Algèbre des symétries d'opérateurs différentiels invariants - les opérateurs de Dirac et de Laplace

Jean-Philippe Michel
(Université de Liège)

en collaboration avec Josef Šilhan (Masaryk University)

Introduction aux algèbres de symétries d'opérateurs différentiels

Définition

Soit $D \in \mathcal{D}(M; E, F)$ *un opérateur différentiel. Un op. diff.* $A \in \mathcal{D}(M, E)$ *est:*

- *une symétrie si* $D \circ A = B \circ D$,
- *une symétrie triviale si* $A = B_0 \circ D$.

Introduction aux algèbres de symétries d'opérateurs différentiels

Définition

Soit $D \in \mathcal{D}(M; E, F)$ un opérateur différentiel. Un op. diff. $A \in \mathcal{D}(M, E)$ est:

- *une symétrie si $D \circ A = B \circ D$,*
- *une symétrie triviale si $A = B_0 \circ D$.*

Questions:

- Classifier les symétries (en termes de leurs symboles). Si D est un op. invariant: signification géométrique. Si D est $\mathfrak{g}$-invariant: structure de $\mathfrak{g}$-module.
- Ecriture explicite des symétries.
- Structure d'algèbre des symétries (modulo les symétries triviales): générateurs et relations.

Examples

Cas connus sur M (loc.) plate :

- le laplacien Δ [Eastwood, Ann. of Math. '05], ses puissances Δ^k [Gover-Šilhan, JMP '12],
- l'opérateur de Dirac $\not{D}$ [Eastwood-Somberg-Souček],
- le sous-laplacien CR [Vlasáková, '12],
- l'opérateur de Schrödinger [Bekaert-Meunier-Moroz, JHEP '12]

Algèbres de symétries $= \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$, avec $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{Vect}(M)$ agissant par dérivée de Lie sur $\Gamma(E)$.

Sur une variété conforme $(M, [\mathrm{g}])$ **arbitraire**:

- les symétries d'ordre 2 du laplacien conforme sont classifiés [M.-Radoux-Šilhan, SIGMA '14],
- en dimension 4, les symétries d'ordre 2 des opérateurs de Dirac et Maxwell sont classifiés [Andersson,... '14],

Conjecture

Cadre: E et F deux fibrés homogènes irréductibles sur $M = G/P$, et $D \in \mathcal{D}(M; E, F)$ un op. diff. G-invariant.

Conjecture

- *Le $\mathfrak{g}$-module des symétries de D d'ordre k est de dimension finie.*
- *L'algèbre des symétries de D est un quotient $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$.*
- *L'idéal $\mathcal{J}$ est l'annulateur de $\ker D$.*

Conjecture

Cadre: E et F deux fibrés homogènes irréductibles sur $M = G/P$, et $D \in \mathcal{D}(M; E, F)$ un op. diff. G-invariant.

Conjecture

- *Le $\mathfrak{g}$-module des symétries de D d'ordre k est de dimension finie.*
- *L'algèbre des symétries de D est un quotient $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$.*
- *L'idéal $\mathcal{J}$ est l'annulateur de $\ker D$.*

Qu'en est-il des symétries de systèmes d'opérateurs différentiels invariants?

Problématique

Déterminer l'algèbre de symétries du système d'op. diff.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}[\frac{n-2}{2n}] \oplus \mathcal{S}[\frac{n-1}{2n}] & \to & \mathcal{S}[\frac{n+1}{2n}] \oplus \mathcal{E}[\frac{n+2}{2n}] \\ \begin{pmatrix} f \\ \phi \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \Delta f \\ \not{D}\phi \end{pmatrix} \end{array}$$

Problématique

Déterminer l'algèbre de symétries du système d'op. diff.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}[\frac{n-2}{2n}] \oplus \mathcal{S}[\frac{n-1}{2n}] & \to & \mathcal{S}[\frac{n+1}{2n}] \oplus \mathcal{E}[\frac{n+2}{2n}] \\ \begin{pmatrix} f \\ \phi \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \Delta f \\ \not{D}\phi \end{pmatrix} \end{array}$$

Les symétries sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \not{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha^- \\ \alpha^+ & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \beta^+ \\ \beta^- & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \not{D} \end{pmatrix}$$

avec les nouvelles symétries

$$\Delta\alpha^- = \beta^+\not{D} \quad \text{sur } \mathcal{S}[\tfrac{n-1}{2n}] \qquad \text{and} \qquad \not{D}\alpha^+ = \beta^-\Delta \quad \text{sur } \mathcal{E}[\tfrac{n-2}{2n}]$$

1. Introduction
2. Préliminaires
   - Géométrie parabolique homogène
   - Opérateurs différentiels invariants et résolution BGG
   - Quantification équivariante
3. Classification des symétries
   - Symétries du laplacien
   - Symétries de l'opérateur de Dirac
   - Symétries du système $\Delta \oplus \not{D}$
4. Algèbre de symétries
   - Nouvelles symétries: les twisteur-spineurs
   - Reformulation supergéometrique
   - Résultat principal

Géométrie parabolique homogène

- $M = G/P$ avec G groupe de Lie simple et P sous-groupe parabolique,
- $Lie(G) = \mathfrak{g}$ est $|k|$-graduée (sur $\mathbb{Z}$), $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$,
- $Lie(P) = \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, $\mathfrak{g}_0$ facteur de Levi,
- fibré homogène irréductible: $E = G \times_\rho \mathbb{E}$, avec $\rho : P \to \mathrm{End}(\mathbb{E})$ rep. irred.

Exemple: géométrie conforme

- modèle homogène: $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \cong \mathrm{SO}(p+1, q+1)/(\mathrm{CO}(p,q) \ltimes \mathbb{R}^n)$,
- algèbre de Lie: $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1, q+1) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{o}(p,q) \times \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}^n)^*$,
- fibrés homogènes: densités $\mathcal{E}[\lambda] \cong \Gamma(|\mathrm{Det}\, M|^\lambda)$, formes différentiels $\wedge^k T^*M$, tenseurs symétriques $\Gamma(\mathcal{S}^k TM)$, fibré des spineurs $\mathcal{S}$.

Opérateurs différentiels invariant et résolution BGG

La correspondence:

$$D \in \mathcal{D}(M; E, F)^G \longleftrightarrow \phi : V(\mathbb{F}) \to V(\mathbb{E}),$$

permet de classifier les opérateurs G-invariants.

Résolution BGG: Soit $\mathbb{W}$ une représentation irréductible de dimension finie de G. Il existe une résolution finie de $\mathbb{W}$ donnée par des op. diff. inv. sur G/P

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{\mathbf{G_0}} \Gamma(E_1) \xrightarrow{\mathbf{G_1}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{G_{n-1}}} \Gamma(E_n) \longrightarrow 0,$$

i.e. $\ker \mathbf{G}_0 \cong \mathbb{W}$, [Čap-Slovàk-Souček, Ann. of Math. '01].

Exemples en géométrie conforme:

- $E_0 = TM$, $\ker \mathbf{G}_0 \cong \mathfrak{g}$, vecteurs Killing conformes;
- $\Gamma(E_0) = \mathcal{E}[-1/n]$, $\ker \mathbf{G}_0$ est isomorphe à la représentation standard, facteurs d'Einstein;

Quantification équivariante

Supposons que G/P définisse une géométrie parabolique $|1|$-graduée.

Théorème (Čap-Šilhan, Adv. Math. '10)

il existe un isomorphisme linéaire

$$\mathcal{Q} : \Gamma(\mathcal{S}TM) \otimes \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{D}(M; E, F)$$

qui est $\mathfrak{g}$-équivariant et compatible avec le symbole principal .

Quantification équivariante

Supposons que G/P définisse une géométrie parabolique $|1|$-graduée.

Théorème (Čap-Šilhan, Adv. Math. '10)

Pour λ, μ génériques, il existe un isomorphisme linéaire

$$\mathcal{Q}_{\lambda,\mu} : \Gamma(\mathcal{S}TM) \otimes \mathcal{L}(E[\lambda], F[\mu]) \to \mathcal{D}(M; E[\lambda], F[\mu])$$

qui est $\mathfrak{g}$-équivariant et compatible avec le symbole principal .

Quantification équivariante

Supposons que G/P définisse une géométrie parabolique $|1|$-graduée.

Théorème (Čap-Šilhan, Adv. Math. '10)

Pour λ, μ génériques, il existe un isomorphisme linéaire

$$\mathcal{Q}_{\lambda,\mu} : \Gamma(\mathcal{S}TM) \otimes \mathcal{L}(E[\lambda], F[\mu]) \to \mathcal{D}(M; E[\lambda], F[\mu])$$

qui est $\mathfrak{g}$-équivariant et compatible avec le symbole principal .

- Unicité et existence de la quantification $\mathfrak{g}$-équivariante dépendent de l'existence d'opérateurs invariants sur l'espace des symboles [M., SIGMA '12].
- La quantification $\mathfrak{g}$-équivariante est unique si E et F sont des fibrés en ligne de densités.
- Dans le cas conforme, la quantification équivariante est unique si E et F sont des fibrés spinoriels [M., CMP '12].

Symétries du laplacien [Eastwwod, Ann. Math. 2005][M., AIF 2014]

$$\Delta : \mathcal{E}[\tfrac{n-2}{2n}] \longrightarrow \mathcal{E}[\tfrac{n+2}{2n}]$$

Opérateur sur les symboles: sur $\Gamma(\mathcal{S}_0^k TM)$ on a $\mathbf{G}_0 K = \nabla_{(i_0} K_{i_1 \cdots i_k)_0}$,

$$\ker \mathbf{G}_0 = \{\text{tenseurs Killing conformes symétriques}\} \cong \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline \end{array}$$

Théorème

La quantification équivariante $\mathcal{Q}_{\frac{n-2}{2n}}$ induit une bijection entre tenseurs KC symétriques et symétries du laplacien: $\Delta \circ \mathcal{Q}_{\frac{n-2}{2n}}(K) = \mathcal{Q}_{\frac{n+2}{2n}}(K) \circ \Delta$.

Exemples: [Boyer-Kalnins-Miller, Nagoya Math. J. '76]

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\frac{n-2}{2n}}(X) &= X + \tfrac{n-2}{2n} \partial_i X^i, \\ \mathcal{Q}_{\frac{n-2}{2n}}(K) &= K^{ij} \partial_i \partial_j + \frac{n}{n+2} (\partial_i K^{ij}) \partial_j + \frac{n(n-2)}{4(n+2)(n+1)} (\partial_i \partial_j K^{ij}). \end{aligned}$$

Symétries de l'opérateur de Dirac [Eastwwod-Somberg-Souček][M., Silhan]

$$\not{D} : \mathcal{S}[\tfrac{n-1}{2n}] \longrightarrow \mathcal{S}[\tfrac{n+1}{2n}]$$

Opérateur sur les symboles: sur $\Gamma(\mathcal{S}^k_0 TM \otimes_0 \wedge^\kappa T^*M\,[-\kappa/n])$ on a $\Pi(\nabla_{(i_0} K_{i_1\cdots i_k)[j_1\cdots j_\kappa]}) = 0$, avec Π une certaine projection,

$$\ker \mathbf{G}_0 = \{\text{tenseurs Killing conformes"mixtes"}\} \cong \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \cdots & \\ \hline & \cdots & \\ \hline \vdots \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Théorème

La quantification équivariante $\mathcal{Q}_{\frac{n-1}{2n}}$ induit une bijection entre tenseurs KC "mixtes" et symétries de l'op. de Dirac: $\not{D} \circ \mathcal{Q}_{\frac{n-1}{2n}}(K) = \mathcal{Q}_{\frac{n+1}{2n}}(K) \circ \not{D}$.

Exemples: [Benn-Charlton, Class. Quant. Grav. '97]

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\frac{n-1}{2n}}(X) &= X - \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{d}X^\flat) + \tfrac{n-1}{2n}(\partial_i X^i), \\ \mathcal{Q}_{\frac{n-1}{2n}}(K) &= \mathrm{g}^{ij}\gamma(\iota_{e_i}K)\nabla_{e_j} - \frac{\kappa}{\kappa+1}\gamma(\boldsymbol{d}K) + \frac{n-\kappa}{2(n+1-\kappa)}\gamma(\boldsymbol{\delta}K). \end{aligned}$$

Symétries du système $\Delta \oplus \not{D}$

Opérateur sur les symboles: sur $\mathcal{S}[-\frac{1}{2n}]$ on a $\mathbf{G}_0\Lambda = \nabla_i\Lambda + \frac{1}{n}\gamma_i(\not{D}\Lambda)$,

$$\ker \mathbf{G}_0 = \{\text{twisteur-spineurs}\} \cong \{\text{module des spineurs de } \mathfrak{g}\}$$

Exemples: [Wess-Zumino, Nucl. Phys. B '74]

$$\Delta\alpha_\Lambda^- = \beta_\Lambda^+\not{D}, \quad \begin{cases} \alpha_\Lambda^-(\phi) = \varepsilon(\Lambda,\phi), \\ \beta_\Lambda^+(\not{D}\phi) = \varepsilon(\Lambda, \not{D}^2\phi) + \frac{2}{n}\varepsilon(\not{D}\Lambda, \not{D}\phi), \end{cases} \quad \phi \in \mathcal{S}[\tfrac{n-1}{2n}];$$

$$\not{D}\alpha_\Lambda^+ = \beta_\Lambda^-\Delta, \quad \begin{cases} \alpha_\Lambda^+(f) = \gamma^i(\Lambda)\partial_i f + \frac{n-2}{n}(\not{D}\Lambda)\cdot f, \\ \beta_\Lambda^-(\Delta f) = \Lambda\cdot\Delta f, \end{cases} \quad f \in \mathcal{E}[\tfrac{n-2}{2n}].$$

Théorème

La matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} a & \alpha^- \\ \alpha^+ & A \end{pmatrix}$ *est une symétrie ssi*

- *a est une sym. de Δ et A est une sym. de $\not{D}$,*
- *$\alpha^- = \sum_i a_i \circ \alpha_{\Lambda_i}^-$, avec a_i sym. de Δ et $\alpha_{\Lambda_i}^-$ comme ci-dessus,*
- *$\alpha^+ = \sum_i \alpha_{\Lambda_i}^+ \circ a_i$, avec a_i sym. de Δ et $\alpha_{\Lambda_i}^+$ comme ci-dessus.*

Composition de l'action des twisteurs-spineurs

(super-)algèbre de Lie ?

Candidat: champs de vecteurs KC $\oplus$ Twisteurs-spineurs.

Compositions possibles:

- en dimension impaire, $\mathrm{TwSp} \otimes \mathrm{TwSp} \cong \wedge^+ \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace des formes impaires KC;
- en dimension paire, $\mathrm{TwSp} \otimes \mathrm{TwSp} \cong \wedge \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace de toutes les formes KC, tandis que $\mathrm{TwSp}^+ \otimes \mathrm{TwSp}^- \cong \wedge^+ \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace des formes imapires KC;

Fait: pour $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{TwSp}$, les compositions $\alpha^+_{\Lambda'} \circ \alpha^-_{\Lambda}$ engendrent toutes les symétries d'ordre 1 de $\not{D}$.

$\Rightarrow$ l'algèbre des symétries n'est pas engendrée par une (super-)algèbre de Lie!

Composition de l'action des twisteurs-spineurs

(super-)algèbre de Lie ?

Candidat: champs de vecteurs KC $\oplus$ Twisteurs-spineurs.

Compositions possibles:

- en dimension impaire, $\mathrm{TwSp} \otimes \mathrm{TwSp} \cong \wedge^+ \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace des formes impaires KC;
- en dimension paire, $\mathrm{TwSp} \otimes \mathrm{TwSp} \cong \wedge \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace de toutes les formes KC, tandis que $\mathrm{TwSp}^+ \otimes \mathrm{TwSp}^- \cong \wedge^+ \mathbb{C}^{n+2} \cong$ espace des formes imapires KC;

Fait: pour $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{TwSp}$, les compositions $\alpha^+_{\Lambda'} \circ \alpha^-_{\Lambda}$ engendrent toutes les symétries d'ordre 1 de $\not{D}$.

$\Rightarrow$ l'algèbre des symétries n'est pas engendrée par une (super-)algèbre de Lie!

Idée: Si dimension=3 (ou 4 et $\not{D} : S^+ \to S^-$), alors les symétries d'ordre 1 de $\not{D}$ sont données par l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n+2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ et nous avons

$$\mathfrak{o}(5) \cong \mathfrak{sp}(4) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{o}(6) \cong \mathfrak{sl}(4).$$

Reformulation supergéometrique

$\Pi S^* \cong \mathbb{R}^{3|2}$ est une supervariété, de faisceaux de fonctions

$$\mathcal{O}(\Pi S^*) = \mathcal{E} \oplus \mathcal{S} \oplus \wedge^2 \mathcal{S}.$$

On définit

$$\boxslash : \mathcal{O}\Big(\Pi S^*[-\tfrac{1}{2n}]\Big)[\tfrac{n-2}{2n}] \to \mathcal{O}\Big(\Pi S^*[-\tfrac{1}{2n}]\Big)[\tfrac{1}{2}]$$

par la formule $\boxslash := \varepsilon\Delta + \not{D} + \varepsilon^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \not{D} & 0 \\ \Delta & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

L'algèbre des symétries de $\boxslash$ est isomorphe à celle de $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \not{D} \end{pmatrix}$.

Les twisteur-spineurs comme champs de vecteurs impaires

Soit (x^i, θ^a) des coordonées de $\mathbb{R}^{3|2}$ et $(\partial_i, \partial_{\theta^a})$ les dérivations correspondentes.

Sur $\mathcal{O}\Big(\Pi S^*[-\frac{1}{2n}]\Big)[\lambda]$, on définit

- $L_X = X^i\partial_i - \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{d}X^\flat)_a^b\theta^a\partial_{\theta^b} + (\lambda + \frac{1}{2n}\theta^a\partial_{\theta^a})(\partial_i X^i)$,
- $L_\Lambda^+ = \gamma^i{}_b^a\Lambda_a\theta^b\partial_i + 2(\lambda + \frac{n-1}{n}\theta^a\partial_{\theta^a})(\not{D}\Lambda)$,
- $L_\Lambda^- = \varepsilon^{ab}\Lambda_a\partial_{\theta^b}$.

On obtient

$$\boxslash L_X = L_X\boxslash, \qquad \boxslash L_\Lambda^+ = L_\Lambda^-\boxslash, \qquad \boxslash L_\Lambda^- = L_\Lambda^+\boxslash\,.$$

Proposition

L'espace $\langle c, L_X\rangle \oplus \langle L_\Lambda^+, L_\Lambda^-\rangle$ est stable par commutation dans $\mathcal{D}_\lambda(\mathbb{R}^{3|2})$ et isomorphe à la super-algèbre de Lie $\mathrm{spo}(4|2)$.

Résultat principal

Théorème

L'algèbre de symétries de $\Box$ *et* $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \not{D} \end{pmatrix}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{U}(\mathfrak{spo}(4|2))/\mathcal{J}$, *avec* $\mathcal{J}$ *un idéal de "type" Joseph* [Coulembier-Somberg-Souček, IMRN '13].