Université Claude Bernard Lyon
Institut Camille Jordan
U.M.R. CNRS 5208
Mathématiques et applications

Lyon le 21 septembre 2009

Rapport sur la thèse de Jean-Philippe Michel
"Quantification conformément équivariante des supercotangents".

La quantification équivariante est un concept développé durant la dernière décennie. Son idée de base est d'établir un isomorphisme canonique entre l'espace des opérateurs différentiels sur une variété différentiable M et l'espace des symboles associé, i.e., les fonctions polynomiales sur l'espace cotangent T^*M. La variété M étant munie d'une action homogène d'un groupe de Lie G, on cherche alors l'isomorphisme qui commute avec l'action de G. Parmi les cas connus dans la littérature, la quantification conformément équivariante est définitivement la plus riche et la plus intéressante, à la fois pour la géométrie différentielle, et pour les applications à la physique mathématique. Le groupe des symétries conformes est $G = \mathrm{O}(p+1, q+1)$, où $n = p + q$ est la dimension de M. La variété M, elle-même, est munie de la structure conforme (plate). La quantification conformément équivariante est un sujet qui se développe activement.

Le but général de la thèse de Jean-Philippe Michel est d'étendre la méthode de la quantification conformément équivariante au cas des opérateurs différentiels agissant sur des fibrés de spineurs. Ce problème présente un grand intérêt pour les applications, mais il est confronté à une énorme difficulté technique. L'existence et les propriétés des structures spinorielles sur les variétés est un sujet classique de la géométrie différentielle (A. Haefliger), la théorie des opérateurs différentiels a été développée assez récemment (Atiyah-Singer, Getzler, ...). L'action des groupes et des algèbres de Lie dans ce contexte est liée à la "dérivée de Lie des spineurs" (Y. Kosmann), notion délicate et relativement peu connue. L'exemple-type d'un opérateur sur le fibré des spineurs est le célèbre opérateur de Dirac. Déjà ce premier exemple est d'actualité pour les mathématiques d'aujourd'hui; l'étude de cet opérateur et ses multiple généralisations est un domaine actif.

La thèse de Jean-Philippe Michel contient plusieurs résultats nouveaux et complètement originaux que je vais décrire plus bas. Mais, je trouve également remarquable le fait que beaucoup de résultats déjà connus (et éparpillés dans la vaste littérature mathématique et physique) découlent de ce travail. Ils sont présentés en tant que corollaires et cas particuliers de la théorie générale développée. Pour donner un exemple, la formule de la dérivée de Lie des spineurs est obtenue de deux façons différentes comme quantification des hamiltoniens classiques des champs de vecteurs Killing-conformes: la première utilise la quantification géométrique, et la deuxième est basée sur la quantification conformément équivariante. Un autre exemple spectaculaire est la quantification des tenseurs de Killing-Yano. Jean-Philippe Michel retrouve et généralise la formule due à Cariglia (2004). L'opérateur de Dirac classique lui-même est retrouvé (ainsi que la chiralité) comme opérateur conformément invariant dans un cas très particulier de poids résonant. Tous ces résultats montrent la cohérence de la théorie générale; de plus, la façon de les retrouver est originale et les généralisations sont parfois très prometteuses.

Jean-Philippe Michel a obtenu des résultats nouveaux intéressants.

Le premier résultat (les théorèmes 4.4.1 et 4.4.4) est la formule explicite de la quantification conformément équivariante à l'ordre 1. Cette formule est donnée d'abord dans le cas plat, puis généralisée au cas "courbe". L'indépendance du choix de la métrique dans une classe conforme donnée est ensuite démontrée. La formule est assez compliquée mais très jolie; elle contient la source de multiples applications (voir ci-dessous).

Le deuxième résultat principal de la thèse est le théorème 4.5.2 sur l'existence et l'unicité de la quantification conformément équivariante dans le cas non résonant, à l'ordre quelconque. Ce théorème généralise un résultat similaire connu dans le cas des opérateurs à coefficients scalaires (Duval-Lecomte-Ovsienko 1999). Déjà dans le cas scalaire, la démonstration est assez compliquée; le cas "spinoriel" est bien plus ardu. Il nécessite, entre autres, des techniques de la théorie des représentations (l'étude du spectre de l'opérateur de Casimir). Jean-Philippe Michel montre des capacités de calcul impressionnantes. Je mentionnerai ici également un résultat "préparatoire" (proposition 4.1.5) qui présente un calcul explicite du commutant de l'action du groupe (et algèbre) euclidien sur l'espace des symboles. Ce résultat est utilisé par la suite dans toutes les démonstrations et les constructions. Cependant, le calcul de ce commutant présente un intérêt indépendant car c'est une généralisation directe du théorème classique de Brauer-Weyl de la théorie des invariants.

La dernière partie de la thèse est consacrée aux applications. Je donne ici seulement un exemple intéressant. La quantification des tenseurs de Killing-Yano conformes est un cas particulier de la formule de quantification conformément équivariante. La version classique de ces tenseurs a été utilisée récemment dans des travaux sur certains systèmes intégrables en relativité générale, mais leur quantification n'a pas été vraiment abordée géométriquement. Jean-Philippe Michel propose la formule explicite qui doit être testée par les spécialistes.

Il est nécessaire de dire quelques mots concernant l'approche adoptée dans cette thèse. Celle-ci utilise la notion de "supercotangent" et est basée, plus généralement, sur la technique des supervariétés symplectiques. La variété de base M est une variété différentiable "ordinaire", mais les variables impaires (ou grassmanniennes) sont nécessaires pour décrire les opérateurs sur les sections du fibré des spineurs. Cette situation fournit un exemple excellent où la supergéométrie intervient avec succès pour résoudre des problèmes de géométrie différentielle.

Les résultats de la thèse sont nouveaux et intéressants; ces résultats ainsi que leurs applications feront, sans aucun doute, l'objet d'une (ou plusieurs) publications dans une revue de géométrie différentielle ou de physique mathématique de haut niveau.

La thèse est très bien rédigée. Les notions classiques (comme, par exemple, les algèbres de Clifford, les espaces des spineurs et leur $\mathbf{Z}_2$-graduation) sont expliquées avec clarté et élégance, ce qui témoigne une maîtrise complète du sujet. Les résultats nouveaux sont présentés comme continuation naturelle des résultats connus de la quantification conformément équivariante, ce qui fait de cette thèse un travail synthétique et complet.

Un article "On the projective geometry of the supercircle: a unified construction of the super cross-ratio and Schwarzian derivative" publié à IMRN (en collaboration avec C. Duval) est présenté en annexe. Ce joli travail traite les problèmes de la géométrie différentielle projective et conforme dans l'esprit le plus classique du XIX et début du XX-ème siècle, mais... dans le contexte des supervariétés. Le résultat nouveau principal est la généralisation de la formule de Cartan qui établit un lien entre les versions "superisées" du birapport et de la dérivée de Schwarz. Ce résultat est obtenu en dimension $1|1$ et $1|2$. Un point fort de cet article est une approche systématique qui établit une classification complète des invariants projectifs (discrets et différentiels) ainsi que le lien entre eux. Ces invariants apparaissent séparément dans divers travaux des mathématiciens et des physiciens (Manin, Radul, Friedan, Nelson, ...), ce qui montre clairement leur intérêt, notamment pour la théorie des champs conforme. L'article de J-P. Michel et C. Duval est la base pour le reste de la thèse et son point de départ. Les ingrédients principaux: les invariants projectifs et conformes et les oprérateurs différentiels entrent en jeu, et la technique des supervariétés symplectiques et des superalgèbres de Lie est mise en place.

En conclusion, la thèse de Jean-Philippe Michel est un travail remarquable. C'est définitivement la meilleure thèse de doctorat que j'ai eu l'occasion de lire ces dernières années. Je recommande vivement la soutenance.

Valentin Ovsienko

Chargé de Recherches HDR au CNRS

Institut Camille Jordan

Université Lyon 1