Déformations d'orbites coadjointes et symétries d'opérateurs différentiels

Jean-Philippe Michel

Université de Liège

Colloque à la mémoire de Georges Pinczon

Le concept de quantification

	Classique	Quantique
Espace des phases	$(\mathcal{M}, \omega)$ variété symplectique	$\mathcal{H}$ espace de Hilbert
Observables	$A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ algèbre de Poisson	$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ algèbre associative
Symétries	$G \subset \mathrm{Sympl}(\mathcal{M}, \omega)$	$G \subset \mathrm{U}(\mathcal{H})$

Le concept de quantification

	Classique	Quantique
Espace des phases	$(\mathcal{M}, \omega)$ variété symplectique	$\mathcal{H}$ espace de Hilbert
Observables	$A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ algèbre de Poisson	$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ algèbre associative
Symétries	$G \subset \mathrm{Sympl}(\mathcal{M}, \omega)$	$G \subset \mathrm{U}(\mathcal{H})$

Si $\mathcal{A}$ est filtrée sur $\mathbb{N}$ et $A \cong \mathrm{gr}\mathcal{A}$, alors une quantification est un isomorphisme linéaire (G-équivariant)

$$\mathcal{Q} : A \to \mathcal{A},$$

ou plutôt de $\mathcal{Q}_\hbar := \mathcal{Q} \circ \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^k \mathrm{Id}$ sur A_k, tel que $\sigma_k \circ \mathcal{Q} = \mathrm{Id}$. La donnée de $\mathcal{Q}_\hbar$ est équivalente à :

- une déformation associative $(A[[\hbar]], \star_\hbar)$ graduée (et G-équivariante),
  $f \star_\hbar g = fg + \Sigma_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^k B_k(f, g)$,
- une représentation de l'algèbre $(A[[\hbar]], \star_\hbar)$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Exemple : la quantification de Weyl

Sur $T^*\mathbb{R}^n$, il existe une unique quantification

$$\mathcal{Q}_\hbar : \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

qui est équivariante sous l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Le star-produit associé est le produit de Moyal, c'est l'unique star-produit $\mathfrak{sp}_{2n}$-équivariant de $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$, i.e. tel que $[\mu_X, f]_{\star_\hbar} = L_X f$ pour tout $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$, $f \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$.

- $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est l'orbite coadjointe minimale de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$,
- l'action de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ s'intègre en la représentation métapectique, qui est (de dimension de Gelfand-Kirillov) minimale.

Exemple : la quantification de Weyl

Sur $T^*\mathbb{R}^n$, il existe une unique quantification

$$\mathcal{Q}_\hbar : \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

qui est équivariante sous l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Le star-produit associé est le produit de Moyal, c'est l'unique star-produit $\mathfrak{sp}_{2n}$-équivariant de $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$, i.e. tel que $[\mu_X, f]_{\star_\hbar} = L_X f$ pour tout $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$, $f \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}^n)$.

- $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est l'orbite coadjointe minimale de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$,
- l'action de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ s'intègre en la représentation métapectique, qui est (de dimension de Gelfand-Kirillov) minimale.

Question : existe-t'il une quantification et un star-produit analogue pour les autres groupes classiques simples, comme $\mathrm{Sl(n, \mathbb{R})}$ et $\mathrm{O}(p, q)$?

Quantification par déformations d'orbites coadjointes

Soit G un groupe de Lie algébrique, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $G^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ leurs complexifiés. Fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$: $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \cong \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

Proposition

Les star-produits $\star_\hbar$ gradués $\mathfrak{g}$-équivariants sur $\mathfrak{g}^*$ sont tous obtenus à partir de quantifications $\mathfrak{g}$-équivariantes

$$\mathcal{Q} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}).$$

Quantification par déformations d'orbites coadjointes

Soit G un groupe de Lie algébrique, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $G^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ leurs complexifiés. Fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$: $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \cong \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

Proposition

Les star-produits $\star_\hbar$ gradués $\mathfrak{g}$-équivariants sur $\mathfrak{g}^*$ sont tous obtenus à partir de quantifications $\mathfrak{g}$-équivariantes

$$\mathcal{Q} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}).$$

Quantification d'une orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$?

Fonctions régulières sur $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$, orbite coadjointe de G : $\mathbb{C}[\bar{\mathcal{O}}] \cong \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})/I$. Le star-produit $\star_\hbar$ est tangent à $\mathcal{O}$ si et seulement si $\mathcal{Q}(I)$ est un idéal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

Résultats :

- il n'existe pas de star-produit différentiel tangent à toutes les orbites dans un voisinage de $\{0\}$ si G est semi-simple [Cahen-Gutt-Rawnsley, '96],
- Si G est (complexe ou réel compact) semi-simple, pour toute orbite semi-simple il existe un star-produit qui lui est tangent [(Fioresi-)Lledo, '01].

Idéal de Joseph et orbites coadjointes minimales

On suppose de plus que G est un groupe de Lie simple. Alors $G^{\mathbb{C}}$ admet une unique orbite coadjointe non nulle de dimension minimale, notée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{min}}$.

Théorème (Joseph, '76)

Si $G^{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie simple complexe et $G^{\mathbb{C}} \neq A_n$, alors il existe un unique idéal $\mathcal{J} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ complètement premier et de variété associée $\bar{\mathcal{O}}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{min}}$.
Si $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et $n > 2$, alors il existe une famille à un paramètre $(\mathcal{J}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ remplissant ces conditions.

Idéal de Joseph et orbites coadjointes minimales

On suppose de plus que G est un groupe de Lie simple. Alors $G^{\mathbb{C}}$ admet une unique orbite coadjointe non nulle de dimension minimale, notée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}_{\min}$.

Théorème (Joseph, '76)

Si $G^{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie simple complexe et $G^{\mathbb{C}} \neq A_n$, alors il existe un unique idéal $\mathcal{J} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ complètement premier et de variété associée $\bar{\mathcal{O}}^{\mathbb{C}}_{\min}$.
Si $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et $n > 2$, alors il existe une famille à un paramètre $(\mathcal{J}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ remplissant ces conditions.

Propriété : $\mathrm{gr}\mathcal{J}$ est égal à l'idéal I_0 des fonctions nulles sur $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}_{\min}$.

Théorème (Arnal-Benamor-Cortet, '94 ; Astashkevich-Brylinski, '02)

Il existe une unique quantification $\mathfrak{g}$-équivariante $\mathcal{Q}^{(\lambda)}_{\hbar} : \mathrm{S}(\mathfrak{g})/I_0 \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}_{(\lambda)}$ et un unique star-produit $\star^{(\lambda)}_{\hbar}$ $\mathfrak{g}$-équivariant sur $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}_{\min}$. Si $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, le star-produit est symétrique pour une unique valeur de λ.

Opérateurs différentiels sur des espaces homogènes

• Soit G un groupe de Lie simple et P un sous-groupe parabolique. Alors $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{Vect}(G/P)$ hérite d'une $|k|$-graduation, et $\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \cong T_x G/P$ définit un drapeau invariant.
Application moment $\mu : T^*G/P \to \mathfrak{g}^*$, à valeurs dans les orbites nilpotentes, par dualité

$$\mu^* : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Pol}(T^*G/P),$$

de noyau $I \subset \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

• Soit $\mathcal{D}^\lambda(G/P)$ l'espace des opérateurs différentiels sur G/P, agissant sur la puissance $\lambda \in \mathbb{C}$ du fibré canonique. Par dérivée de Lie, on a

$$L : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \to \mathcal{D}^\lambda(G/P),$$

de noyau $\mathcal{J}^\lambda$ tel que $\mathrm{gr}\mathcal{J}^\lambda \cong I$.

Opérateurs différentiels sur des espaces homogènes (II)

Théorème (Boniver-Mathonet, '06 ; Čap-Šilhan, '10)

Dans le cas $|1|$*-gradué, il existe une unique quantification* G*-équivariante* $\mathcal{Q}^\lambda : \mathrm{Pol}(T^*G/P) \to \mathcal{D}^\lambda(G/P)$*. Elle satisfait le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pol}(T^*G/P) \arrow[r, "\mathcal{Q}^\lambda"] & \mathcal{D}^\lambda(G/P) \\ \mathrm{S}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})/I \arrow[u, "\mu^*"] \arrow[r] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})/\mathcal{J}^\lambda \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Si G est complexe ou réel compact $\mu(T^*G/P)$ contient une orbite dense : l'orbite de Richardson associée à P. Via la quantification G-équivariante, cette orbite hérite d'un star-produit $\mathfrak{g}$-équivariant qui se représente par opérateurs différentiels sur G/P.

Quantification de l'orbite minimale projective réelle

Sur l'espace homogène $\mathbb{RP}^n$, il existe une unique quantification $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$-équivariante et elle satisfait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{RP}^n) \arrow[r, "\mathcal{Q}^\lambda"] & \mathcal{D}^\lambda(\mathbb{RP}^n) \\ \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_{n+1})/I \arrow[u, "\mu^*"] \arrow[r] & \mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_{n+1})/\mathcal{J}^\lambda \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

On a $\mathcal{O}_{\min} = T^*\mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$, d'où $\mathbb{C}[\bar{\mathcal{O}}_{\min}] \cong \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_{n+1})/I$ et $\mathcal{J}^\lambda$ est l'un des idéaux de Joseph. Le star-produit obtenu est symétrique si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$.

Quantification de l'orbite minimale projective réelle

Sur l'espace homogène $\mathbb{RP}^n$, il existe une unique quantification $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$-équivariante et elle satisfait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{RP}^n) \arrow[r, "\mathcal{Q}^\lambda"] & \mathcal{D}^\lambda(\mathbb{RP}^n) \\ \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_{n+1})/I \arrow[u, "\mu^*"] \arrow[r] & \mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_{n+1})/\mathcal{J}^\lambda \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

On a $\mathcal{O}_{\min} = T^*\mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$, d'où $\mathbb{C}[\bar{\mathcal{O}}_{\min}] \cong \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_{n+1})/I$ et $\mathcal{J}^\lambda$ est l'un des idéaux de Joseph. Le star-produit obtenu est symétrique si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$.

La déformation de l'orbite minimale $T^*\mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$ se réalise comme sous algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathbb{RP}^n$.

Symétries d'opérateurs différentiels G-invariants

Soit $P \in \mathcal{D}^{\lambda,\mu}(G/P)$ un opérateur différentiel G-invariant. On introduit l'espace des symétries de P,

$$\mathrm{Sym}(P) := \{\text{op. diff.} D_1 | \exists D_2, PD_1 = D_2P\}/(P).$$

Son espace de symboles est $\mathrm{grSym}(P)$.

Théorème (M. '12)

Dans le cas $|1|$-gradué, la quantification G-équivariante $\mathcal{Q}^\lambda$ induit un isomorphisme de G-module $\mathcal{Q}^\lambda : \mathrm{grSym}(P) \to \mathrm{Sym}(P)$.

Quantification de l'orbite minimale conforme réelle

Si $G = \mathrm{O}(p+1, q+1) \curvearrowright \mathbb{S}^{p,q} := \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$, alors les opérateurs invariants P sont de la forme $\Delta^k + t.o.f.$

Pour $P = \Delta_Y = \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)} R$, l'espace $\mathrm{grSym}(P)$ s'identifie aux symétries du flot géodésique nul, obtenues par réduction symplectique par rapport à $H = \sigma(\Delta_Y)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grSym}(\Delta_Y) &= \{K \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{S}^{p,q}) | \{K, H\} \in (H)\}/(H) \\ &\cong \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{S}^{p,q}) // \langle H \rangle . \end{aligned}$$

Or, $T^*\mathbb{S}^{p,q} // \langle H \rangle \cong \mathcal{O}_{\min}$ et on a $\mathrm{grSym}(\Delta_Y) \cong \mathbb{C}[\mathcal{O}_{\min}]$. En conséquence, on obtient :

Théorème (Eastwood '05 ; M. '11)

Soit $\mathcal{O}_{min}$ l'orbite coad. min. de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$ et $\mathcal{J}$ l'idéal de Joseph.

$$\mathcal{Q}^\lambda : \mathbb{C}[\bar{\mathcal{O}}_{\min}] \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$$

Quantification de l'orbite minimale conforme réelle

Si $G = \mathrm{O}(p+1, q+1) \curvearrowright \mathbb{S}^{p,q} := \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$, alors les opérateurs invariants P sont de la forme $\Delta^k + t.o.f$.

Pour $P = \Delta_Y = \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)} R$, l'espace $\mathrm{grSym}(P)$ s'identifie aux symétries du flot géodésique nul, obtenues par réduction symplectique par rapport à $H = \sigma(\Delta_Y)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{grSym}(\Delta_Y) &= \{K \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{S}^{p,q}) | \{K, H\} \in (H)\}/(H) \\ &\cong \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{S}^{p,q}) // \langle H \rangle . \end{aligned}$$

Or, $T^*\mathbb{S}^{p,q} // \langle H \rangle \cong \mathcal{O}_{\mathrm{min}}$ et on a $\mathrm{grSym}(\Delta_Y) \cong \mathbb{C}[\mathcal{O}_{\mathrm{min}}]$. En conséquence, on obtient :

Théorème (Eastwood '05 ; M. '11)

Soit $\mathcal{O}_{min}$ l'orbite coad. min. de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$ et $\mathcal{J}$ l'idéal de Joseph.

$$\mathcal{Q}^\lambda : \mathbb{C}[\bar{\mathcal{O}}_{\mathrm{min}}] \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$$

La déformation de l'orbite minimale conforme se réalise comme l'algèbre des symétries du laplacien conforme.

Des symétries de l'opérateur de Dirac aux supersymétries

L'opérateur de Dirac agit sur le fibré des spineurs $S = S^+ \oplus S^-$.

- Symétries de $\mathbb{D} : S^+ \to S^- =$ quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, [Eastwood-Somberg-Souček].
- *Symétries de $\mathbb{D} : S \to S$.*
  Super-algèbre de symétrie non-engendrée par $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
- *Symétries du système $\mathbb{D} \oplus \Delta : S \oplus |\Lambda|^{\lambda} \to S \oplus |\Lambda|^{\mu}$.*
  En dimension 3 : quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{spo}(4|2))$, en dimension 4 : quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(4|1))$.