Géometrie projective du supercercle: construction unifiée du birapport et de la dérivée schwarzienne

Jean-Philippe MICHEL (CPT)

Travail en commun avec Christian DUVAL (CPT&UM)

Séminaire GNC-PT

De l'importance du birapport et de la dérivée schwarzienne

1. La géométrie projective
   - Géométrie la plus riche en dimension 1
   - Lien avec la géométrie complexe
2. Le birapport
   - Etude de la sphère de Riemann pointée
   - Coordonnées de l'espace de Teichmüller
3. La dérivée schwarzienne
   - Dérivée de la courbure des graphes dans le plan Lorentzien
   - Lien avec les opérateurs de Sturm-Liouville
   - Cocycle de $\mathrm{Diff}(S^1)$: construction du groupe et de l'algèbre de Virasoro
   - Loi de transformation du tenseur énergie-impulsion en CFT

Sur le supercercle

1. Le birapport : Aoki $'88$ et Manin $'91$ (Giddings et Uehara & Yasui).
2. La dérivée schwarzienne : Friedan $'86$ et Radul $'90$.

Géométrie projective, birapport et dérivée schwarzienne sur le cercle

- La géométrie projective du cercle est définie par l'action par homographies de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, définie sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right).$$

Géométrie projective, birapport et dérivée schwarzienne sur le cercle

- La géométrie projective du cercle est définie par l'action par homographies de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, définie sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right).$$

- Cette action est simplement 3-transitive, d'où elle a un invariant caractéristique à 4 points : le birapport.

Géométrie projective, birapport et dérivée schwarzienne sur le cercle

- La géométrie projective du cercle est définie par l'action par homographies de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, définie sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right).$$

- Cette action est simplement 3-transitive, d'où elle a un invariant caractéristique à 4 points : le birapport.
- La formule de Cartan permet d'en déduire la dérivée schwarzienne de $\Phi \in \mathrm{Diff}_+(\mathrm{S}^1)$,

$$\frac{\Phi^*[t_1,t_2,t_3,t_4]}{[t_1,t_2,t_3,t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi)\rangle (t_1) + O(\varepsilon^3).$$

Le noyau de la dérivée schwarzienne est $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Géométries du supercercle

supergéométrie $\equiv$ supergroupe ?

La donnée de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$, super extension de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, suffit-elle pour construire les supers birapport et dérivée schwarzienne ?

Autres géométries du supercercle : peut-on obtenir de même leurs invariants et cocycles associés ?

Classification des géométries du supercercle ?

1. Le supercercle
   - Définition et structure de contact
   - Les supergroupes $\mathrm{E}(1|1) \subset \mathrm{Aff}(1|1) \subset \mathrm{SpO}_+(2|1)$
2. Construction des invariants
   - Sur le cercle
   - $p|q$-transitivité
   - Résultat principal
3. Des invariants aux cocycles
   - La formule de Cartan
   - Les 1-cocycles euclidien, affine et projectif de $K(1)$
   - Classification des espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$
4. Synthèse
5. Cas du supercercle $S^{1|N}$
6. Perspectives

Le supercercle $S^{1|1}$

Le supercercle $S^{1|1}$: le cercle S^1, muni de l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée des superfonctions $C^\infty(S^{1|1}) = C^\infty(S^1) \otimes \Lambda\mathbb{R} = C^\infty(S^1)[\xi]$ où $\xi^2 = 0$.

Le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$

Le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$: le cercle $\mathbb{S}^1$, muni de l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée des superfonctions $C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}) = C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes \Lambda\mathbb{R} = C^\infty(\mathbb{S}^1)[\xi]$ où $\xi^2 = 0$.

- Si (x, ξ) coordonnées locales d'un superdomaine (affine), toute superfonction s'écrit

$$f(x,\xi) = f_0(x) + \xi f_1(x), \qquad \text{où} \qquad f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$$

Le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$

Le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$: le cercle $\mathbb{S}^1$, muni de l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée des superfonctions $C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}) = C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes \Lambda\mathbb{R} = C^\infty(\mathbb{S}^1)[\xi]$ où $\xi^2 = 0$.

- Si (x, ξ) coordonnées locales d'un superdomaine (affine), toute superfonction s'écrit

$$f(x,\xi) = f_0(x) + \xi f_1(x), \qquad \text{où} \qquad f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$$

- Parité : $|f_0| = 0$, $|\xi f_1| = 1$; règle des signes : $ab = (-1)^{|a|\cdot|b|} ba$.

Le supercercle $\mathrm{S}^{1|1}$

Le supercercle $\mathrm{S}^{1|1}$: le cercle S^1, muni de l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée des superfonctions $C^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) = C^\infty(\mathrm{S}^1) \otimes \Lambda\mathbb{R} = C^\infty(\mathrm{S}^1)[\xi]$ où $\xi^2 = 0$.

- Si (x, ξ) coordonnées locales d'un superdomaine (affine), toute superfonction s'écrit

$$f(x,\xi) = f_0(x) + \xi f_1(x), \qquad \text{où} \qquad f_0, f_1 \in C^\infty(\mathrm{S}^1)$$

- Parité : $|f_0| = 0$, $|\xi f_1| = 1$; règle des signes : $ab = (-1)^{|a|\cdot|b|} ba$.
- Groupe des difféomorphismes : $\mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1}) = \mathrm{Aut}(C^\infty(\mathrm{S}^{1|1}))$. Un difféomorphisme est un couple $\Phi = (\varphi, \psi)$ de superfonctions paire et impaire qui sont de nouvelles coordonnées de $\mathrm{S}^{1|1}$.

Structure de contact du supercercle $S^{1|1}$

Elle est donnée par la direction de la 1-forme de contact

$$\alpha = dx + \xi d\xi$$

Structure de contact du supercercle $S^{1|1}$

Elle est donnée par la direction de la 1-forme de contact

$$\alpha = dx + \xi d\xi$$

- Distribution de contact SUSY générée par la “dérivée covariante”

$$D = \partial_\xi + \xi \partial_x ,$$

Structure de contact du supercercle $S^{1|1}$

Elle est donnée par la direction de la 1-forme de contact

$$\alpha = dx + \xi d\xi$$

- Distribution de contact SUSY générée par la “dérivée covariante”

$$D = \partial_\xi + \xi \partial_x ,$$

- Contactomorphismes : ce sont les automorphismes de $(\mathrm{S}^{1|1}, [\alpha])$:

$$K(1) = \{\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1}) \,|\, \Phi^* \alpha = E_\Phi \, \alpha\}$$

où $E_\Phi = \phi' + \psi\psi'$.

Foncteur de points : points et action de supergroupe

- Soit A une supervariété, un *A-point* de $\mathrm{S}^{1|1}$ est un morphisme

$$A \to \mathrm{S}^{1|1} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) \to \mathcal{A}$$

Foncteur de points : points et action de supergroupe

- Soit A une supervariété, un A-point de $\mathrm{S}^{1|1}$ est un morphisme
$$A \to \mathrm{S}^{1|1} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) \to \mathcal{A}$$

- Notons $\mathrm{S}^{1|1}(A)$ l'ensemble des A-points. La donnée de $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ est équivalente à celle de Φ_A sur $\mathrm{S}^{1|1}(A)$, fonctoriellement en A.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^{1|1} \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{S}^{1|1} \\ A \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\Phi_A(\rho)=\Phi\circ\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Foncteur de points : points et action de supergroupe

- Soit A une supervariété, un A-point de $\mathrm{S}^{1|1}$ est un morphisme

$$A \to \mathrm{S}^{1|1} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1}) \to \mathcal{A}$$

- Notons $\mathrm{S}^{1|1}(A)$ l'ensemble des A-points. La donnée de $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ est équivalente à celle de Φ_A sur $\mathrm{S}^{1|1}(A)$, fonctoriellement en A.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^{1|1} \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{S}^{1|1} \\
A \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\Phi_A(\rho)=\Phi\circ\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

- L'action de $\mathrm{GL}(2|1)$ sur $\mathbb{R}^{2|1}$ est donnée via leurs A-points

$$\begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \\ \xi \end{pmatrix}$$

Le supergroupe $\mathrm{SpO}_+(2|1)$

Définition

Le supergroupe linéaire préservant $\omega = dp \wedge dq + d\theta \wedge d\theta$, la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2|1}$, est noté $SpO(2|1)$. Un élement g de $SpO(2|1)$ s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix}$$

avec 4 équations de contraintes sur les coefficients.

Le supergroupe $\mathrm{SpO}_+(2|1)$

Définition

Le supergroupe linéaire préservant $\omega = dp \wedge dq + d\theta \wedge d\theta$, la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2|1}$, est noté $SpO(2|1)$. Un élement g de $SpO(2|1)$ s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix}$$

avec 4 équations de contraintes sur les coefficients.

Son sous groupe $SpO_+(2|1)$, de bérézinien 1 ($Ber(g) = e + \alpha\beta e^{-1}$), agit fidèlement sur $\mathrm{S}^{1|1}$ par contactomorphismes via les superhomographies :

$$\widehat{g}(x,\xi) = \left(\frac{ax + b + \gamma\xi}{cx + d + \delta\xi}, \frac{\alpha x + \beta + e\xi}{cx + d + \delta\xi} \right)$$

1. Soit $g \in \mathrm{E}(1|1)$ une super translation, l'action de g sur $\mathbb{R}^{1|1}$, plongé dans le supercercle, est de la forme

$$\widehat{g}(x, \xi) = (x + b - \beta\xi, \epsilon(\beta + \xi)),$$

avec $b, \beta \in \mathbb{R}^{1|1}$ et $\epsilon = \pm 1$. La composante connexe à l'identité, $\mathrm{E}_+(1|1)$, est caractérisée par $\epsilon = 1$.

Les sous groupes $\mathrm{E}(1|1)$ et $\mathrm{Aff}(1|1)$ de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$

1. Soit $g \in \mathrm{E}(1|1)$ une super translation, l'action de g sur $\mathbb{R}^{1|1}$, plongé dans le supercercle, est de la forme

$$\widehat{g}(x,\xi) = (x + b - \beta\xi, \epsilon(\beta + \xi)),$$

avec $b, \beta \in \mathbb{R}^{1|1}$ et $\epsilon = \pm 1$. La composante connexe à l'identité, $\mathrm{E}_+(1|1)$, est caractérisée par $\epsilon = 1$.

2. Soit $g \in \mathrm{Aff}(1|1)$, on a

$$\widehat{g}(x,\xi) = (a^2(x + b - \beta\xi), \epsilon a(\beta + \xi))$$

où $(a, b, \beta) \in \mathbb{R}^{2|1}$, avec $a > 0$ et $\epsilon = \pm 1$. La composante connexe à l'identité, $\mathrm{Aff}_+(1|1)$, est caractérisée par $\epsilon = 1$.

Distance, rapport de distance et birapport sur le cercle

- La distance entre deux points est définie par

$$[x_1, x_2] = [0, h(x_2)] = h(x_2) = x_2 - x_1$$

où h est l'unique translation telle que $h(x_1) = 0$.

- Le rapport de distance de trois points est défini par

$$[x_1, x_2, x_3] = [0, 1, h(x_3)] = h(x_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

où h est l'unique transformation affine telle que $h(x_1) = 0$ et $h(x_2) = 1$.

- Le birapport de 4 points est défini par

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\infty, 0, 1, h(x_4)] = h(x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

où h est l'unique homographie telle que $h(x_1) = \infty$, $h(x_2) = 0$ et $h(x_3) = 1$.

Sur la construction d'invariants

Théorème

Soit G un groupe dont l'action sur un espace E est simplement n-transitive et $m = (m_1, \ldots, m_n)$ un n-uplet de points distincts de E. On définit,

$$I_m(t_1, \ldots, t_{n+1}) = h(t_n + 1)$$

où h est l'unique élément de G tel que $h(t) = m$, vérifiant

1. *I_m est G-invariant.*
2. *Si $\Phi \in E!$ préserve I_m alors $\Phi \in G$ (caractéristique).*
3. *Si J est un autre invariant à $n+1$ points, alors $J = f \circ I_m$, avec f une application de E (fondamental).*
4. *Si l est un n-uplet de points distincts de E, alors $I_l = g \circ I_m$, avec $g(m) = l$.*

Introduction de la $p|q$-transitivité

- L'action de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ n'est pas 3-transitive !
  Pour tout triplet de "points" orienté $t_1 = (x_1, \xi_1)$, $t_2 = (x_2, \xi_2)$ et $t_3 = (x_3, \xi_3)$, $\exists! h_\pm \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$ tel que :

  $$h_\pm(t_1) = (\infty, 0), \quad h_\pm(t_2) = (0, 0) \quad \text{et} \quad h_\pm(t_3) = (1, \pm\zeta)$$

  où ζ est uniquement déterminé par t_1, t_2 et t_3.

- L'action de $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ n'est pas 3-transitive !
  Pour tout triplet de "points" orienté $t_1 = (x_1, \xi_1)$, $t_2 = (x_2, \xi_2)$ et $t_3 = (x_3, \xi_3)$, $\exists ! h_\pm \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$ tel que :
  $$h_\pm(t_1) = (\infty, 0), \quad h_\pm(t_2) = (0,0) \quad \text{et} \quad h_\pm(t_3) = (1, \pm\zeta)$$
  où ζ est uniquement déterminé par t_1, t_2 et t_3.
- On introduit la $p|q$-transitivité (pour $p > q$).
  On définit, sur les p-uplets de $E_0 \times E_1$, la relation d'équivalence $s \overset{p|q}{=} t$, par
  $$\forall i \leq p, \quad p_0(s_i) = p_0(t_i) \quad \text{et} \quad \forall i \leq q, \quad p_1(s_i) = p_1(t_i).$$
  On note $[t]$ la classe de t pour cette relation d'équivalence.
  L'action de G est $p|q$-transitive : $\forall s, t, \ \exists g \in G \quad \text{t.q.} \quad g(s) \overset{p|q}{=} t$.

Sur la construction d'invariants : cas super

Théorème

Soit G un groupe dont l'action sur un espace $E = E_0 \times E_1$ est simplement $p|q$-transitive et $m = (m_1, \ldots, m_p)$ un p-uplet de points distincts de E. On définit,

$$I_{[m]}(t_1, \ldots, t_{p+1}) = h(t_p + 1)$$

où h est l'unique élément de G tel que $h(t) \overset{p|q}{=} m$, vérifiant

1. $I_{[m]}$ *est un G-invariant caractéristique.*
2. $I_{[l]} = g \circ I_{[m]}$ *ssi* $g([m]) = [l]$.
3. $p - q$ *invariants à n-points à valeurs dans* E_1, $j = q + 1, \ldots, p$,

$$J_{[m],j}(t_1, \ldots, t_p) = p_1(h(t_j)).$$

$I_{[m]}$ *et* $J_{[m],j}$ *engendrent tous les invariants à p et* $p + 1$*-points.*

Invariants euclidiens et affines du supercercle

- Le groupe $\mathrm{E}_+(1|1)$ est simplement $1|1$-transitif, on choisit le point $(0,0) \Rightarrow$ invariants euclidiens :

$$\begin{aligned} [t_1, t_2] &= x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1, \\ \{t_1, t_2\} &= \xi_2 - \xi_1. \end{aligned}$$

- Le groupe, engendré par $\mathrm{Aff}_+(1|1)$ et la transformation $r : (x, \xi) \mapsto (-x, \xi)$ renversant l'orientation, est simplement $2|1$-transitif, on choisit les points $(0,0)$ et $(1,.) \Rightarrow$ invariants affines :

$$\begin{aligned} [t_1, t_2, t_3] &= \frac{[t_3 - t_1]}{[t_2 - t_1]}, \\ \{t_1, t_2, t_3\} &= \frac{\{t_3 - t_1\}}{[t_2 - t_1]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

définis pour $x_2 > x_1$ uniquement.

Les super birapports

- Le groupe, engendré par $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ et la transformation r, est doublement $3|2$-transitif, on choisit les points $(\infty, 0)$, $(0, 0)$ et $(1, .)$ $\Rightarrow$ invariants projectifs :

$$[t_1, t_2, t_3, t_4] = \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]},$$

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \pm[t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2, t_4\}[t_1, t_2] - \{t_1, t_2\}[t_2, t_4]}{([t_1, t_2][t_2, t_4][t_1, t_4])^{\frac{1}{2}}}.$$

Ils sont définis uniquement pour $\mathrm{ord}(x_1, x_2, x_3) = 1$.

Les super birapports

- Le groupe, engendré par $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ et la transformation r, est doublement $3|2$-transitif, on choisit les points $(\infty, 0)$, $(0,0)$ et $(1, .)$ $\Rightarrow$ invariants projectifs :

$$\begin{aligned}
[t_1,t_2,t_3,t_4] &= \frac{[t_1,t_3][t_2,t_4]}{[t_2,t_3][t_1,t_4]}, \\
\{t_1,t_2,t_3,t_4\} &= \pm[t_1,t_2,t_3,t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2,t_4\}[t_1,t_2] - \{t_1,t_2\}[t_2,t_4]}{([t_1,t_2][t_2,t_4][t_1,t_4])^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Ils sont définis uniquement pour $\mathrm{ord}(x_1,x_2,x_3) = 1$.

Corollaire

Les invariants pairs sont caractéristiques des groupes $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$ et $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ comme sous groupes de $K(1)$.

La formule de Cartan

- Soit $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \ldots$ le flot associé au champ de vecteur X. Soit t_1 un point de $\mathrm{S}^{1|1}$ et

$$t_2 = \phi_\varepsilon(t_1), \quad t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1) \quad \text{et} \quad t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1).$$

  La formule de Cartan définissant le schwarzien de $\Phi \in K(1)$ s'écrit :

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle (t_1) + O(\varepsilon^3).$$

La formule de Cartan

- Soit $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \dots$ le flot associé au champ de vecteur X. Soit t_1 un point de $\mathrm{S}^{1|1}$ et
$$t_2 = \phi_\varepsilon(t_1), \quad t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1) \quad \text{et} \quad t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1).$$
La formule de Cartan définissant le schwarzien de $\Phi \in K(1)$ s'écrit :
$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle (t_1) + O(\varepsilon^3).$$
- On obtient de même $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ à partir des invariants pairs euclidien et affine.

La formule de Cartan

- Soit $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \dots$ le flot associé au champ de vecteur X. Soit t_1 un point de $\mathrm{S}^{1|1}$ et

$$t_2 = \phi_\varepsilon(t_1), \quad t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1) \quad \text{et} \quad t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1).$$

  La formule de Cartan définissant le schwarzien de $\Phi \in K(1)$ s'écrit :

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle (t_1) + O(\varepsilon^3).$$

- On obtient de même $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ à partir des invariants pairs euclidien et affine.
- Par construction, $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des 1-cocycles du groupe $K(1)$: ils vérifient

$$C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_1).$$

La formule de Cartan

- Soit $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \dots$ le flot associé au champ de vecteur X. Soit t_1 un point de $\mathrm{S}^{1|1}$ et
$$t_2 = \phi_\varepsilon(t_1), \quad t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1) \quad \text{et} \quad t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1).$$
La formule de Cartan définissant le schwarzien de $\Phi \in K(1)$ s'écrit :
$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle (t_1) + O(\varepsilon^3).$$
- On obtient de même $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ à partir des invariants pairs euclidien et affine.
- Par construction, $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des 1-cocycles du groupe $K(1)$: ils vérifient
$$C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_1).$$

Interprétation en termes de courbes osculatrices.

Les $K(1)$-modules des densités tensorielles, des 1-formes et des différentielles quadratiques

- L'espace $\mathcal{F}_\lambda$, des densités tensorielles de poids λ, a pour éléments $F = f\alpha^\lambda$, avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$,

$$\Phi^* F = E_\Phi^\lambda \, F \circ \Phi.$$

- L'espace des 1-formes, $\Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$, est engendré, sur $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^{1|1})$, par $\alpha = dx + \xi d\xi$ et $\beta = d\xi$ (de base duale ∂_x et $D = \partial_\xi + \xi\partial_x$),

$$\Phi^*\alpha = E_\Phi \alpha \quad \text{et} \quad \Phi^*\beta = \alpha\psi' + \beta D\psi.$$

- L'espace des différentielles quadratiques, $\mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$, est engendré par $\alpha^2 = \alpha \otimes \alpha$ et $\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$.

Les 1-cocycles euclidien, affine et projectif de $K(1)$

Soit $\Phi \in K(1)$ et E_Φ la superfonction telle que $E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha}$.

Théorème

1. *le cocycle euclidien* $\mathcal{E} : K(1) \to \mathcal{F}_0(\mathrm{S}^{1|1})$: $\quad \mathcal{E}(\Phi) = \log E_\Phi$,
2. *le cocycle affine* $\mathcal{A} : K(1) \to \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$: $\quad \mathcal{A}(\Phi) = d\mathcal{E}(\Phi)$,
3. *le cocycle projectif* $\mathcal{S} : K(1) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$:

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{\alpha^2}{6}\left(\frac{E''_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\left(\frac{E'_\Phi}{E_\Phi}\right)^2 + \frac{2\psi'\psi''}{E_\Phi}\right) + \frac{\alpha\beta}{2}\left(\frac{DE'_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{E'_\Phi\, DE_\Phi}{E_\Phi^2}\right)$$

ont pour noyaux $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$ *et* $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ *respectivement.*

Les $K(1)$-modules des densités tensorielles, des 1-formes et des différentielles quadratiques

Proposition

En termes de $K(1)$-modules, on a les décompositions

$$\Omega^1(S^{1|1}) \cong \mathcal{F}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{F}_1, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Q}(S^{1|1}) \cong \mathcal{F}_{\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{F}_2,$$

Les espaces $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont naturellement des $K(1)$ sous-modules de $\Omega^1(S^{1|1})$ et $\mathcal{Q}(S^{1|1})$. De même pour $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{F}_{\frac{3}{2}}$, comme le montre les projections données par $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \cdot\rangle$, et leurs sections correspondantes $\alpha^{\frac{1}{2}} L_D$ et $\frac{2}{3}\alpha^{\frac{1}{2}} L_D$.

Projection des $K(1)$-cocycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sur les densités

Théorème

Utilisant la projection $\alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \cdot\rangle$ sur les densités tensorielles, nous obtenons deux nouveaux 1-cocycles affine et projectif,

1. *la projection du cocycle affine,* $\mathrm{A} : K(1) \to \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathrm{A}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \mathcal{A}(\Phi)\rangle = \frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\,\alpha^{\frac{1}{2}},$$

2. *la dérivée schwarzienne,* $\mathrm{S} : K(1) \to \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathrm{S}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}}\langle D, \mathcal{S}(\Phi)\rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{D^3E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\,\frac{DE_\Phi\, D^2E_\Phi}{E_\Phi^2}\right)\alpha^{\frac{3}{2}}.$$

Classification des espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$

Soit $\Phi_1, \Phi_2 \in K(1)$, et $C : K(1) \to \mathcal{F}_\lambda$. L'application C est

1. un 1-cobord si $C(\Phi_1) = \Phi_1^* m - m$, pour $m \in \mathcal{F}_\lambda$,
2. un 1-cocycle si $C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_2)$.

Le quotient des 1-cocycles par les 1-cobords est le premier espace de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$.

Classification des espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$

Soit $\Phi_1, \Phi_2 \in K(1)$, et $C : K(1) \to \mathcal{F}_\lambda$. L'application C est

1. un 1-cobord si $C(\Phi_1) = \Phi_1^* m - m$, pour $m \in \mathcal{F}_\lambda$,
2. un 1-cocycle si $C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_2)$.

Le quotient des 1-cocycles par les 1-cobords est le premier espace de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$.

Grâce à la détermination de $H^1(k(1), \mathcal{F}_\lambda)$ par Agrebaoui & Ben Fraj,

Corollaire

Les espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$ sont donnés par

$$H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces trois espaces de cohomologie sont respectivement engendrés par $\mathcal{E}$, A et S.

Synthèse

$$
\begin{tikzcd}
\textit{Groupes} \arrow[rr, leftrightarrow, "p|q \text{ transitivité}"] & & \textit{Invariants} \arrow[dl, "\textit{Cartan}"] \\
& \textit{Cocycles} \arrow[ul, "\textit{noyaux}"] &
\end{tikzcd}
$$

Cas du supercercle $\mathrm{S}^{1|N}$

Dans le cas du supercercle $\mathrm{S}^{1|N}$, muni de $\alpha = dx + \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij}\, \xi^i d\xi^j$

- les invariants de $\mathrm{E}_+(1|N)$, $\mathrm{A}_+(1|N)$ et $\mathrm{SpO}(2|N)$ ont la même forme que pour $N = 1$.
  Cependant le birapport impair n'est plus déterminé au signe près (modulo $\mathrm{O}(1)$), mais à l'action de $\mathrm{O}(N)$ près : $(x, \xi) \mapsto (x, e\xi)$ avec $e \in \mathrm{O}(N)$.

Cas du supercercle $S^{1|N}$

Dans le cas du supercercle $S^{1|N}$, muni de $\alpha = dx + \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij}\, \xi^i d\xi^j$

- les invariants de $\mathrm{E}_+(1|N)$, $\mathrm{A}_+(1|N)$ et $\mathrm{SpO}(2|N)$ ont la même forme que pour $N = 1$.
  Cependant le birapport impair n'est plus déterminé au signe près (modulo $\mathrm{O}(1)$), mais à l'action de $\mathrm{O}(N)$ près : $(x, \xi) \mapsto (x, e\xi)$ avec $e \in \mathrm{O}(N)$.

- les cocycles euclidiens et affines ont la même forme que pour $N = 1$. Pour $N \geq 3$, le sous groupe de $K(N)$ préservant l'invariant pair et le noyau du cocycle associé ne coïncident plus.

Cas du supercercle $\mathrm{S}^{1|N}$

Dans le cas du supercercle $\mathrm{S}^{1|N}$, muni de $\alpha = dx + \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij}\, \xi^i d\xi^j$

- les invariants de $\mathrm{E}_+(1|N)$, $\mathrm{A}_+(1|N)$ et $\mathrm{SpO}(2|N)$ ont la même forme que pour $N = 1$.
  Cependant le birapport impair n'est plus déterminé au signe près (modulo $\mathrm{O}(1)$), mais à l'action de $\mathrm{O}(N)$ près : $(x, \xi) \mapsto (x, e\xi)$ avec $e \in \mathrm{O}(N)$.
- les cocycles euclidiens et affines ont la même forme que pour $N = 1$. Pour $N \geq 3$, le sous groupe de $K(N)$ préservant l'invariant pair et le noyau du cocycle associé ne coïncident plus.
- Pour $N \geq 3$, $\Phi^*[t_1, t_2]$ n'est plus proportionnel à $[t_1, t_2]$ à $O(\varepsilon^3)$. Le schwarzien, $\mathcal{S}(\Phi)$, n'est donc plus donné alors par la formule de Cartan.

Théorème

On déduit du birapport pair et de la formule de Cartan le 1-cocycle projectif $\mathcal{S} : K(2) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|2})$ *suivant*

$$\mathcal{S} = \frac{1}{6}\alpha^2 \left(D_1 D_2 \mathrm{S}_{12} + \frac{1}{2}\mathrm{S}_{12}^2 \right) + \frac{1}{2}\alpha(\beta^1 D_2 + \beta^2 D_1)\mathrm{S}_{12} + \beta^1\beta^2\, \mathrm{S}_{12}$$

avec $\mathrm{S}_{12} = 2\,\mathrm{S}\,\alpha^{-1}$ *où*

$$\mathrm{S}(\Phi) = \left(\frac{D_2 D_1 E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{D_2 E_\Phi D_1 E_\Phi}{E_\Phi^2} \right) \alpha$$

La projection des différentielles quadratiques sur les 1-densités de $\mathrm{S}^{1|2}$ *restitue la dérivée schwarzienne* $\mathrm{S} : K(2) \to \mathcal{F}_1(\mathrm{S}^{1|2})$ *ci-dessus.*

Les noyaux de ces cocycles coïncident et sont isomorphes à $\mathrm{PC}(2|2)$.

Perspectives

- Classification complète des différentes géométries de $\mathrm{S}^{1|2}$.
- Construction du cocycle de Bott de $K(1)$ et $K(2)$ via le cup produit de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$.
- Superisation de l'hyperboloïde lorentzien $\mathcal{H}^{1,1} \subset \mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ dont la géométrie conforme est reliée à la géométrie projective de l'infini conforme.

Référence

J.-P. Michel et C. Duval, On the projective geometry of the supercircle : a unified construction of the super cross-ratio and Schwarzian derivative, `http ://xxx.lanl.gov/abs/0710.1544v2`