proposition correcte à propos de son ensemble de solutions ?

    1) Elle admet une seule solution et celle-ci appartient à l'intervalle $]0;20[$

    2) Elle admet une seule solution et celle-ci appartient à l'intervalle $]-20;0[$

    3) ♣ Elle admet deux solutions dont le produit est $-8$.

    4) Elle admet deux solutions dont le produit est 8.

    On écrit les conditions d'existence $-x^2+4x+20 > 0$ et $x^2-x-2 > 0$. Si ces conditions sont vérifiées, l'équation est équivalente à

    $$\log_3(\frac{-x^2+4x+20}{x^2-x-2}) = \log_3(2).$$

    Puisque le logarithme est strictement croissant, cette condition est équivalente à

    $$\frac{-x^2+4x+20}{x^2-x-2} = 2.$$

    On rassemble et on met au même dénominateur et on obtient

    $$-x^2+4x+20-2(x^2-x-2) = 0.$$

    Les solutions sont 4 et $-2$. Elles satisfont les conditions d'existence, et on peut même vérifier qu'elles sont solutions de l'équation de départ.

23. Soit $f$ la fonction du second degré qui admet un minimum en $x = 2$, et telle que $f(0) = -6$ et $f(-1) = 4$. Que vaut $f(10)$ ?

    1) 108

    2) 112

    3) 116

    4) ♣ Aucune des réponses précédentes.

    Il existe des constantes $a, b, c$ telles que $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout $x$. Reste à traduire les trois conditions pour obtenir $a, b$ et $c$. Les deux dernières conditions donnent $c = -6$ et $a - b + c = 4$. L'abscisse du minimum pour la fonction $f$ est donnée par $-\frac{b}{2a}$. On a donc $-\frac{b}{2a} = 2$. On a donc le système d'équations

    $$\begin{cases} c & = & -6 \\ a-b+c & = & 4 \\ b & = & -4a. \end{cases}$$

    On remplace $c$ par sa valeur dans la deuxième équation, et on y remplace $b$ par $-4a$. On trouve donc $5a = 10$, donc $a = 2$ et $b = -8$. On a donc $f(x) = 2x^2 - 8x - 6$. Finalement $f(10) = 114$.

24. Soit un triangle $ABC$ tel que le côté $[A, B]$ est de longueur 4, $[A, C]$ est de longueur 3 et $[B, C]$ de longueur $\sqrt{37}$. Quelle est l'amplitude de $\widehat{BAC}$ ?

    1) 60°

    2) ♣ 120°

    3) 150°

    4) Aucune des réponses précédentes.

    On applique le théorème de Pythagore généralisé aux triangles quelconques pour calculer $\|\overrightarrow{BC}\|^2$ :

    $$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\widehat{BAC}).$$

On remplace pour obtenir

$$37 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos(\widehat{BAC}).$$

Donc

$$\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}.$$

On obtient donc l'angle en question, sachant qu'il est compris entre 0 et 180 degrés.

25. Que vaut la primitive $\int \ln(x^2) \mathrm{d}x$, à une constante près, et sur $]0, +\infty[$ ?

    1) $-2x + \ln(x^2)$
    2) $2x - x\ln(x^2)$
    3) ♣ $-2x + x\ln(x^2)$
    4) Aucune des réponses précédentes.

    Il suffit de dériver les réponses proposées pour trouver celle dont la dérivée est $\ln(x^2)$.