Équipe Symétries et physique

1. **Robert Coquereaux** : représentation de groupoïdes quantiques et CFT
2. **Christian Duval** : mécanique et quantification géométriques
3. **Thomas Grapperon** : espaces tressés
4. **Richard Grimm** : supersymétries, aspects géométriques
5. **Serge Lazzarini** : théories de jauge conformes
6. **Jean-Philippe Michel** : géométrie et quantification
7. **Oleg Ogievetsky** : représentation de groupes quantiques et YB
8. **Carina Tidei** : mécanique en formulation de Cartan

Géometrie projective du supercercle: construction unifiée du birapport et de la dérivée schwarzienne

Jean-Philippe MICHEL

Travail en commun avec Christian DUVAL

Journée du CPT

De l'importance du birapport et de la dérivée schwarzienne

1. La géometrie projective
   - Géometrie la plus riche en dimension 1
   - Lien avec la géometrie complexe
2. Le birapport
   - Invariant caractéristique de la géometrie projective en dimension 1
3. La dérivée schwarzienne
   - Obtenue par la formule de Cartan à partir du birapport.
   - Dérivée de la courbure des graphes dans le plan Lorentzien
   - Lien avec les opérateurs de Sturm-Liouville
   - Cocycle de $\mathrm{Diff}(S^1)$: construction du groupe et de l'algèbre de Virasoro
   - Loi de transformation du tenseur énergie-impulsion en CFT

Sur le supercercle

1. Le birapport : Aoki '88 et Manin '91.
2. La dérivée schwarzienne : Friedan '86 et Radul '90.

Structure géométrique, groupe d'automorphismes et invariants

géométrie $\equiv$ groupe (F.Klein)

Le cercle :

géométrie euclidienne : translations, distance.

géométrie affine : translations et dilatations, rapport de distances.

géométrie projective : homographies, birapport.

Généralisation au supercercle ?

Le supercercle

Le supercercle, $\mathrm{S}^{1|1}$, est le cercle S^1 muni de l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée de superfonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{S}^1) \otimes \Lambda\mathbb{R}$:

$$f(x,\xi) = f_0(x) + \xi f_1(x).$$

Elle a pour générateurs (x,ξ), de parité $|x| = 0$ et $|\xi| = 1$, et est supercommutative

$$ab = (-1)^{|a|\cdot|b|} ba,$$

Le groupe des difféomorphismes s'identifie aux transformations inversibles des systèmes de coordonnées :

$$\Phi : (x,\xi) \mapsto (\varphi(x,\xi), \psi(x,\xi))$$

Le groupe des contactomorphismes $K(1)$ est le sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathrm{S}^{1|1})$ préservant la direction de

$$\alpha = dx + \xi d\xi \quad \text{ou} \quad D = \partial_\xi + \xi \partial_x.$$

Le supergroupe $\mathrm{SpO}(2|1)$

Par définition, $SpO(2|1)$ est le supergroupe linéaire préservant $\omega = dp \wedge dq + d\theta \wedge d\theta$, la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2|1}$. Un élement g de $SpO(2|1)$ s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} a & b & \gamma \\ c & d & \delta \\ \alpha & \beta & e \end{pmatrix}$$

avec 4 équations de contraintes sur les coefficients. Il agit sur $\mathrm{S}^{1|1}$ par contactomorphismes via les superhomographies :

$$\widehat{g}(x,\xi) = \left(\frac{ax + b + \gamma\xi}{cx + d + \delta\xi}, \frac{\alpha x + \beta + e\xi}{cx + d + \delta\xi} \right)$$

Birapport et distance (cas classique)

1. Le birapport de 4 points vérifie
   1. $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [h(x_1), h(x_2), h(x_3), h(x_4)], \forall h \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$
   2. $[\infty, 0, 1, a] = a$

   De plus, $\exists! h \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que $h(x_1) = \infty$, $h(x_2) = 0$ et $h(x_3) = 1$, donc

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [\infty, 0, 1, h(x_4)] = h(x_4) = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

2. La distance entre deux points est définie par

$$[x_1, x_2] = [0, h(x_2)] = h(x_2) = x_2 - x_1$$

   où h est l'unique translation telle que $h(x_1) = 0$.

Théorème

Action simplement n-transitive $\Rightarrow$ "$h(x_n + 1)$" invariant caractéristique à $n + 1$ points.

1. **L'action de $\mathrm{SpO}(2|1)$ n'est pas 3-transitive !**
   Pour tout triplet de "points" $t_1 = (x_1, \xi_1)$, $t_2 = (x_2, \xi_2)$ et $t_3 = (x_3, \xi_3)$, $\exists! h \in \mathrm{SpO}_+(2|1)$ tel que :

   $$h(t_1) = (\infty, 0), \quad h(t_2) = (0, 0) \quad \text{et} \quad h(t_3) = (1, \zeta)$$

   où ζ est uniquement déterminé par t_1, t_2 et t_3.
2. **On introduit la $p|q$-transitivité.**
   L'action de $\mathrm{SpO}(2|1)$ est donc $3|2$-transitive.
   On a un couple d'invariants donnés par $h(t_4)$.

Théorème

Action simplement $p|q$-transitive $\Rightarrow$ "$h(t_p + 1)$" couple d'invariants caractéristiques.

Invariants du supercercle

Le groupe $\mathrm{E}(1|1)$ des supertranslations est $1|1$-transitif $\Rightarrow$ invariants :

$$
\begin{aligned}
[t_1, t_2] &= x_2 - x_1 - \xi_2\xi_1, \\
\{t_1, t_2\} &= \xi_2 - \xi_1.
\end{aligned}
$$

Le groupe des superhomographies est $3|2$-transitif $\Rightarrow$ invariants :

$$
\begin{aligned}
[t_1, t_2, t_3, t_4] &= \frac{[t_1, t_3][t_2, t_4]}{[t_2, t_3][t_1, t_4]}, \\
\{t_1, t_2, t_3, t_4\} &= [t_1, t_2, t_3, t_4]^{\frac{1}{2}} \frac{\{t_2, t_4\}[t_1, t_2] - \{t_1, t_2\}[t_2, t_4]}{([t_1, t_2][t_2, t_4][t_1, t_4])^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Corollaire

Les invariants pairs sont caractéristiques des groupes $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$ *et* $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ *comme sous groupes de* $K(1)$.

La formule de Cartan

Soit $\phi_\varepsilon = \mathrm{Id} + \varepsilon X + \dots$ le flot associé au champ de vecteur X. Soit t_1 un point du supercercle et

$$t_2 = \phi_\varepsilon(t_1), \quad t_3 = \phi_{2\varepsilon}(t_1) \quad \text{et} \quad t_4 = \phi_{3\varepsilon}(t_1).$$

La formule de Cartan définissant le schwarzien de $\Phi \in K(1)$ s'écrit :

$$\frac{\Phi^*[t_1, t_2, t_3, t_4]}{[t_1, t_2, t_3, t_4]} - 1 = \langle \varepsilon X \otimes \varepsilon X, \mathcal{S}(\Phi) \rangle (t_1) + O(\varepsilon^3). \tag{1}$$

Idem pour les invariants pairs euclidien et affine, on obtient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$. Par construction, $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des 1-cocycles du groupe $K(1)$: ils vérifient

$$C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_1).$$

Interprétation en termes de courbes osculatrices.

Les 1-cocycles euclidien, affine et projectif de $K(1)$

Soit $\Phi \in K(1)$, $\beta = d\xi$ et E_Φ la superfonction telle que $E_\Phi = \frac{\Phi^*\alpha}{\alpha}$.

Théorème

- *le cocycle euclidien* $\mathcal{E} : K(1) \to \mathcal{F}_0(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathcal{E}(\Phi) = \log E_\Phi,$$

- *le cocycle affine* $\mathcal{A} : K(1) \to \Omega^1(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathcal{A}(\Phi) = d\mathcal{E}(\Phi),$$

- *la dérivée schwarzienne* $\mathcal{S} : K(1) \to \mathcal{Q}(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{\alpha^2}{6}\left(\frac{E_\Phi''}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\left(\frac{E_\Phi'}{E_\Phi}\right)^2 + \frac{2\psi'\psi''}{E_\Phi}\right) + \frac{\alpha\beta}{2}\left(\frac{DE_\Phi'}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\frac{E_\Phi' \, DE_\Phi}{E_\Phi^2}\right)$$

ont pour noyaux $\mathrm{E}(1|1)$, $\mathrm{Aff}(1|1)$ *et* $\mathrm{SpO}_+(2|1)$ *respectivement.*

Projection des $K(1)$-cocycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sur les densités

Théorème

Utilisant la projection sur les densités tensorielles donnée par la contraction avec le champ de vecteurs D, nous obtenons deux nouveaux 1*-cocycles affine et projectif,*

- *la projection du cocycle affine,* $\mathrm{A} : K(1) \to \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathrm{A}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{A}(\Phi) \rangle = \frac{DE_\Phi}{E_\Phi}\, \alpha^{\frac{1}{2}},$$

- *la projection de la dérivée schwarzienne,* $\mathrm{S} : K(1) \to \mathcal{F}_{\frac{3}{2}}(\mathrm{S}^{1|1})$ *:*

$$\mathrm{S}(\Phi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \langle D, \mathcal{S}(\Phi) \rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{D^3 E_\Phi}{E_\Phi} - \frac{3}{2}\, \frac{DE_\Phi\, D^2 E_\Phi}{E_\Phi^2} \right) \alpha^{\frac{3}{2}}. \qquad (2)$$

Classification des espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$

Soit $\Phi_1, \Phi_2 \in K(1)$, et $C : K(1) \to \mathcal{F}_\lambda$. L'application C est

1. un 1-cobord si $C(\Phi_1) = \Phi_1^* m - m$, pour $m \in \mathcal{F}_\lambda$,
2. un 1-cocycle si $C(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_2^* C(\Phi_1) + C(\Phi_2)$.

Le quotient des 1-cocycles par les 1-cobords est le premier espace de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$.

Corollaire

Les espaces de cohomologie $H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda)$ sont donnés par

$$H^1(K(1), \mathcal{F}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R} & si\ \lambda = 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2} \\ \{0\} & sinon. \end{cases} \quad (3)$$

Ces trois espaces de cohomologie sont respectivement engendrés par $\mathcal{E}$, A et S.

Synthèse

$$\begin{tikzcd}
\textit{Groupes} \arrow[rr, leftrightarrow, "p|q \text{ transitivité}"] & & \textit{Invariants} \arrow[dl, "\textit{Cartan}"] \\
& \textit{Cocycles} \arrow[ul, "\textit{noyaux}"] &
\end{tikzcd}$$