Remédiation en mathématiques
Examen
le 19 août 2015

Nom :
Prénom :
Matricule :
Questionnaire A :

1. Parmi les propositions suivantes, déterminez celle qui est logiquement équivalente à l'assertion "Si je suis prof de math alors je suis grand ou je donne bien cours".
   1) "Si je suis prof de math et si je ne suis pas grand alors je ne donne pas bien cours"
   2) ♣ "Si je suis prof de math et si je ne suis pas grand alors je donne bien cours"
   3) "Si je ne suis pas prof de math alors je ne suis pas grand et je ne donne pas bien cours"
   4) "Si je ne suis pas prof de math alors je ne suis pas grand ou je ne donne pas bien cours"

   C'est de la logique élémentaire. On peut rejeter les deux dernières propositions car l'assertion de l'énoncé donne une information sur les professeurs de maths. Elle ne dit rien sur les autres personnes. La première assertion est visiblement fantaisiste. De manière plus formelle, si on note P l'assertion "je suis prof de math", Q l'assertion "je suis grand" et R "je donne bien cours", alors l'assertion de l'énoncé s'écrit symboliquement $P \Rightarrow (Q \vee R)$. Elle est encore équivalente à $\neg P \vee (Q \vee R)$ (propriété de l'implication).
   La deuxième réponse s'écrit $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$, qui est équivalente pour la même raison à $\neg(P \wedge \neg Q) \vee R$, ou encore à $\neg P \vee Q \vee R$.

2. Que vaut $\cos(-\frac{11\pi}{2} - x)$, pour tout nombre réel x ?

   1) $\cos(x)$ 2) $-\cos(x)$ 3) $-\sin(x)$ 4) ♣ $\sin(x)$

   On fait le dessin avec un angle x bien choisi pour y voir quelque chose et on trouve facilement. Si on préfère les formules, on utilise les angles opposés et la périodicité pour avoir

   $$\cos(-\frac{11\pi}{2} - x) = \cos(\frac{11\pi}{2} + x) = \cos(\frac{3\pi}{2} + x).$$

   On utilise encore une fois les angles opposés pour se ramener au premier quadrant, si x est dans ce quadrant, puis la formule des angles complémentaires.

   $$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x).$$

3. Que vaut $-(64)^{-\frac{4}{3}}$?

   1) -256
   2) ♣ $-\frac{1}{256}$
   3) 256
   4) aucune des réponses précédentes

   Il y a un exposant négatif et fractionnaire qu'il faut gérer. Commençons par le signe de l'exposant : par définition, on a

   $$-(64)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{64^{\frac{4}{3}}}.$$

   Ensuite l'exposant fractionnaire, en commençant par effectuer la racine :

   $$64^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{64})^4 = 4^4 = 256.$$

   On obtient donc bien la réponse annoncée.

4. Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A : (1; 0)$, $B : (4; 6)$ et $C : (8; -1)$. On note H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Quelle est l'unique proposition correcte parmi les suivantes ?

1) La distance de l'origine à H est 2
2) ♣ Le point H appartient à la droite $d \equiv y = x$
3) Le point H appartient à la droite $d \equiv y = 2x$
4) Le point H est équidistant de A et B.

Il faut calculer les coordonnées de H. Un dessin permet de préciser ce que l'on doit calculer, et de se donner une idée de la réponse. Le point H appartient par définition à la droite AB et à la perpendiculaire à AB contenant C. On écrit les équations de ces droites et on calcule l'intersection. Le vecteur $\overrightarrow{AB} : (3; 6)$ est un vecteur directeur de AB et donc un vecteur normal (perpendiculaire) à la hauteur issue de C. On peut aussi diviser ce vecteur par 3 et travailler avec $\overrightarrow{v} : (1; 2)$. On a donc

$$AB \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2}$$

tandis que la hauteur h issue de C a pour équation

$$1(x-8) + 2(y-1) = 0.$$

On nettoie les deux équations et on résout le système, par exemple par substitution, et on trouve $x = y = 2$, ou $H : (2; 2)$.

5. Soit x un nombre compris entre π et 2π tel que $\cos(x) = -0,8$. Que vaut $\text{tg}(x)$?

1) $-\frac{4}{3}$ 2) $-\frac{3}{4}$ 3) ♣ $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{4}{3}$

Il faut bien sûr trouver $\sin(x)$. La relation fondamentale donne $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-(-0,8)^2 = 0,36$. On a donc $\sin(x) = -0,6$ ou $\sin(x) = 0,6$. Puisque x est compris entre π et 2π, son sinus est négatif, et il vaut donc $-0,6$. On a alors

$$\text{tg}(x) = \frac{-0,6}{-0,8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

6. Parmi les expressions suivantes, supposées définies, laquelle est égale à

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} - 1?$$

1) $\frac{4}{2-x}$
3) $\frac{4}{x-3}$
2) ♣ $\frac{4}{x-2}$
4) Aucune des expressions précédentes.

On peut factoriser numérateur et dénominateur de la fraction et voir qu'il y a une simplification possible (tout étant supposé défini). On peut aussi naturellement mettre au même dénominateur :

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} - \frac{x^2+x-6}{x^2+x-6} = \frac{(x^2+5x+6)-(x^2+x-6)}{x^2+x-6} = \frac{4x+12}{x^2+x-6} = \frac{4(x+3)}{x^2+x-6}$$

Le dénominateur est sans doute divisible par $(x+3)$: on constate que c'est $(x+3)(x-2)$ et on conclut en simplifiant.

7. Que vaut $\text{arctg}(\text{tg}(\frac{\pi}{3}))$?

1) ♣ $\frac{\pi}{3}$
3) une autre valeur réelle.
2) $\frac{4\pi}{3}$
4) Cette expression n'est pas définie.

Ici encore, on fait un dessin avec le cercle trigonométrique, on y place $\frac{\pi}{3}$, on regarde où est la tangente de cet angle, puis on considère l'arc tangente du résultat. On trouve le résultat annoncé. A partir de la définition, on sait $\text{arctg}(\text{tg}(\frac{\pi}{3}))$ est l'unique angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut $\text{tg}(\frac{\pi}{3})$. C'est le cas de $\frac{\pi}{3}$.

8. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle de la dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{(\cos^2(x))}$?

1) $f'(x) = e^{(\cos^2(x))}$

2) $f'(x) = e^{(\cos^2(x))} - 2\sin(x)\cos(x)$

3) $f'(x) = 2e^{(\cos^2(x))}\sin(x)\cos(x)$

4) ♣ $f'(x) = -2e^{(\cos^2(x))}\sin(x)\cos(x)$

Il s'agit de dériver une fonction composée. On applique donc la règle correspondante. On a donc, avec des notations allégées,

$$(e^{(\cos^2(x))})' = e^{(\cos^2(x))}(\cos^2(x))',$$

puisque la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle. Il reste à calculer la dernière dérivée. En appliquant la même règle, on trouve

$$(\cos^2(x))' = 2\cos(x)(\cos(x))' = -2\cos(x)\sin(x).$$

9. On considère l'équation $\log_2(x) = \log_x(2)$ où l'inconnue x est un nombre réel. Quelle est l'unique proposition correcte concernant cette équation ?
   1) Elle admet deux solutions dont le produit vaut -1.
   2) ♣ Elle admet deux solutions dont le produit vaut 1.
   3) Elle admet une seule solution, qui appartient à l'intervalle $]-\infty, 0[$.
   4) Elle admet une seule solution, qui appartient à l'intervalle $]0; +\infty[$.

   On peut écrire d'abord les conditions d'existence : il faut que $x > 0$ pour que le premier membre soit défini et $x \neq 1$ pour que le second soit défini. On utilise alors la règle $\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. L'équation à traiter est donc équivalente à

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}.$$

   On simplifie et on obtient l'équation équivalente $(\ln(x))^2 = (\ln(2))^2$. Cette équation a deux solutions, $\ln(x) = \ln(2)$ ou $\ln(x) = -\ln(2) = \ln(\frac{1}{2})$. Puisque ln est une fonction injective, on trouve $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$. On vérifie qu'il s'agit bien de deux solutions. Leur produit vaut 1.

10. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3x+5}{x^2-4} \leqslant \frac{2}{x-2}$, où le nombre x est réel ?

   1) $]-1; +\infty[$
   2) $[-1; +\infty[$
   3) $]-\infty; -2] \cup [-1; 2[$
   4) ♣ $]-\infty; -2[\cup [-1; 2[$

   Il ne faut pas tomber dans le piège consistant à tout multiplier par x^2-4. On applique la méthode classique en ramenant tout dans le membre de gauche. On a alors l'inéquation équivalente

$$\frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} \leqslant 0.$$

   On réduit au même dénominateur et on est ramené à une étude du signe :

$$\frac{(3x+5) - 2(x+2)}{x^2-4} \leqslant 0,$$

   ou encore

$$\frac{x+1}{x^2-4} \leqslant 0.$$

   On fait un tableau de signes et on obtient le résultat :

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x^2-4}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

11. Si 28 ouvriers mettent 35h pour effectuer un certain travail, combien de temps mettront 20 ouvriers pour effectuer le même travail (on suppose que le rythme de travail est le même quel que soit le nombre d'ouvriers) ?

1) 16
2) 25
3) ♣ 49
4) Aucune des réponses précédentes.

Il s'agit d'un problème avec des quantités inversement proportionnelles : si on double le nombre d'ouvriers, vu les hypothèses, on divise par deux le temps nécessaire. On peut alors faire le raisonnement suivant : Si 28 ouvriers mettent 35h, alors 1 ouvrier mettra $28 \times 35h$, et 20 ouvriers mettront $\frac{28 \times 35}{20}$ heures. On simplifie le facteur 4 commun entre 28 et 20 et le facteur 5 commun entre 35 et 20. On obtient directement 49 heures.

12. On considère la valeur d'une action au premier janvier 2015. Sur le mois de janvier, la valeur augmente de 30%. Ensuite, sur le mois de février, elle baisse de 20%. Quelle est la variation totale du prix du premier janvier au premier mars.

1) ♣ Une augmentation de 4%
2) Une augmentation de 10%
3) Une baisse de 10%
4) Aucune des propositions précédentes

Notons P la valeur (le prix) de l'action au premier janvier. Ajouter 30% revient à multiplier par $\frac{130}{100}$. Fin janvier, l'action a donc atteint la valeur $P' = \frac{130}{100}$. Retirer 20% revient à multiplier par $\frac{80}{100}$. Au premier mars, l'action a donc la valeur
$$P'' = \frac{80}{100}P' = \frac{80}{100}\frac{130}{100}P.$$
On simplifie les facteurs 10 et on trouve $P'' = \frac{104}{100}P$. Donc la valeur de l'action a augmenté de 4%.

13. Les nombres réels x, y, z satisfont le système d'équations suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x + 2y + 2z & = & 4 \\ 2x + 2y - 2z & = & -10 \\ 3x - 2y - 3z & = & 0. \end{array}\right.$$
Que vaut $x + y + z$?

1) ♣ 3
2) 6
3) 9
4) Aucune des réponses proposées.

On peut procéder par la méthode du pivot, ou par élimination pour faire disparaître l'inconnue x des deux dernières équations. On obtient alors le système équivalent :
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 2y & - & 6z & = & -18 \\ & - & 8y & - & 9z & = & -12. \end{array}\right.$$
On retire alors 4 fois la deuxième équation de la troisième pour obtenir
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 2y & - & 6z & = & -18 \\ & & & & 15z & = & 60. \end{array}\right.$$
On trouve alors $z = 4$, qui donne $y = -3$ et finalement $x = 2$. On vérifie dans l'équation de départ. Il reste à calculer la somme, qui vaut 3.

14. Il y a 6 ans, une femme avait 5 fois l'âge de sa nièce. Dans 4 ans, elle n'aura plus que trois fois l'âge de sa nièce. Quelle est actuellement la somme de leurs âges ?

1) 66
2) 68
3) 70
4) ♣ Aucune des réponses précédentes.

On note F l'âge actuelle de la femme et N l'âge actuel de sa nièce. On traduit alors les équations et on obtient directement $F - 6 = 5(N - 6)$ et $F + 4 = 3(N + 4)$. On résout ce système d'équations par la méthode que l'on veut, on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} F & = & 5N - 24 \\ F & = & 3N + 8. \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux équations, on obtient

$$\begin{cases} F & = & 5N - 24 \\ 5N - 24 = & 3N + 8. \end{cases}$$

On trouve donc $N = 16$ et $F = 56$. On peut vérifier que les conditions de l'énoncé sont satisfaites. La somme des âges est donc 72.

15. Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A : (1;2)$, $B : (5;6)$ et $C : (2;-8)$. Soit d la parallèle à AB contenant C et $d' \equiv y = 2x$. Soit I l'intersection de d et d'. Quelle est la somme des coordonnées de I ?

1) -15
2) -9
3) -6
4) ♣ Aucune des réponses précédentes.

On calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ On trouve $\overrightarrow{AB} : (4;4)$. On peut donc prendre ce vecteur ou $\overrightarrow{v} : (1;1)$ comme vecteur directeur de d. On a donc

$$d \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+8}{1},$$

ou encore $x = y + 10$. On trouve les coordonnées de l'intersection en résolvant le système formé par les deux équations. On trouve $I : (-10;-20)$. Donc la somme des coordonnées est -30.

16. Soit un triangle ABC tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2$. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut $135°$. Déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|$.

1) $\sqrt{29 - 10\sqrt{2}}$
2) ♣ $\sqrt{29 + 10\sqrt{2}}$
3) 29
4) $29 - 10\sqrt{2}$

On peut faire un dessin pour voir la situation et avoir une idée de la réponse. Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore généralisé, encore appelée règle des cosinus. On a

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{BC}\|\cos(135).$$

On remplace pour trouver

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 25 + 4 - 2.5.2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 29 + 10\sqrt{2}.$$

Il ne reste plus qu'à prendre la racine carrée.

17. Soit ABC un triangle tel que la norme de $\overrightarrow{AB}$ est 5, celle de $\overrightarrow{AC}$ est 2. De plus, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ vaut 8. Quelle est la norme de $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$?

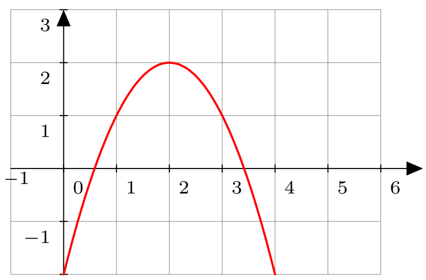
1) 8
2) ♣ $\sqrt{72}$
3) 12
4) $\sqrt{136}$

On utilise le lien entre norme et produit scalaire : on a $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}$. On calcule donc, en utilisant la bilinéarité (distributivité) du produit scalaire,

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \bullet (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 4\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = 4.5^2 - 4.8 + 2^2 = 72$$

Il reste à prendre la racine.

18. Le graphique suivant représente une partie du graphe d'une fonction du second degré f. Que vaut $f(10)$?



1) -66 2) -64 3) ♣ -62 4) -60

On constate sur le graphique qu'on a $f(1) = f(3) = 1$ et $f(2) = 2$. On sait qu'il existe des nombres a, b, c tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout nombre x. On a alors les conditions $a + b + c = 1$, $9a + 3b + c = 1$ et $4a + 2b + c = 2$. On peut aussi se servir de l'équation de l'axe de symétrie, et obtenir $-\frac{b}{2a} = 2$. Traitons le problème avec les trois premières équations, dont la quatrième est une conséquence. On soustrait la première équation de la deuxième pour avoir $8a + 2b = 0$, donc $b = -4a$. On a donc le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 1 \\ b & = & -4a \\ 4a + 2b + c & = & 2. \end{array}\right.$$

On substitue la valeur de b dans la première et la troisième équation. On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3a + c & = & 1 \\ b & = & -4a \\ -4a + c & = & 2. \end{array}\right.$$

En soustrayant la troisième équation de la première, on obtient $a = -1$, puis $b = 4$ et $c = -2$. On trouve donc $f(10) = -100 + 4.10 - 2 = -62$.

19. Le montant de la facture de mon téléphone fixe s'exprime en fonction du nombre de minutes de communication, à l'aide d'une fonction du premier degré. Pour 100 minutes, je paie 21 euros et pour trois heures et vingt minutes, je paie 36 euros. Combien paierais-je pour cinq heures de communication ?

1) ♣ 51 euros
2) 53 euros
3) 55 euros
4) 57 euros

Notons f le montant de la facture en fonctions du nombre de minutes d'appels, noté n. Par définition, il existe des nombres a et b (ou m et p si vous préférez) tels que

$$f(n) = an + b$$

pour tout n. On exprime les conditions $f(100) = 21$ et $f(200) = 36$. On a donc $100a + b = 21$ et $200a + b = 36$. Ces conditions donnent $a = \frac{15}{100}$ et $b = 6$. Cinq heures correspondent à 300 minutes. On paiera donc $300a + b = 300\frac{15}{100} + 6$.

20. Que vaut la limite $\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-3)(2x+3)}{x^2(x-3)}$?

1) $\frac{0}{0}$
2) ♣ $\frac{1}{3}$
3) $+\infty$
4) Elle n'est pas définie.

On essaie bien sûr d'appliquer le théorème sur les limites de quotients. Le numérateur et le dénominateur sont des fonctions continues. Il suffit donc, pour calculer la limite, de calculer leur valeur en 3. Ils tendent tous les deux vers 0. Cependant $\frac{0}{0}$ n'est pas une réponse acceptable. On constate que la fonction dont on veut calculer la limite s'écrit aussi comme un produit :

$$\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(2x+3)}{x^2(x-3)} = \frac{(\sqrt{2x+3}-3)}{x-3}\,\frac{(2x+3)}{x^2}$$

Le second facteur du membre de droite tend vers 1 quand x tend vers 3. On peut donc essayer d'appliquer le résultat sur les produits, en calculant

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x-6)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}.$$

Par le théorème de prolongement, on peut simplifier le facteur commun $x - 3$,et garder la même limite. Le théorème sur les quotients s'applique alors et la limite vaut $\frac{1}{3}$.

21. Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $f'(x) = -\frac{1}{1+x^{-2}}$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la fonction f ?

1) $f(1) < f(10)$

2) ♣ $f(1) > f(10)$

3) f est à valeurs strictement positives.

4) f est à valeurs strictement négatives.

L'énoncé permet de déduire que sur $]0, +\infty[$, la dérivée de f est strictement négative. Donc la fonction f est strictement décroissante sur cette intervalle. On peut donc déduire $f(1) > f(10)$.
On pouvait rejeter directement les deux dernières propositions, puisque, ayant une fonction f satisfaisant les conditions de l'énoncé, on peut toujours lui ajouter une constante arbitraire. Les conditions de l'énoncé ne peuvent donc pas impliquer qu'elle ait un signe constant.

22. Que vaut l'intégrale $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \pi x \cos(\pi x^2) \mathrm{d}x$?

1) -1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) ♣ $\frac{1}{2}$ 4) 1

Il faut d'abord primitiver la fonction que l'on souhaite intégrer. C'est une primitive par substitution, presque directe (si on veut appliquer la méthode de substitution, on pose $u = \pi x^2$). On constate que la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x^2)$$

a pour dérivée la fonction f telle que $f(x) = \pi x \cos(\pi x^2)$. Il reste à calculer $F(\sqrt{\frac{1}{2}}) - F(0) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2})$.

23. Que vaut la primitive $\int xe^{2x} \mathrm{d}x$, à une constante près, sur $\mathbb{R}$?

1) $\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}$

2) ♣ $\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$

3) $\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}$

4) $\frac{1}{4}x^2e^{2x}$

Par définition des primitives, il suffit de dériver les réponses proposées et voir laquelle a une dérivée égale à xe^{2x}, pour tout x. On peut aussi appliquer la technique de primitivation par parties. Pour la deuxième proposition, on trouve

$$(\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x})' = \frac{1}{4}(2e^{2x} + (2x-1)2e^{2x}) = xe^{2x}.$$

24. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par leurs composantes dans un repère orthonormé positif de l'espace :

$$\overrightarrow{u} : (1, -1, -3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} : (-1, 0, 2).$$

Comment le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ s'exprime-t-il dans ce repère ?

1) $(-2; 5; 1)$

2) $(-2; 5; -1)$

3) $(-2; -1; -1)$

4) ♣ $(-2; 1; -1)$

Il suffit d'appliquer la formule bien connue, sans oublier le signe sur la deuxième composante. On peut aussi remarquer que la réponse proposée est la seule qui désigne un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Voici pour l'application de la formule :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} : ((-1).2 - 0.(-3); -(1.2 - (-1).(-3)); 1.0 - (-1).(-1)) = (-2; 1; -1).$$

25. On se place dans un repère du plan et on se donne les points $A : (1, 0)$, $B : (3, 4)$ et $C : (1, 8)$. Soit X le point du plan tel que $4\overrightarrow{AX} - 3\overrightarrow{BX} + 2\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{0}$. Quelle est la somme des coordonnées de X ?

1) -2 2) $-\frac{1}{3}$ 3) ♣ $\frac{1}{3}$ 4) 2

On note $X : (x; y)$ et on calcule les composantes des vecteurs impliqués dans l'énoncé. On a $\overrightarrow{AX} : (x-1; y)$, $\overrightarrow{BX} : (x-3; y-4)$ et $\overrightarrow{CX} : (x-1; y-8)$. La condition de l'énoncé est alors équivalente à un système d'équations :

$$\begin{cases} 4(x-1) - 3(x-3) + 2(x-1) & = & 0 \\ 4y - 3(y-4) + 2(y-8) & = & 0 \end{cases}$$

qui donne $x = -1$ et $y = \frac{4}{3}$. On a donc $x + y = \frac{1}{3}$.