RAPPORT SUR LA DISSERTATION DOCTORALE PRÉSENTÉE PAR JEAN-PHILIPE MICHEL

PIERRE LECOMTE

1

Le travail présenté par Jean-Philippe Michel comporte deux parties indépendantes, de volumes sensiblement différents : *Quantification conformément équivariante des supercotangents*, dont il est le seul auteur et qui ne compte pas moins de cent nonante pages, et un long article *On the Projective Geometry of the Supercircle : A Unified Construction of the Super Cross-Ratio and Schwarzian Derivative*, de quarante huit pages, rédigé avec Christian Duval et publié en 2008 dans le volume 14 des Int. Math. Res. Not.

Dans cette seconde partie, les auteurs présentent une construction systématique des invariants caractéristiques des géométries euclidienne, affine et projective des supercercles $S^{1|N}$. Via une version supérisée d'une formule de Cartan liant l'action des difféomorphismes sur le birapport et la dérivée de Schwarz classique, ils en déduisent maints résultats cohomologiques relatifs au groupe des contactomorphismes $K(N)$. L'étude repose sur la notion, originale, *d'action de groupe p|q-transitive*. Elle place en outre les différents résultats cohomologiques liés à la structure de contact canonique du supercercle disponibles dans la littérature dans une perspective unificatrice et féconde.

Je n'en dirai cependant guère plus sur cette contribution. Ce n'est d'abord pas le lieu, ni mon rôle, d'évaluer des travaux de Christian Duval --- dans le monde mathématique, les coauteurs d'un papier sont, légitimement, crédités à parts égales. Ensuite, la première partie du travail présenté me semble déjà largement constituer une thèse en soi — remarquable en l'occurrence. Ceci n'enlève rien à l'article en question qui, par ailleurs, à l'instar des *thèses annexes* d'antan, atteste au surplus de la diversité des intérêts scientifiques de Jean-Philippe Michel.

Tout ce qui suit concernera désormais les contributions de Jean-Philippe Michel présentées dans *Quantification conformément équivariante des supercotangents.*

2

L'idée de récupérer l'opérateur de Dirac via la quantification équivariante s'est imposée à Christian Duval pratiquement en même temps qu'avec Valentin Ovsienko et moi-même, il achevait d'étudier les quantifications conformément équivariantes sur les cotangents des variétés pseudo-riemanniennes conformément plates, obtenant dans la foulée un candidat raisonnable pour le hamiltonien quantique du flot géodésique. Mais, alors que le cadre géométrique et la problématique des quantifications G-équivariantes sur les fibrés cotangents étaient tout à fait clairs et parfaitement bien posés, la transposition aux systèmes relativistes à spin, pseudoclassiques et quantiques, était rien moins que problématique. Il fallait bien identifier et comprendre les structures géométriques à mettre en jeu ainsi que la nature des G-modules susceptibles de modéliser les systèmes pseudo-classiques et quantiques : rien que la formulation du problème était loin d'aller de soi.

Une part importante — mais non la totalité, il s'en faut de beaucoup — du matériel nécessaire existait bien entendu dans la littérature mais de manière dispersée et sous différents avatars car exposés dans des contextes étrangers les uns aux autres. Avec un brio remarquable, Jean-Philippe Michel fait une synthèse saisissante des résultats disponibles sur la supergéométrie des supercotangents des structures conformes et sur l'algèbre et la géométrie spinorielles, et les complète par des contributions originales de grande qualité. Ceci lui permet à la fois de poser de façon claire le problème de la quantification $o(p+1, q+1)$-équivariante de l'espace des opérateurs différentiels agissant sur les densités spinorielles sur les variétés conformément plates et de construire les outils dont il a besoin pour les étudier. Cet état de l'art est mené selon un point de vue personnel unificateur exploitant habilement le concept de quantification géométrique et la plasticité de la supergéométrie des cotangents. Il en résulte une présentation particulièrement homogène conduisant à des preuves orginales et élégantes des résultats présentés.

Sans être exhaustif, je voudrais mentionner quelques uns des contributions de Jean-Philippe Michel dans cette phase du travail. Il n'y a pas de relèvement «hamiltonien » des champs de vecteurs d'une variété M à son supercotangent $\mathcal{M}$. Dans le cas conforme, moyennant une condition naturelle liée à la structure symplectique associée, il établit de façon constructive que seuls les champs de vecteurs Killing-conformes se relèvent sur $\mathcal{M}$, de manière unique, donnant un morphisme d'algèbres de Lie. Il s'agit d'une étape clé, préalable essentiel à la construction des structures de $o(p+1, q+1)$-modules sur les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels mis en jeu ultérieurement par la quantification équivariante. Dans le cas plat, il construit ensuite des systèmes de coordonnées privilégiés, dits *de Darboux conformes*, sur $\mathcal{M}$ qui lui serviront de façon cruciale à plusieurs reprises. Elles lui permettent entre autre de ramener le problème posé sur une structure conforme plate générale à celui posé sur le modèle canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$. Je cite aussi sa construction du module des spineurs via la quantification géométrique de supervariétés dont la partie classique est réduite à un point et celle d'un fibré spinoriel, sur une variété conforme munie d'une N-structure, via la quantification géométrique de $\mathcal{M}$. Ces deux constructions, hautement non triviales, exploitent elles aussi les coordonnées de Darboux conformes. Enfin, ce sont encore les quantifications géométriques qui, via des applications moments, lui fournissent les dérivées covariantes et de Lie spinorielles pour les champs Killing-conformes.

3

L'opérateur de Dirac étant d'ordre 1, c'est naturellement à la quantification équivariante des symboles de degré inférieur ou égal à 1 que Jean-Philippe Michel se consacre d'abord. Outre le problème de l'existence et de l'unicité, se pose aussi la question d'en obtenir une *description covariante*, c'est-à-dire de s'affranchir des coordonnées de Darboux — ce pourquoi il était utile de disposer d'une dérivation covariante spinorielle.

Localement, dans une carte de Darboux, ou encore sur le modèle canonique, en factorisant la quantification cherchée via l'ordre normal, lequel est un isomorphisme équivariant sur les symboles d'ordre 0, on se ramène à comparer deux structures de modules sur l'espace des symboles. La méthode utilisée dans ce but s'inspire de celle que Christian Duval, Valentin Ovsienko et moi-même avions mise au point pour les cotangents classiques : exprimer le candidat quantification équivariante au moyen d'un système bien choisi de générateurs du commutant des similitudes conformes puis contraindre les coefficients restés indéterminés pour imposer l'invariance sous l'action des inversions infinitésimales. Une fois encore, la transposition était loin d'être évidente et Jean-Philippe Michel fait preuve à nouveau d'une grande maîtrise conceptuelle et technique pour faire aboutir ce programme. Il met en évidence des valeurs résonnantes du shift δ([1])

$$\frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n+1}{n}.$$

En dehors de celles-ci, il établit l'existence et l'unicité de la quantification conformément équivariante pour les symboles d'ordre 1. Pour les deux valeurs extrêmes, il y a encore existence mais plus l'unicité, du moins pour des poids de densité spécifiques tandis que dans les autres cas, il n'y a pas de quantification équivariante.

La dépendance des coordonnées de Darboux à la métrique rend délicate la détermination d'une expression covariante de la quantification conformément équivariante, phénomène neuf par rapport au cas classique. Faisant preuve d'une grande finesse d'analyse, Jean-Philippe Michel introduit ici une étape tout à fait novatrice lui permettant de surmonter cette difficulté. Il factorise la quantification via un espace de tenseurs sur $\mathcal{M}$, qui est aussi un module sur $\mathrm{Vect}(M)$ dont la structure est indépendante de la métrique, concentrant la dépendance à cette dernière dans une application ev_g qui joue un rôle analogue à l'ordre normal mais globalement cette fois. Cette factorisation se fait à travers ce qu'il appelle une *supérisation* qui se doit d'être conformément équivariante. Ces supérisations existent aux mêmes conditions sur δ que les quantifications équivariantes. Elles sont décrites explicitement pour les symboles de degré au plus 1. Les aspects les plus techniques sont reportés dans l'annexe C afin de conserver une bonne homogénéité au corps du texte. L'expression covariante de quantifications correspondant aux valeurs résonnantes extrêmes est obtenue explicitement.

Dans les applications dont je dirai peu de mots, étant peu versé dans les aspects physiques sous-jascents — que Jean-Philippe Michel fait des résultats rapidement décrits ici, on trouve la détermination des opérateurs différentiels conformément invariants d'ordre 1. Parmi ceux-ci, il obtient l'opérateur de Dirac, via une des quantifications associées à un cas de résonnance. La boucle est bouclée.

4

Une partie importante du travail est alors consacrée à l'établissement de l'existence et de l'unicité des quantifications conformément équivariantes en tout degré, pour des valeurs génériques de δ. Trois $o(p+1, q+1)$-modules sont en présence : celui des symboles, celui des opérateurs différentiels et celui sur lequel est définie la supérisation. Dans l'esprit d'une méthode que j'avais initiée à propos de l'étude de la quantification projectivement équivariante des opérateurs agissant entre densités et reprise lors de celle des quantifications conformément équivariantes du cas classique, Jean-Philippe Michel obtient des isomorphismes entre ces modules en

1. C'est la différence des poids des densités spinorielles entre lesquelles les opérateurs différentiels considérés agissent. Je n'ai pas détaillé cet aspect des choses pour ne pas alourdir le propos. Les protagonistes du domaine savent du reste de quoi il est question.

diagonalisant leurs opérateurs de Casimir. Encore une fois, le dire est une chose mais le faire en est une bien différente : la détermination des ces opérateurs et de leurs spectres est ici très difficile et on doit de nouveau saluer le talent avec lequel Jean-Philippe Michel parvient à adapter et appliquer la méthode en question.

Si on excepte les annexes, le travail s'achève par diverses applications des résultats obtenus : *Relations entre moments et dérivées de Lie des spineurs* dans laquelle via la supérisation et la quantification équivariantes de certains moments, on obtient une dérivée de Lie des spineurs dans la direction de tout champ de vecteur qui généralise à tous les poids de densité celle proposée par Yvette Kosmann, *Détermination des tenseurs, symboles et opérateurs différentiels conformément invariants*, avec application à la chiralité et à l'opérateur de Dirac, *Couplage à un champ électromagnétique*, *Tenseurs de Killing-Yano et supercharges* et quantification de celles-ci. Comme dit plus haut, je n'entrerai pas dans leur détail – cela me serait difficile pour certaines. Mais il me plait à souligner qu'elles sont non triviales et qu'elles cautionnent indirectement la qualité et l'utilité des résultats généraux obtenus par Jean-Philippe Michel.

5

La qualité de la rédaction est remarquable. L'exposé est mené très pédagogiquement, avec une très grande lucidité et une non moins grande maîtrise.

La culture mathématique de Jean-Philipe Michel est impressionnante. Loin d'être livresque, on voit bien, au contraire, qu'il a parfaitement assimilé ce qu'il a appris au point de pouvoir en faire une synthèse originale marquée d'une forte personnalité et de l'utiliser à ses fins. Doué au surplus d'une belle imagination, il présente ainsi un travail que je trouve exceptionnel. En tout cas, c'est une des plus belles thèses que j'ai eu à analyser.

Je n'ai donc pas le moindre doute quant au fait que Jean-Philippe Michel mérite le titre de *Docteur en Physique Théorique et Mathématique* ni quant au fait qu'un brillant avenir scientifique lui soit promis !

PLecomte

Pierre LECOMTE

Liège, le 2 octobre 2009