Quantification équivariante, supergéométrie et symétries d'opérateurs invariants

Jean-Philippe MICHEL

Mes recherches se situent à l'interface de deux champs actifs de recherche en géométrie différentielle : la géométrie de Poisson et la géométrie parabolique. La première étudie les structures géométriques intervenant en physique, à commencer par les variétés symplectiques ou de Poisson et leurs quantifications. La seconde a pour objet les géométries de Cartan modelées sur des variétés de drapeaux G/P, avec G un groupe de Lie semi-simple et P un sous groupe parabolique, e.g. les géométries conforme et projective. L'étude des invariants de ces géométries est un enjeu majeur. Parmi ceux-ci, les quantifications invariantes tiennent une place centrale. Je contribue à leur élaboration et en explore les applications, e.g. à la classification des symétries du laplacien conforme. Leur considération dans le cadre de la géométrie algébrique est prometteuse pour la quantification des orbites coadjointes nilpotentes de G et l'étude de l'algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur G/P. A l'opposé, leur extension dans un cadre analytique offrirait un pendant à la quantification de Weyl, adapté e.g. à létude de la représentation minimale du groupe $\mathrm{O}(p+1, q+1)$. Le cas des opérateurs différentiels spinoriels m'a conduit par ailleurs à l'étude des supersymétries et des variétés graduées symplectiques, ainsi que leur application aux algébroïdes de Courant.

1 Introduction à la quantification

Les mathématiques ont toujours puisées dans la physique une de leurs sources d'inspiration les plus fécondes. Donnons deux exemples. La géométrie symplectique est née de la recherche d'une formulation intrinsèque de la mécanique hamiltonienne, tandis que l'étude des algèbres d'opérateurs provient de la mécanique quantique. Les formalismes mathématiques de ses deux théories physiques peuvent être résumés comme suit :

	Mécanique classique	Mécanique quantique
Espace des phases	variété symplectique $(\mathcal{M}, \omega)$	espace de Hilbert $\mathcal{H}$
Algèbre des observables	algèbre de Poisson $A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$	algèbre associative $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
Équation d'évolution	$\dot{f} = \{H, f\}$	$\dot{f} = [H, f]$

Une fois son espace des phases spécifié, un système physique, classique ou quantique, est ainsi déteminé par son hamiltonien, noté H, qui est une observable représentant l'énergie et dont découle l'équation d'évolution de toutes les autres observables.

Cette correspondance structurelle, entre les formalismes de la mécanique classique et quantique, a conduit au concept de quantification, fécond dans de nombreux domaines en mathématiques. Citons ainsi la quantification de Weyl, qui relie opérateurs pseudo-différentiels et leurs symboles, la méthode des orbites de Kirillov, qui établit, en particulier, une correspondance entre orbites coadjointes et représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, et la théorie des déformations, appliquée aux algèbres de Poisson ou aux algèbres de Hopf. Une situation standard est lorsque d'une part $\mathcal{A} = \bigcup_k \mathcal{A}_k$ est une algèbre filtrée, i.e. $\mathcal{A}_{-1} = \{0\} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots$ et $\mathcal{A}_k \cdot \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{k+l}$, et d'autre part $A = \operatorname{gr} \mathcal{A}$ est l'algèbre graduée associée. L'étude de $\mathcal{A}$ est alors consubstantielle à celle d'*applications de quantification* $\mathcal{Q} : A \to \mathcal{A}$, qui sont des inverses à droite des applications symboles principales $\sigma_k : \mathcal{A}_k \to A_k := \mathcal{A}_k / \mathcal{A}_{k-1}$. Ainsi, la symétrisation ou l'isomorphisme de Duflo sont des quantifications, $\mathcal{Q} : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, reliant algèbre symétrique et algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Je m'intéresse plus particulièrement au cas où $\mathcal{A} = \mathcal{D}(M)$ est l'algèbre des opérateurs différentiels sur une variété M et $A = \operatorname{gr} \mathcal{D}(M)$ est son algèbre de symboles. Cette dernière s'identifie à l'algèbre $\Gamma(\mathcal{S}TM)$ des tenseurs symétriques, munie du crochet de Schouten, ou encore à l'algèbre $\mathrm{Pol}(T^*M)$ des fonctions polynomiales en les fibres de T^*M munie du crochet de Poisson canonique. Comme il n'existe pas de quantifications $\mathcal{Q} : \mathrm{Pol}(T^*M) \to \mathcal{D}(M)$ qui soit équivariante sous l'action des difféomorphismes, la construction de telles applications $\mathcal{Q}$ dépend de la donnée d'une structure géométrique additionnelle sur la variété M, par exemple une connexion affine [88]. Plus généralement, il a été récemment montré qu'il suffit que M soit munie d'une géométrie de Cartan parabolique $|1|$-graduée [20], comme une structure projective ou conforme. Dans le cas localement plat, une telle géométrie est spécifiée par l'action locale sur M d'une algèbre de Lie simple $|1|$-graduée, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, comme l'action projective de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$, et il existe alors une unique *quantification* $\mathfrak{g}$*-équivariante*, $\mathcal{Q} : \mathrm{Pol}(T^*M) \to \mathcal{D}(M)$. Ce type de quantifications est au cœur de mes recherches et s'avère étroitement lié aux autres méthodes de quantification. Elle fournit en effet un star-produit fortement invariant sur $\mathrm{Pol}(T^*M)$ et y étend la quantification géométrique. Par ailleurs, elle admet de nombreuses applications : généralisations de la dérivée schwarzienne [17], classification des modules des opérateurs différentiels agissant entre fibrés en ligne des densités [58], comparaison de ces derniers avec leurs modules de symboles [54].

2 Etat de la recherche

Après une brève introduction à la géométrie conforme, je présente mes travaux portant sur les quantifications à valeurs dans les algèbres d'opérateurs différentiels scalaires puis spinoriels. Dans le premier cas, traité en 2.1, les applications concernent la détermination des symétries du laplacien conforme. Dans le deuxième cas, traité en 2.2, j'obtiens un nouvel invariant des algébroïdes de Courant et détermine les symétries de l'opérateur de Dirac. Enfin, j'expose en 2.3 mes recherches en géométrie graduée, portant sur les géométries du supercercle et les généralisations graduées-commutatives du déterminant, au-delà du bérézinien.

2.1 Quantification équivariante et opérateurs différentiels invariants

Une *structure conforme* sur une variété M est la donnée d'une classe d'équivalence de métriques $[\mathrm{g}]$, où $\mathrm{g}' \sim \mathrm{g}$ si il existe une fonction positive F telle que $\mathrm{g}' = F\mathrm{g}$. La variété est dite conformément plate si $[\mathrm{g}]$ contient localement la métrique plate. Localement, le groupe des transformations conformes de $(M, [\mathrm{g}])$ est alors donné par $\mathrm{O}(p+1, q+1)$, si g est de signature (p, q). Son algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ agit sur M par champs de vecteurs Killing conformes X, satisfaisant $L_X \mathrm{g} = f\mathrm{g}$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Un exemple important est l'espace $\mathrm{O}(p+1, q+1)$-homogène, donné par l'ensemble des demi-droites du cône nul de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, et qui s'identifie aux produit des sphères $M = \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$.

Sur une telle variété, les opérateurs différentiels $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$-invariants, agissant entre fibrés vectoriels homogènes, ont été classifié, via la classification des morphismes entre modules de Verma généralisés [13, 14]. En particulier, les fibrés en ligne homogènes sont donnés par les fibrés de *densités* $|\wedge^n T^*M|^{\otimes\lambda}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et n est la dimension de M, et les seuls opérateurs invariants agissant entre de tels fibrés sont les puissances conformes du laplacien,

$$\Delta^k : \mathcal{F}^{\frac{n-2k}{2n}}(M) \to \mathcal{F}^{\frac{n+2k}{2n}}(M),$$

où $\mathcal{F}^\lambda(M) := \Gamma(|\wedge^n T^*M|^{\otimes\lambda})$. Sur une variété conformément plate $(M, [\mathrm{g}])$, l'invariance sous l'action de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ est équivalente à l'invariance sous changement de métrique dans la classe conforme $[\mathrm{g}]$. Cette dernière notion se généralise à toute variété conforme $(M, [\mathrm{g}])$ et est efficacement traitée via le calcul conformément invariant des tracteurs [6], qui est basé sur la géométrie de Cartan et développé pour toute géométrie parabolique [21]. La plupart des opérateurs $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$-invariants admettent ainsi une généralisation conformément invariante à toute variété $(M, [\mathrm{g}])$, comme le laplacien de Yamabe, $\Delta = \nabla_i \mathrm{g}^{ij} \nabla_j - \frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{R}$, dont le terme de courbure assure l'invariance par changement conforme de métrique. Ici, ∇ désigne la connection de Levi-Civita et R la courbure scalaire de la métrique g.

Même sur une variété conformément plate, la classification des opérateurs bidifférentiels $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$-invariants est pour l'instant hors de portée, mais fait l'objet de recherches intenses [51]. La quantification équivariante en est un cas particulier. Par exemple, si elle est à valeurs dans $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M)$, l'espace des opérateurs différentiels agissant entre fibrés de densités de poids λ et μ, elle s'écrit

$$\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathrm{Pol}^{\mu-\lambda}(T^*M) \otimes \mathcal{F}^\lambda(M) \to \mathcal{F}^\mu(M), \tag{1}$$

avec $\mathrm{Pol}^{\mu-\lambda}(T^*M) := \mathrm{Pol}(T^*M) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M)} \mathcal{F}^{\mu-\lambda}(M)$. Elle est unique pour des valeurs génériques de λ, μ [35] et se prolonge aux variétés conformes générales en une quantification conformément invariante, via le calcul des tracteurs [59, 78]. Mes travaux [65, 64, 67, 62], présentés dans cette section, mettent en valeur le lien étroit entre quantification équivariante et opérateurs invariants.

Symétries du laplacien de Yamabe [64, 67, 62]. Dans un premier temps, la variété $(M, [\mathrm{g}])$, de signature (p, q), est supposée conformément plate.

Q . *Quels sont les opérateurs différentiels D_1 tels que $\Delta D_1 = D_2 \Delta$ pour un certain opérateur différentiel D_2 ? Quelle est la structure d'algèbre de cet espace de symétries ?*

Ces questions, dues à Witten, sont motivées en premier lieu par la théorie des champs de spins élevés [84, 7]. Une réponse complète est fournie par Eastwood [37] en termes d'espace ambiant conforme. Les symétries D_1 ainsi définies correspondent aux opérateurs différentiels préservant le noyau du laplacien Δ. En particulier, celles d'ordre 1 sont données par les fonctions constantes et par les dérivées de Lie des densités, le long des champs de vecteurs Killing conformes. Les symétries d'ordre k ont pour symboles principaux des k-tenseurs Killing conformes. Ces derniers forment le noyau d'un opérateur différentiel d'ordre 1, qui est conformément invariant, et ils s'obtiennent comme produits symétriques de vecteurs Killing conformes. Ce sont les intégrales premières du flot géodésique nul, vu comme flot hamiltonien sur T^*M.

Dans [64], je propose une nouvelle approche pour classifier les symétries de Δ. Elle est basée sur : la quantification conformément équivariante [35], la classification des opérateurs conformément invariants [13, 14] et la réduction symplectique de Marsden-Weinstein. Non seulement elle me permet de retrouver l'extension des résultats de Eastwood aux puissances conformes du laplacien, en évitant les développements très techniques de [40], mais elle présente aussi l'avantage d'être facilement généralisable à d'autres opérateurs invariants. Je présente ici le cas du laplacien.

Théorème 2.1.1. *[64] Soit $\lambda_\Delta = \frac{n-2}{2n}$. La quantification conformément équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda_\Delta,\lambda_\Delta}$ établit un isomorphisme de $\mathfrak{o}(p+1,q+1)$-modules entre l'espace des tenseurs Killing conformes et l'espace des symétries du laplacien.*

Le premier espace s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur l'orbite coadjointe minimale $\mathbb{O}_{min}$ de $\mathrm{O}(p+1,q+1)$ et le deuxième à son unique déformation quantique : le quotient de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{o}(p+1,q+1))$ par l'idéal de Joseph.

Par définition, l'idéal de Joseph [46] est l'annihilateur dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{o}(p+1,q+1))$ de la *représentation minimale* de $\mathrm{O}(p+1,q+1)$, qui se réalise comme le noyau du laplacien Δ sur l'espace homogène $\mathbb{S}^p\times\mathbb{S}^q$ [47]. Ainsi, ce théorème peut s'interpréter suivant la philosophie de la méthode des orbites : la quantification conformément équivariante conduit à la représentation minimale de $\mathrm{O}(p+1,q+1)$ comme quantifiée de $\mathbb{O}_{min}$, l'orbite coadjointe non triviale de dimension minimale de $\mathrm{O}(p+1,q+1)$. Cette quantification permet aussi de retrouver l'unique star-produit fortement invariant sur l'orbite $\mathbb{O}_{min}$ [3, 5].

Dans un deuxième temps, en collaboration avec Fabian Radoux (univeristé de Liège, Belgique) et Josef Šilhan (Université de Masaryck, République Tchèque), j'ai traité la question suivante, en suspens depuis le travail de Eastwood [37].

Q . *Sur une variété conforme générale $(M,[\mathrm{g}])$, sous quelles conditions les 2-tenseurs Killing conformes donnent-ils lieu à des symétries du laplacien conforme ?*

Si les symétries d'ordre 1 sont données par les vecteurs Killing conformes et les fonctions constantes, celles d'ordre 2 ne sont connues que dans quelques cas. Par exemple, Carter prouve que $\nabla_i K^{ij}\nabla_j$ est une symétrie si K est un tenseur de Killing et si (M,g) est une variété d'Einstein [24]. Pour résoudre le cas général, nous étendons la méthode mise au point dans [64]. Ceci est possible grâce à l'existence d'une quantification $\mathcal{Q}^{\lambda_\Delta,\lambda_\Delta}$ naturelle et conformément invariante [59, 78], et à la classification que nous obtenons des opérateurs naturels et conformément invariants entre certains fibrés tensoriels.

Théorème 2.1.2. *[67] Les symétries d'ordre 2 de Δ (aux symétries d'ordre 1 près) sont données par*

$$D_1 = \mathcal{Q}^{\lambda_\Delta,\lambda_\Delta}(K) - f,$$

où K est un tenseur Killing conforme tel que $\mathrm{Obs}(K) = \frac{(n-2)}{3(n+1)}\, dx^i \left(C_{ijk}^{l}\nabla_l - 3A_{ijk}\right) K^{jk}$ est une 1-forme exacte, et la fonction f vérifie $df = \mathrm{Obs}(K)$. Ici, A et C sont les tenseurs de Cotton-York et de Weyl, et l'opérateur Obs est conformément invariant.

Nous fournissons deux exemples en dimension 3. Dans l'un, l'opérateur $\mathcal{Q}^{\lambda_\Delta,\lambda_\Delta}(K)$ n'est pas une symétrie du laplacien conforme mais $\mathrm{Obs}(K)$ est une 1-forme exacte et nous obtenons une symétrie de symbole principal K. Dans l'autre, basé sur une métrique Stäckel conforme, la 1-forme $\mathrm{Obs}(K)$ n'est pas exacte et il n'existe donc pas de symétrie du laplacien conforme de symbole principal K.

Les opérateurs différentiels D_1, tels que $[D_1, \Delta] = 0$, forment une algèbre de symétries qui préserve tous les espaces propres du laplacien et pas seulement son noyau. Jusqu'à l'ordre 2, les travaux précédents [64, 67] donnent une description de ces symétries. Par ailleurs, leur symboles principaux sont clairement des tenseurs de Killing, i.e., des symétries du flot géodésique.

Q . *Déterminer la structure d'algèbre des symétries commutant avec le laplacien, sur les variétés* (M, g) *à courbure constante.*

En collaboration avec Petr Somberg (Université Charles, Prague) et Josef Šilhan, je montre que cette algèbre est un quotient de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie des champs de Killing, $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1, q)$, $\mathfrak{o}(p, q) \ltimes \mathbb{R}^{p,q}$ ou $\mathfrak{o}(p, q+1)$ suivant la courbure et la signature (p, q) de la métrique g. Les deux étapes clés sont la construction d'une quantification adaptée et d'une bijection entre tenseurs de Killing et sections parallèles d'un certain fibré vectoriel. Pour ce faire, nous développons le calcul des tracteurs dans le cadre (pseudo-)riemannien.

Existence et unicité de la quantification équivariante : les cas exceptionnels [65]. Soit $M = \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie simple $|1|$-graduée agissant par champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, avec $\mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}^n$ agissant par translations. D'après [16], il existe alors une unique quantification $\mathfrak{g}$-équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ pour des valeurs de λ et μ génériques.

Q . *Pour quels poids* λ, μ *la quantification* $\mathfrak{g}$*-équivariante n'est pas unique ou ne peut être définie ? Comment interpréter ces poids exceptionnels ?*

J'ai apporté une réponse à ces questions en utilisant l'approche cohomologique de la quantification équivariante, développée par Lecomte dans le cas projectif [52].

Théorème 2.1.3. *[65] La quantification* $\mathfrak{g}$*-équivariante existe et est unique si et seulement si il n'existe pas d'opérateurs* $\mathfrak{g}$*-invariants sur l'espace des symboles qui abaissent le degré.*

Un cas particulier est $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1, q+1)$ agissant par champs de vecteurs Killing conformes sur $\mathbb{R}^{p,q}$. Le théorème 2.1.3 précise alors les résultats déjà connus [35, 78]. De plus, j'obtiens alors que $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ est non unique si et seulement si il existe des opérateurs conformément invariants à la fois sur l'espace des symboles et sur l'espace des densités $\mathcal{F}^\lambda(M)$. Ce travail fournit une réalisation non triviale de la conjecture de Kroeske [51] : en géométrie parabolique, les cas exceptionnels de non-existence ou non-unicité d'un opérateur bidifférentiel invariant correspondent à l'existence d'un opérateur différentiel invariant sur au moins l'un de ses facteurs. Le cadre précis dans lequel ce paradigme est valable reste une question ouverte.

2.2 Quantifications à valeurs dans les opérateurs différentiels spinoriels

Soit (E, g) un fibré pseudo-Euclidien sur M de rang pair, qui admet un fibré spinoriel S, i.e. tel que $\mathrm{End}S \cong \mathbb{C}\mathrm{l}(E)$. Si $E = TM$, alors M est une variété pseudo-Riemannienne spinorielle. L'espace des sections de S de carré intégrable est alors l'espace des phases quantique d'une particule à spin sur M, et l'algèbre des opérateurs différentiels spinoriels $\mathcal{D}(M, S)$ est une algèbre d'observables pour ce système. S'appuyant sur la supergéométrie qu'il a fondé, Berezin, avec Marinov, a proposé un pendant classique à ce système [9]. Une telle *pseudo-particule à spin* a depuis été largement étudié en physique, voir e.g. [72, 39], mais toujours dans le formalisme lagrangien.

Par ailleurs, Getzler a développé une quantification à valeurs dans $\mathcal{D}(M,S)$ pour une filtration bien choisie, qui assigne un ordre aux sections de $\mathbb{C}\mathrm{l}(TM)$. Elle lui permet de fournir une nouvelle preuve du théorème de l'indice pour l'opérateur de Dirac. Par contre l'algèbre des symboles définit par cette filtration n'est ni commutative, ni supercommutative.

Je prolonge ces deux points de vues sur l'algèbre $\mathcal{D}(M,S)$ en m'appuyant sur le concept de quantification, tout d'abord pour un fibré (E,g) quelconque.

Réalisation géométrique des symboles de $\mathcal{D}(M,S)$ [63, 42]. Le diagramme présenté en introduction conduit naturellement aux questions suivantes.

Q . *Quelle est l'algèbre de Poisson correspondant à l'algèbre $\mathcal{D}(M,S)$? Quelle est la variété symplectique correspondante ?*

En collaboration avec Melchior Grützmann et Ping Xu (Penn State University, États-Unis), j'obtiens la réponse dans [42], grâce à un choix de filtration spécifique et différent de celui de Getzler. Précisément, cette dernière assigne un ordre 2 aux dérivations et un ordre 1 aux générateurs des sections du fibré de Clifford. Ainsi, l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}(M,S)$ est isomorphe à l'algèbre de Poisson $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ des fonctions sur la variété graduée

$$\mathcal{M} := T^*[2]M \oplus E[1].$$

Ici, $E[k]$ désigne l'espace annelé de base M et de faisceau structurel donné par les sections de $\wedge E^*$ ou $\mathcal{S}E^*$ suivant la parité de k, les sections de E étant considérées de degré k. Via la métrique g, le fibré E^* s'identifie à E, et donc $\mathcal{O}(\mathcal{M}) = \mathrm{Pol}(T^*M) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(M)} \Gamma(\wedge E)$. De plus, les sections de $\wedge^l E$ sont considérées de degré l et les fonctions polynomiales de degré k en les fibres de T^*M sont considérées de degré $2k$. Par ailleurs, la structure symplectique de $\mathcal{M}$ est uniquement déterminée par la métrique g et une connection compatible sur E [73, 74].

Quantification de Weyl de $\mathcal{M}$ et application aux algébroïdes de Courant [42]. La structure d'algébroïde de Courant sur un fibré (E,g) a été introduite dans [56] et apparait dans de nombreux contextes : géométrie complexe généralisée [43], bi-algébroïdes de Lie [56], géométrie parabolique [2], σ-modèles [75]. Roytenberg a montré qu'une telle structure peut être décrite par une fonction cubique $\Theta \in \mathcal{O}_3(\mathcal{M})$ en involution $\{\Theta,\Theta\} = 0$ [74].

Q . *Peut-on décrire la structure d'algébroïde de Courant en terme d'un opérateur $D \in \mathcal{D}(M,S)$?*

Une réponse affirmative a été apportée par Alekseev et Xu [1], via le concept d'opérateur de Dirac nilpotent, dont le carré est une fonction sur M. Le cas particulier des bi-algébroïdes de Lie a été étudié en détail dans [26], puis utilisé dans le cadre de la géométrie complexe généralisée [25]. Dans [42], nous clarifions le lien entre ces travaux et celui de Roytenberg grâce à notre extension de la quantification de Weyl à $\mathcal{M}$, de la forme $\mathcal{WQ} : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(M,S)$. Cette dernière dépend d'un choix de connections sur les fibrés vectoriels TM, E et S.

Théorème 2.2.1. *[42] Soit (E, g) un algébroïde de Courant décrit par $\Theta \in \mathcal{O}_3(\mathcal{M})$. Il existe un unique opérateur de Dirac nilpotent $D \in \mathsf{D}(M, \mathsf{S})$ qui soit antisymétrique et de symbole principal Θ, il est égal à $\mathcal{WQ}(\Theta)$.*

L'unicité de D est un résultat fondamental, esquissé par Ševera [77]. En conséquence, la fonction D^2 est un invariant de l'algébroïde de Courant E, que nous identifions géométriquement.

Quantification géométrique de $\mathcal{M}$ et géométrie conforme de $\mathcal{M}$ et S [60, 61]. Je suppose désormais que $E = TM$, la métrique g sur TM provenant d'une structure pseudo-Riemanienne sur M. De plus, la dimension de M est supposée paire.

Q . *La quantification géométrique de $\mathcal{M}$ permet-elle de construire le fibré des spineurs S ?*

Dès son article fondateur sur la supergéométrie [50], Kostant exhibe le lien entre algèbre de Grassmann et algèbre de Clifford via la préquantification. La quantification géométrique permet en plus d'obtenir le module des spineurs comme espace de représentation de l'algèbre de Clifford [80, 86]. Dans [60, 61], je généralise ces résultats et construis le fibré des spineurs S à partir d'une polarisation sur $\mathcal{M}$. La quantification géométrique permet alors de relier actions symplectique sur $\mathcal{M}$ et unitaire sur S. En particulier, la dérivée de Lie des spineurs [49], définie pour les champs de vecteurs Killing conformes X de (M, g), correspond à un certain relevé hamiltonien de X à $\mathcal{M}$, que j'ai identifié géométriquement.

Quantification conformément équivariante et particules libres à spin [60, 63]. Dorénavant la variété (M, g) est supposée conformément plate et de signature (p, q). La dérivée de Lie des spineurs munit $\mathcal{D}(M, S)$, mais aussi sa modification $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M, S)$ par des fibrés de densités, d'une action de l'algèbre de Lie conforme $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$. Il en découle deux $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$-modules de symboles : le premier, $\mathsf{S}^{\mu-\lambda}(M)$, est gradué et muni de l'action hamiltonienne de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$, le deuxième, $\mathsf{T}^{\mu-\lambda}(M)$, est bigradué et muni de l'action tensorielle de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$. Les deux sont isomorphes à $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ en tant que $\mathcal{C}^\infty(M)$-modules.

Q . *Existe-t-il une unique quantification conformément équivariante à valeurs dans $\mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M, S)$?*

Les résultats généraux de [20] s'appliquent et fournissent une réponse positive si le module source de la quantification est $\mathsf{T}^{\mu-\lambda}(M)$. L'autre choix de module $\mathsf{S}^{\mu-\lambda}(M)$ est également pertinent et traité dans ma thèse.

Théorème 2.2.2. *[60, 63] Pour des poids génériques $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe une unique superisation $\mathfrak{S}^{\mu-\lambda} : \mathsf{T}^{\mu-\lambda}(M) \to \mathsf{S}^{\mu-\lambda}(M)$ et une unique quantification $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathsf{S}^{\mu-\lambda}(M) \to \mathcal{D}^{\lambda,\mu}(M, S)$ qui sont conformément équivariantes.*

La preuve est analogue à celle donnée dans [35] pour les opérateurs différentiels scalaires : il s'agit de calculer les opérateurs de Casimir des trois modules en jeu et de les diagonaliser. Pour cela, j'ai étendu la décomposition harmonique aux polynômes sur le superespace $\mathbb{R}^{n|n}$.

Ces résultats s'appliquent à la descritpion pseudo-classique et quantique des particules à spin. Je retrouve en particulier les symétries d'ordre 1 de l'opérateur de Dirac obtenues dans [8] et leur pendant classique données par superisation de tenseurs Killing-Yano conformes [39, 79, 22]. Plus généralement, j'obtiens toutes les supercharges par la superisation $\mathfrak{S}^0$ de tenseurs Killing conformes symétriques/antisymétriques. De plus, je montre que ces dernières sont en correspondance avec les symétries de l'opérateur de Dirac via $\mathcal{Q}^{\lambda,\lambda}$ pour $\lambda = \frac{n-1}{2n}$.

2.3 La supergéométrie et ses généralisations

La supergéométrie a été introduite suite à la découverte des supersymétries, comme généralisation $\mathbb{Z}_2$-graduée de la géométrie usuelle. Elle permet, par exemple, de réaliser la superalgèbre de Virasoro comme champs de vecteurs, sur une supersurface de Riemann ou sur le supercercle. Je présente une étude géométrique de ce dernier dans l'esprit du programme d'Erlangen de Félix Klein. Par ailleurs, de nombreuses algèbres associatives sont graduées-commutatives, mais pour des graduations plus fines que la simple parité, données par des groupes abéliens quelconques. Avant d'élaborer une géométrie dans un tel cadre, il s'agit d'y étendre l'algèbre linéaire et en particulier la notion non triviale de déterminant.

Géométries du supercercle [66]. Soit E le fibré vectoriel trivial $S^1 \times \mathbb{R}^N$ sur S^1. Le supercercle $S^{1|N}$ est défini comme la supervariété ΠE, de base S^1 et de faisceau structurel $\Gamma(\Lambda E^*)$. Pour $N = 0$, il se réduit au cercle qui admet trois géométries finies : euclidienne, affine et projective. Elles sont caractérisées de manière équivalente en termes d'action de groupe, d'invariant ou du 1-cocycle déduit de ce dernier par la formule de Cartan. Par exemple, dans le cas projectif, la dérivée schwarzienne est déduite du birapport par ce procédé, voir e.g. [34]. Les 1-cocycles ainsi obtenus engendrent les trois seuls espaces de cohomologie $H^1(\mathrm{Diff}_+(S^1), \mathcal{F}^\lambda(S^1))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, qui sont non triviaux. En retour, ces derniers classifient les géométries du cercle.

Q . *La classification des géométries du cercle s'étend-elle au supercercle ?*

En collaboration avec Christian Duval (université d'Aix-Marseille), je réponds à cette question dans [66], en me restreignant aux géométries de contact du supercercle. Nous fournissons ainsi une approche synthétique à différents objets issus de la théorie superconforme des champs, en particulier les super-birapports pair et impair [57] et la super-dérivée schwarzienne [71]. L'idée maîtresse consiste à traiter l'action d'un supergroupe de Lie sur $S^{1|N}$ comme l'action d'un groupe sur un produit direct de deux ensembles via le formalisme des S-points. La construction des invariants, pairs et impairs, devient alors une généralisation directe du cas du cercle. De plus, la formule de Cartan permet d'associer aux invariants pairs des 1-cocycles si $N = 1, 2$. Nous en déduisons une classification des géométries de contact de $\mathrm{S}^{1|1}$ par $H^1(K(1), \mathcal{F}^\lambda(S^{1|1}))$, avec $K(1)$ le supergroupe des contactomorphismes.

Généralisation du déterminant aux algèbres graduées commutatives [31]. Si Γ est un groupe abélien de type fini, alors les algèbres simples Γ-commutatives sur $\mathbb{R}$ ont exactement pour parties paires les algèbres de Clifford [68] (nous supposons que la loi de commutation est encodée par un bicaractère $\Gamma \times \Gamma \to \{\pm 1\}$). En particulier, l'algèbre des quaternions est vue comme une algèbre $(\mathbb{Z}_2)^3$-graduée commutative. Il en découle un nouveau point de vue pour l'algèbre linéaire sur les algèbres de Clifford, et notamment pour la notion de déterminant. Ceci est d'autant plus intéressant qu'il existe plusieurs généralisations du déterminant pour les matrices à coefficients quaternioniques [4].

Q . *Quelles propriétés du déterminant se généralisent aux matrices à coefficients dans les algèbres* Γ*-graduées paires ?*

Cette question a été traitée en termes de quasi-déterminants [32] puis en termes cohomologiques [30]. En collaboration avec Tiffany Covolo (université du Luxembourg), je propose une troisième approche dans [31]. Elle est basée sur l'équivalence entre les catégories des algèbres $\mathbb{Z}_2$- et Γ-graduées commutatives, qui induit une équivalence forte entre les catégories monoïdales de leurs modules. Pour les morphismes de modules (préservant le degré), nous retrouvons existence et unicité du Γ-déterminant comme morphisme de groupe. De plus, nous obtenons une formule explicite pour celui-ci, résultat hors de portée par les deux précédentes approches. Enfin, nous montrons qu'il existe une famille finie de déterminants le prolongeant aux morphismes internes (ne préservant pas le degré) et vérifiant une propriété de multi-linéarité au signe près. Pour l'algèbre des quaternions, cette famille de Γ-déterminants fournit une alternative, à valeurs dans $\mathbb{H}$, aux déterminants quaternioniques connus, en particulier au déterminant de Dieudonné qui est un morphisme de groupe à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ [33].

3 Projet de recherche

Mon projet de recherche s'articule autour de trois axes complémentaires : le dévelopement de la quantification équivariante, son utilisation pour classifier les symétries d'opérateurs différentiels invariants, et l'extension aux supergroupes de la méthode de Kirillov et des formules de déformations universelles de Rieffel.

3.1 Extension de la quantification équivariante

Je propose à la fois d'étendre le cadre géométrique de la quantification équivariante à l'ensemble des géométries paraboliques et d'en obtenir des formules intégrales pour prolonger ses espaces de définition.

Quantification équivariante et géométrie parabolique. Les briques élémentaires de la géométrie parabolique sont les espaces homogènes G/P où G est un groupe de Lie simple et P un sous-groupe parabolique. Localement, cela correspond à l'action par champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ d'une algèbre de Lie simple et $|k|$-graduée : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$, où la partie négative $\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ est de dimension n et agit par translations infinitésimales. Si $k > 1$, il en résulte un drapeau invariant sur $\mathbb{R}^n$ et une nouvelle filtration sur les opérateurs différentiels [69]. Si $k = 2$, une telle filtration affecte un ordre 1 aux dérivations tangentes à la distribution invariante et un ordre 2 aux dérivations transverses. Elle permet, par exemple, d'établir un théorème de l'indice pour des opérateurs sous-elliptiques [83].

Depuis sa découverte en géométrie projective [53] et conforme [35], la quantification équivariante $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu}$ a connu de nombreuses généralisations successives. En particulier, elle existe et est unique pour toute géométrie parabolique $|1|$-graduée [16], ainsi que pour la géométrie contact projective qui est $|2|$-graduée [28].

Q . *Existe-t-il une unique quantification équivariante pour toute géométrie parabolique plate ?*

L'existence est garantie, car on sait que $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^n)$, avec $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie $|1|$-graduée [15]. Par contre l'unicité n'est pas vérifiée en général, comme le montre un exemple simple (avec P sous groupe de Borel). Pour la rétablir, mon idée est de ne considérer que les quantifications qui respectent à la fois la filtration standard, donnée par l'ordre, et la filtration additionnelle induite par le drapeau invariant. La décomposition de l'espace des symboles donné par le caractère infinitésimal de $\mathfrak{g}$ doit alors permettre de montrer l'unicité, suivant la méthode élaborée dans [28].

Pour G est un groupe algébrique complexe simple, Brylinski a construit une quantification équivariante sur l'algèbre des fonctions régulières $R[T^*G/P]$, sous certaines conditions sur G/P [18]. Cette quantification spécifie un produit hermitien sur $R[T^*G/P]$ qui fournit un modèle holomorphe pour la représentation unitaire de G sur l'espace des demi-densités $\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}(G/P)$. La quantification que je propose devra être comparée à celle-ci. Par unicité, les deux coïncident dans le cas $|1|$-gradué. Pour aller plus loin, je propose de comparer chacune de ces quantifications équivariantes pour des paires $G/P \cong G'/P'$ ou $G/P \twoheadrightarrow G/P'$. La comparaison des représentations unitaires correspondantes ira de paire.

Formules intégrales pour les quantifications équivariantes. De nombreuses généralisations de la quantification de Weyl ont été développé. Du point de vue de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie, il s'agit de construire des entrelacements continus entre espaces topologiques, de fonctions sur des orbites coadjointes d'une part et d'opérateurs sur les représentations unitaires correspondantes d'autre part. La quantification équivariante, $\mathcal{Q}^{\lambda,\mu} : \mathrm{Pol}(T^*G/P) \to \mathcal{D}_\lambda(G/P)$, est essentiellement de ce type. En effet, T^*G/P est la résolution de Springer de l'adhérence d'une (ou plusieurs) orbites coadjointes nilpotentes, et $\mathcal{D}_\lambda(G/P)$ est l'algèbre des opérateurs différentiels agissant sur l'espace des λ-densités, une représentation de G qui est unitaire si $\lambda - \frac{1}{2} \in \imath\mathbb{R}$. Par contre les propriétés topologiques de la quantification équivariante sont inconnues à ce jour. Pour la quantification de Weyl, celles-ci se déduisent de sa formule intégrale. Par exemple, cette formule permet de montrer aisément que les fonctions de carrés intégrables sur $T^*\mathbb{R}^n$ sont quantifiés en des opérateurs de Hilbert-Schmidt. En collaboration avec Mickaël Pevzner (Université de Reims) et Pierre Bieliavsky (Université Catholique de Louvain, Belgique), je propose de traiter la question suivante.

Q . *Déterminer une formule intégrale pour la quantification $\mathfrak{g}$-équivariante.*

Tout d'abord, nous chercherons une telle formule pour la quantification $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$-équivariante de $T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, qui est la mieux connue. Cette dernière est essentiellement la quantification de l'orbite coadjointe minimale nilpotente de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ (égale à $T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ si $n \geq 2$). Cela en fait un strict analogue de la quantification de Weyl qui est la quantification de l'orbite coadjointe minimale nilpotente de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ (égale à $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

J'envisage deux méthodes. La première consiste à adapter la quantification, obtenue dans [70], des orbites coadjointes hyperboliques $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. S'inspirant de [11], il serait possible d'obtenir la quantification voulue par l'introduction de paramètres dans la quantification de [70] puis en effectuant un passage à la limite approprié. La seconde approche consiste à construire un entrelacement entre la quantification chercherchée et la quantification de Weyl. Pour ce faire, j'utiliserai la méthode développée dans [11]. Elle fournit cet entrelacement comme opérateur de convolution dont le noyau est solution d'une EDP linéaire. Dans les cas connus cette dernière est résoluble par séparation des variables. Par unicité, la quantification ainsi trouvée coïncidera avec celle obtenue dans [36]. Pour $n = 1$, il sera intéressant de comparer le résultat avec les quantifications des autres orbites coadjointes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, hyperboliques [82] et elliptiques [81, 11]. De plus les crochets de Rankin-Cohen devraient apparaitre naturellement dans le développement du star-produit associé [27, 53].

Par la suite, nous chercherons à déterminer la quantification de l'orbite coadjointe minimale de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$. Je postule que l'EDP associée à cette quantification par [11] est reliée à l'opérateur différentiel d'ordre 4 étudié dans [45, 44]. Les vecteurs propres de ce dernier définissent de nouvelles fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux généralisant ceux de Laguerre, qui sont les vecteurs K-fini de la représentation minimale de $\mathrm{O}(p+1, q+1)$.

3.2 Symétries d'opérateurs différentiels invariants

Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur différentiel G-invariant, agissant entre des fibrés homogènes E et F sur G/P. J'appelle symétries de D les opérateurs différentiels $A \in \mathcal{D}(M, E)$ vérifiant $D \circ A = B \circ D$ pour un certain opérateur différentiel $B \in \mathcal{D}(M, F)$. De telles symétries préservent le noyau de D. Bien sûr les opérateurs $A_0 \circ D$ sont des symétries de D, qui sont considérées triviales.

Je propose une étude générique de l'algèbre des symétries de tels opérateurs (modulo les symétries triviales), m'appuyant sur l'approche initiée en [64]. Elle repose sur l'existence de la quantification équivariante sur T^*G/P (voir paragraphe précédent), et la classification des opérateurs invariants, qui découle des travaux algébriques [13, 14]. Suivant que le fibré E est irréductible ou non, la situation est radicalement différente. Je propose une étude systématique dans le premier cas et le traitement explicite de deux systèmes sur la pseudo-sphère conforme $S^p \times S^q$ dans le deuxième cas : le système infini $\Delta \oplus \Delta^2 \oplus \Delta^3 \oplus \cdots$ et le système $\Delta \oplus \mathbb{D}$ (i.e. laplacien plus opérateur de Dirac).

Opérateurs agissant entre fibrés homogènes irréductibles. Jusqu'à présent, l'algèbre des symétries a été déterminé uniquement pour des opérateurs agissant entre fibrés irréductibles. Citons le laplacien et ses puissances conformes [40, 64], le sous-laplacien CR [85] et l'opérateur de Dirac restreint au fibré homogène des demi-spineurs [38]. Suivant les résultats obtenus dans tous ces cas, je propose de traiter les questions suivantes pour un opérateur invariant D agissant entre fibrés homogènes irréductibles sur G/P.

Q . *(i) L'espace des symétries de D d'ordre k (modulo les symétries triviales) est-il de dimension finie ? (ii) L'algèbre des symétries de D est-il un quotient $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$, où $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$? (iii) L'idéal $\mathcal{J}$ est-il l'annulateur de* $\ker D$ *?*

D'après [64], il existe une symétrie de D de symbole principal donné si et seulement si ce dernier est dans le noyau d'un opérateur G-invariant agissant entre certains fibrés homogènes. Pour répondre à (i), une méthode consiste alors à décomposer les fibrés en questions en fibrés irréductibles et à appliquer la classification des opérateurs invariants à chaque composante. L'espace des symétrie d'ordre k est de dimension finie si les seuls opérateurs non-triviaux apparaissant ainsi sont la version géométrique [19] des premiers opérateurs de la résolution de Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG) [55]. En effet, ce sont exactement ceux admettant des noyaux de dimension finie. Pour un cas particulier donné, cette procédure est aisément applicable, mais le faire de manière générale pourrait s'avérer délicat. Le cas d'opérateurs invariants sur des variétés de drapeaux complètes G/B, avec B sous groupe de Borel, devrait être instructif. Une fois la classification des symétries faite, je pourrai aborder les questions (ii) et (iii). Pour (ii), il s'agira essentiellement de comparer la décomposition en $\mathfrak{g}$-modules irréductibles de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ avec les

$\mathfrak{g}$-modules de symétries obtenus. Pour (iii), il s'agira tout d'abord de fixer le cadre adéquate. Ainsi, pour le laplacien conforme, l'algèbre de symétrie ne dépend pas de la signature tandis que que le noyau de ce dernier est réduit à zéro dans le cas Riemannien.

Systèmes d'opérateurs. Une direction complémentaire de recherche consiste à étudier les algèbres de symétries d'opérateurs différentiels invariant agissant entre fibrés homogènes réductibles sur G/P, i.e., de systèmes d'opérateurs invariants. Je m'intéresse en particulier aux cas où l'algèbre des symétries est engendrée par une (super-)algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ contenant strictement $\mathfrak{g}$. Dans un tel cas on peut chercher un entrelacement entre le $\mathfrak{g}'$-module des solutions du système d'opérateurs et un $\mathfrak{g}'$-module de sections sur un espace plus gros G'/P' (avec $\mathrm{Lie}(G') = \mathfrak{g}'$). C'est un problème inverse à celui de restriction d'une représentation d'un groupe G' à un sous-groupe G. Je présente des résultats préliminaires obtenus en collaboration avec Josef Šilhan (Masaryk University, Brno, République Tchèque) pour les deux exemples mentionnés ci-dessus.

Q . *Quelle est l'algèbre de symétries du système infini* $\Delta \oplus \Delta^2 \oplus \Delta^3 \oplus \cdots$ *et comment l'interpréter ?*

D'après [40, 64], les symétries de chaque opérateur Δ^k (k-ième puissance conforme du laplacien) sont engendrées par l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ des champs de vecteurs Killling conformes sur la pseudo-sphère $S^p \times S^q$. Ce système admet de plus des symétries entrelaçant les puissances conformes successives du laplacien et l'algèbre des symétries est ainsi engendrée par $\mathfrak{o}(p+2, q+1)$. De plus elle est isomorphe à l'algèbre engendrée par l'action de $\mathfrak{o}(p+2, q+1)$ sur le module des densités $\mathcal{F}_\lambda(S^{p+1} \times S^q)$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Afin d'élucider le lien entre ces deux représentations, nous nous aiderons de la détermination des lois de branchements $\mathrm{SO}_0(p+2, q+1) \downarrow \mathrm{SO}_0(p+1, q+1)$ obtenues dans [48] pour les modules de Verma généralisés.

Q . *Quelle est l'algèbre de symétries du système* $\Delta \oplus \mathbb{D}$ *et comment l'interpréter ?*

Les symétries qui entrelacent Δ et $\mathbb{D}$ sont données par l'action des twisteurs-spineurs (ou spineurs Killing-conformes). En y ajoutant les symétries individuelles de ces deux opérateurs, données par $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$, nous obtenons toutes les symétries du lagrangien décrivant un boson et un fermion libre. En dimension 2, elles forment la superalgèbre de Virasoro et sont à la base de la théorie des supercordes, voir e.g. [41]. En dimension 4, elles forment la superalgèbre de Lie superconforme découverte par Wess et Zumino [87], et dont le complexifié est $\mathfrak{sl}(4|1)$. En dimension 3, nous obtenons la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(4|2)$. En revanche, en dimensions supérieures, les symétries d'ordre 1 de $\Delta \oplus \mathbb{D}$ ne forment pas une algèbre de Lie mais engendrent toutes les symétries d'ordre supérieur. Nous nous concentrons donc sur les dimensions 3 et 4. Les symétries de $\Delta \oplus \mathbb{D}$ coïncident alors avec celles de l'unique opérateur conformément invariant qui agit sur ΠS pour M de dimension 3 et sur ΠS^+ pour M de dimension 4 (S est le fibré des spineurs et S^+ celui des demi-spineurs). L'action des twisteurs-spineurs est alors donnée par les champs de vecteurs impairs (S est le fibré des spineurs) et l'identification de l'algèbre des symétries est aisée. En dimension 3, c'est le quotient de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{spo}(4|2))$ par l'idéal de type-Joseph déterminé dans [29].

3.3 Quantification et supergroupes de Lie

Si les aspects algébriques de la théorie des superalgèbres de Lie et de leur représentation sont maintenant bien développés, il n'en va pas de même des aspects analytiques. Ainsi la notion de superespace de Hilbert et de représentation unitaire de supergroupe de Lie dépend des auteurs. Les deux directions de recherche que je propose, en collaboration avec Axel de Goursac (Université de Louvain, Belgique), consistent d'une part à clarifier certains aspects élémentaires concernant la méthode des orbites pour les supergroupes de Lie et d'autre part à obtenir des formules de déformations universelles pour des supergroupes de Lie.

Méthodes des orbites. Rappelons que la superalgèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}(2n|p,q)$ est définie par $[(g,c),(g',c')] = \omega(g,g')$, où $g,g' \in \mathbb{R}^{2n|p,q}$, $c,c' \in \mathbb{R}$ et ω est la forme symplectique paire canonique de $\mathbb{R}^{2n|p,q}$. La restriction de cette dernière à $\mathbb{R}^{0|p,q}$ est la métrique canonique.

Pour les supergroupes de Lie nilpotent l'analogue de la théorie de Kirillov est développée dans [76]. En particulier, l'auteur y montre un analogue du théorème de Stone-Von Neumann classifiant les représentations irréductibles du supergroupe de Heisenberg, vu comme la paire de Harish-Chandra $(\mathrm{H}(2n), \mathfrak{h}(2n|p,q))$, avec $\mathrm{H}(2n)$ le groupe de Heisenberg. De par la définition de représentation unitaire choisie, suivant [23], il n'existe aucune représentation irréductible unitaire si p et q sont non nuls.

Nous proposons d'utiliser la définition plus général de superespace de Hilbert, proposée dans [10], et de considérer comme unitaire toutes les représentations qui préserve la forme superhermitienne. Nous postulons que toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de Clifford-Weyl, i.e. de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}(2n|p,q)$, sont alors unitarisables et données par la méthode des orbites.

Quantification par déformations universelles pour l'action du supergroupe de Poincaré. A partir des représentations unitaires du groupe de Heisenberg G, obtenues par la méthode des orbites, il est possible de construire des formules intégrales de quantifications G-équivariantes. Un moyen naturel est d'utiliser la structure d'espace symétrique des orbites coadjointes associées à ces représentations. Suivant le travail de Rieffel, ceci permet d'obtenir une formule de déformation universelle, qui s'applique à toute $\mathbb{C}^*$-algèbre admettant une action suffisamment régulière de G. Cette procédure a été généralisé d'une part à tout groupe de Lie G Kälherien à courbure négative [12], et d'autre part au supergroupe de Heisenberg [10]. Nous en proposons une nouvelle extension.

Q . *Obtenir une formule de quantification par déformations universelles pour le supergroupe de Poincaré en dimension* $1+1|N$.

L'exemple du groupe de Poincaré en dimension $1+1$ s'inscrit dans le cadre du travail général [12]. Cependant, l'extension au supergroupe de Poincaré est non triviale. Une première étude nous a d'ores et déjà permis de confirmer que la définition de $\mathbb{C}^*$-superalgèbre proposée dans [10] était pertinente dans ce cas également, car stable par déformation. Par ailleurs nous avons clarifier certaines difficultés rencontrées dans [10], pour le traitement du supergroupe de Heisenberg, grâce à la considération de polarisations complexes pour quantifier les orbites coadjointes. De plus, le passage au supergroupe de Poincaré induit des phénomènes nouveaux, la structure symétrique ne provient plus d'un automorphisme du (super-)groupe et la formule de quantification obtenue, si elle est toujours de type WKB, a désormais une amplitude bornée. Les variables grassmaniennes jouent ainsi un rôle régularisant. La formule de déformation universelle obtenue devrait conduire en particulier à une déformation non triviale du supergroupe de Poincaré, i.e. à un supergroupe de Poincaré quantique. Ceci contraste avec le cas du supergroupe de Heisenberg, où la déformation induite sur le supergroupe est triviale. Dans un second temps nous explorerons les applications potentielles. Les théories des champs, invariantes sous l'action du supergroupe de Poincaré, sont des candidats naturels. L'objectif est de construire ainsi des théories quantiques des champs qui soient renormalisables, comme cela a été fait dans [10]. Par ailleurs, à toute surface Lorentzienne spinorielle M, on peut attacher une supersurface de Riemann. La déformation de sa $\mathbb{C}^*$-superalgèbre de fonctions pourrait donner lieu à une déformation non-triviale du triplet spectral de M.

Références

[1] A. Alekseev and P. Xu. Derived brackets and courant algebroids. unpublished, 2001.

[2] Stuart Armstrong and Rongmin Lu. Courant algebroids in parabolic geometry. *arXiv :1112.6425*, 2011.

[3] D. Arnal, H. Benamor, and B. Cahen. Algebraic deformation program on minimal nilpotent orbit. *Lett. Math. Phys.*, 30(3) :241–250, 1994.

[4] H. Aslaksen. Quaternionic determinants. *The Mathematical Intelligencer*, 18 :57–65, 1996.

[5] A. Astashkevich and R. Brylinski. Non-local equivariant star product on the minimal nilpotent orbit. *Adv. Math.*, 171(1) :86–102, 2002.

[6] T. N. Bailey, M. G. Eastwood, and A. R. Gover. Thomas's structure bundle for conformal, projective and related structures. *Rocky Mountain J. Math.*, 24(4) :1191–1217, 1994.

[7] X. Bekaert. Higher spin algebras as higher symmetries. *arXiv :0704.0898*, 2007.

[8] I. M. Benn and J. M. Kress. First-order Dirac symmetry operators. *Class. Quant. Grav.*, 21(2) :427, 2004.

[9] F. A. Berezin and M. S. Marinov. Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics. *Ann. Phys.*, 104 :336–362, April 1977.

[10] P. Bieliavsky, A. De Goursac, and G. M. Tuynman. Deformation quantization for Heisenberg supergroup. *Journal of Functional Analysis*, 263(3) :549–603, May 2012.

[11] P. Bieliavsky, S. Detournay, and Ph. Spindel. The deformation quantizations of the hyperbolic plane. *Comm. Math. Phys.*, 289(2) :529–559, 2009.

[12] P. Bieliavsky and V. Gayral. Deformation quantization for actions of Kählerian lie groups. *to appear in the Memoirs of the American Mathematical Society*, available as arXiv :1109.3419.

[13] B. D. Boe and D. H. Collingwood. A comparison theory for the structure of induced representations. *J. Algebra*, 94(2) :511–545, 1985.

[14] B. D. Boe and D. H. Collingwood. A comparison theory for the structure of induced representations. II. *Math. Z.*, 190(1) :1–11, 1985.

[15] F. Boniver and P. Mathonet. Maximal subalgebras of vector fields for equivariant quantizations. *J. Math. Phys.*, 42(2) :582–589, 2001.

[16] F. Boniver and P. Mathonet. IFFT-equivariant quantizations. *J. Geom. Phys.*, 56(4) :712–730, 2006.

[17] S. Bouarroudj and V. Yu. Ovsienko. Three cocycles on $\mathrm{Diff}(S^1)$ generalizing the Schwarzian derivative. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :25–39, 1998.

[18] R. Brylinski. Equivariant deformation quantization for the cotangent bundle of a flag manifold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(3) :881–897, 2002.

[19] A. Čap, A. R. Gover, and M. Hammerl. Normal BGG solutions and polynomials. *Internat. J. Math.*, 23(11) :1250117, 29, 2012.

[20] A. Čap and J. Šilhan. Equivariant quantizations for AHS-structures. *Adv. Math.*, 224(4) :1717 – 1734, 2010.

[21] A. Čap and J. Slovák. *Parabolic Geometries I : Background and General Theory*, volume 154 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2009.

[22] M. Cariglia. Quantum mechanics of Yano tensors : Dirac equation in curved spacetime. *Classical Quantum Gravity*, 21(4) :1051–1077, 2004.

[23] C. Carmeli, G. Cassinelli, A. Toigo, and V. S. Varadarajan. Unitary representations of super Lie groups and applications to the classification and multiplet structure of super particles. *Comm. Math. Phys.*, 263(1) :217–258, 2006.

[24] B. Carter. Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved space. *Phys. Rev. D (3)*, 16(12) :3395–3414, 1977.

[25] Z. Chen. The operators ∂ and $\overline{\partial}$ of a generalized complex structure. *Pacific J. Math.*, 242(1) :53–69, 2009.

[26] Z. Chen and M. Stiénon. Dirac generating operators and Manin triples. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 79(2) :399–421, 2009.

[27] P. B. Cohen, Yu. Manin, and D. Zagier. Automorphic pseudodifferential operators. In *Algebraic aspects of integrable systems*, volume 26 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 17–47. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[28] C. H. Conley and V. Ovsienko. Linear differential operators on contact manifolds. *arXiv :1205.6562*, 2012.

[29] K. Coulembier, P. Somberg, and V. Souček. Joseph ideals and harmonic analysis for $\mathfrak{osp}(m|2n)$. *Int. Math. Res. Not.*, 2013.

[30] T. Covolo. Cohomological approach to the graded berezinian. *arXiv :1207.2962*, 2012.

[31] T. Covolo and J.-Ph. Michel. Determinants over graded linear algebra, a categorical view point. *arXiv :1403.7474*.

[32] T. Covolo, V. Ovsienko, and N. Poncin. Higher trace and Berezinian of matrices over a clifford algebra. *Journal of Geometry and Physics*, 62(11) :2294 – 2319, 2012.

[33] J. Dieudonné. Les déterminants sur un corps non-commutatif. *Bull. Soc. Math. France*, 71 :27–45, 1943.

[34] C. Duval and L. Guieu. The Virasoro group and Lorentzian surfaces : the hyperboloid of one sheet. *J. Geom. Phys.*, 33(1-2) :103–127, 2000.

[35] C. Duval, P. B. A. Lecomte, and V. Yu. Ovsienko. Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(6) :1999–2029, 1999.

[36] C. Duval and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant quantization and symbol calculus : noncommutative hypergeometric functions. *Lett. Math. Phys.*, 57(1) :61–67, 2001.

[37] M. G. Eastwood. Higher symmetries of the Laplacian. *Ann. of Math. (2)*, 161(3) :1645–1665, 2005.

[38] M. G. Eastwood, P. Somberg, and V. Soucek. Higher symmetries of the Dirac operator. Preprint.

[39] G. W. Gibbons, R. H. Rietdijk, and J. W. van Holten. SUSY in the sky. *Nucl. Phys. B*, 404(1-2) :42–64, 1993.

[40] A. R. Gover and J. Šilhan. Higher symmetries of the conformal powers of the Laplacian on conformally flat manifolds. *J. Math Phys.*, 53(3) :26 pp., 2012.

[41] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987.

[42] M. Grützmann, J.-P. Michel, and P. Xu. Weyl quantization of graded symplectic manifolds of degree 2. *In preparation*, 2014.

[43] M. Gualtieri. Generalized complex geometry. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :75–123, 2011.

[44] J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J. Möllers. Orthogonal polynomials associated to a certain fourth order differential equation. *Ramanujan J.*, 26(3) :295–310, 2011.

[45] J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J. Möllers. Special functions associated with a certain fourth-order differential equation. *Ramanujan J.*, 26(1) :1–34, 2011.

[46] A. Joseph. The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 9(1) :1–29, 1976.

[47] T. Kobayashi and B. Ørsted. Analysis on the minimal representation of $\mathrm{O}(p, q)$. I. Realization via conformal geometry. *Adv. Math.*, 180(2) :486–512, 2003.

[48] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, and V. Souček. Branching laws for verma modules and applications in parabolic geometry. i. *arXiv : 1305.6040*.

[49] Y. Kosmann. Dérivées de Lie des spineurs. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 91 :317–395, 1972.

[50] B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. In *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, pages 177–306. Lecture Notes in Math., Vol. 570. Springer, Berlin, 1977.

[51] J. Kroeske. *Invariant bilinear differential pairings on parabolic geometries*. PhD thesis, University of Adelaide, 2008.

[52] P. B. A. Lecomte. On the cohomology of $\mathrm{sl}(m+1, \mathbb{R})$ acting on differential operators and $\mathrm{sl}(m+1, \mathbb{R})$-equivariant symbol. *Indag. Math. (N.S.)*, 11(1) :95–114, 2000.

[53] P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :173–196, 1999.

[54] P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko. Cohomology of the vector fields Lie algebra and modules of differential operators on a smooth manifold. *Compositio Math.*, 124(1) :95–110, 2000.

[55] J. Lepowsky. A generalization of the Bernstein–Gelfand–Gelfand resolution. *J. Algebra*, 49 :496–511, 1977.

[56] Z.-J. Liu, A. Weinstein, and P. Xu. Manin triples for Lie bialgebroids. *J. Differential Geom.*, 45(3) :547–574, 1997.

[57] Yuri I. Manin. *Topics in noncommutative geometry*. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1991.

[58] P. Mathonet. Intertwining operators between some spaces of differential operators on a manifold. *Communications in Algebra*, 27(2) :755–776, 1999.

[59] P. Mathonet and F. Radoux. On natural and conformally equivariant quantizations. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 80(1) :256–272, 2009.

[60] J.-P. Michel. *Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2009. Electronically available as tel-00425576.

[61] J.-P. Michel. Conformal geometry of the supercotangent and spinor bundles. *Comm. Math. Phys.*, 312(2) :303–336, 2012.

[62] J.-P. Michel, P. Somberg, and J. Šilhan. Prolongation of symmetric killing tensors and commuting symmetries of the laplace operator. *arXiv :1403.7226*.

[63] J.-Ph. Michel. Conformally equivariant quantization for spinning particles. *arXiv :1208.4052*.

[64] J.-Ph. Michel. Higher symmetries of Laplacian via quantization. *Ann. Inst. Fourier (to appear)*.

[65] J.-Ph. Michel. Conformally equivariant quantization - a complete classification. *SIGMA*, 8 :Paper 022, 2012.

[66] J.-Ph. Michel and C. Duval. On the projective geometry of the supercircle : a unified construction of the super cross-ratio and Schwarzian derivative. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) :Art. ID rnn054, 47, 2008.

[67] J.-Ph. Michel, F. Radoux, and J. Šilhan. Second order symmetries of the conformal Laplacian. *SIGMA*, 10 :Paper 016, 2014.

[68] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko. Simple graded commutative algebras. *Journal of Algebra*, 323(6) :1649 – 1664, 2010.

[69] K. Neusser. Universal prolongation of linear partial differential equations on filtered manifolds. *Archivum Mathematicum*, 45(4) :289–300, 2009.

[70] M. Pevzner and A. Unterberger. Projective pseudodifferential analysis and harmonic analysis. *Journal of Functional Analysis*, 242(2) :442 – 485, 2007.

[71] A. O. Radul. Superstring Schwartz [Schwarz] derivative and the Bott cocycle. In *Integrable and superintegrable systems*, pages 336–351. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990.

[72] F. Ravndal. Supersymmetric Dirac particles in external fields. *Phys. Rev. D (3)*, 21(10) :2823–2832, 1980.

[73] M. Rothstein. The structure of supersymplectic supermanifolds. In *Differential geometric methods in theoretical physics (Rapallo, 1990)*, volume 375 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 331–343. Springer, Berlin, 1991.

[74] D. Roytenberg. On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids. In *Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001)*, volume 315 of *Contemp. Math.*, pages 169–185. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[75] D. Roytenberg. AKSZ-BV formalism and Courant algebroid-induced topological field theories. *Lett. Math. Phys.*, 79(2) :143–159, 2007.

[76] Hadi Salmasian. Unitary representations of nilpotent super Lie groups. *Comm. Math. Phys.*, 297(1) :189–227, 2010.

[77] P. Ševera. From associative algebroids to associative algebras. *Letter* 6 *to A. Weinstein*, 1999.

[78] J. Šilhan. Conformally invariant quantization - towards complete classification. *Differ. geom. appl.*, 33, Supplement(0) :162 – 176, 2014. The Interaction of Geometry and Representation Theory. Exploring new frontiers.

[79] M. Tanimoto. The role of Killing-Yano tensors in supersymmetric mechanics on a curved manifold. *Nucl. Phys. B*, 442(3) :549–560, 1995.

[80] G. M. Tuynman. Geometric quantization of the BRST charge. *Comm. Math. Phys.*, 150(2) :237–265, 1992.

[81] A. Unterberger and J. Unterberger. Quantification et analyse pseudo-différentielle. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 21(1) :133–158, 1988.

[82] A. Unterberger and J. Unterberger. Algebras of symbols and modular forms. *J. Anal. Math.*, 68 :121–143, 1996.

[83] E. van Erp. The Atiyah-Singer ormula for subelliptic operators on a contact manifold. part i. *Ann. of Math.*, 171 :1647–1681, 2010.

[84] M.A. Vasiliev. Higher spin superalgebras in any dimension and their representations. *JHEP*, 0412 :046, 2004.

[85] Z. Vlasáková. Symmetries of CR sub-Laplacian. *arXiv :1201.6219*, 2012.

[86] F. F. Voronov. Quantization on supermanifolds and an analytic proof of the Atiyah-Singer index theorem. In *Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 38 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 3–118, 186. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in J. Soviet Math. **6**4 (1993), no. 4, 993–1069.

[87] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nucl. Phys. B*, 70(1) :39 – 50, 1974.

[88] H. Widom. A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators. *Bull. Sci. Math. (2)*, 104(1) :19–63, 1980.