Université du Luxembourg 2012-2013
Mathématique Physique 4a

Examen

session de janvier 2013

2 heures

A. Dans cette partie $\Psi : (x,t) \mapsto \Psi(x,t)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs complexe, tel que, pour tout t, la fonction $\Psi_t : x \mapsto \Psi(x,t)$ est de module au carré intégrable, infiniment dérivable, et tend vers 0 en $\pm\infty$ ainsi que toutes ses dérivées.

1. Rappeler l'équation de Schrödinger dans le cas unidimensionnel.
2. Montrer que si Ψ est solution de l'équation de Schrödinger alors $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,t)|^2 dx$ est une fonction constante. En quoi ce fait est-il fondamental ?
3. Rappeler la définition de l'espérance et la variance d'une observable A pour un système de fonction d'onde Ψ_t.
4. Soit $\Psi(x,t) = a\exp(-\frac{m\omega x^2}{\hbar})\exp(i\omega t)$. Normaliser Ψ et montrer qu'elle est solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel à déterminer. Calculer l'espérance et la variance de la position X et de l'impulsion P pour cette fonction d'onde. Interpréter.

B. Cette partie a pour but de redériver une partie des résultats obtenus en cours sur l'oscillateur harmonique. L'hamiltonien H est donné par $H = \hbar^2\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$, où X et P sont les opérateurs position et impulsion.

1. Rappeler la définition de l'adjoint d'un opérateur sur l'espace des fonctions de carrés intégrables. Montrer que X, P et H sont auto-adjoints.
2. Soit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right)$. Montrer que l'adjoint de a est donné par $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right)$.
3. Rappeler la définition du commutateur de deux opérateurs et calculer $[P,X]$ et $[a,a^\dagger]$.
4. En déduire l'expression de H en fonction de a et $a^\dagger$.
5. Expliquer la stratégie pour obtenir le spectre de H et le donner.
6. Résoudre l'équation $a\psi = 0$ et en déduire la forme des solutions stationnaires.