

Sujet 1

Équation de Schrödinger et interprétation probabiliste

Postulats 1 et 6 et exemple pour une particule dans un espace unidimensionnel soumise à un potentiel. Montrer que sa fonction d'onde est de norme constante au cours du temps. Normalisation et interprétation probabiliste. Exemple: normaliser la fonction d'onde suivante (A, m réels)

$$\Psi(x, t) = A \exp\left(-\frac{mx^2}{\hbar} + it\right),$$

et montrer qu'elle est solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel à déterminer.

Sujet 2

Espérance, variance et principe d'incertitude

Postulats 1 et 2. Exemples d'observables (X, P, H) dans le cas unidimensionnel. Définir espérance et variance pour une variable aléatoire en fonction de son amplitude de probabilité. Puis faire de même pour une observable dans le cas 1D. Principe d'incertitude d'Heisenberg. Calcul de l'espérance et de la variance de X et P pour la fonction d'onde (à normaliser) ci-dessus.

Sujet 3

Résolution de l'équation de Schrödinger par séparation des variables

Postulats 1 et 6. Montrer que sous l'hypothèse de séparation des variables on obtient l'équation de Schrödinger stationnaire dans le cas 1D. Application au cas du puits de potentiel infini: détermination des solutions. Montrer qu'elles forment une famille orthonormale.

Sujet 4

Résolution de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique

Postulat 2. Exemples: X, P, H pour l'oscillateur harmonique 1D. Définition de l'adjoint d'un opérateur. Montrer que X, P, H sont auto-adjoints, et que les opérateurs de création et d'annihilation sont adjoints. Pour rappel ils sont donnés par

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}' + i\hat{P}') \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}' - i\hat{P}'),$$

où $X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ et $P' = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}$. Donner l'idée menant à la détermination des valeurs propres ainsi que la preuve de un ou deux des lemmes.

Sujet 5

Les solutions stationnaires de l'oscillateur harmonique

Postulat 1 et 2. Calcul des commutateurs $[P, X]$ et $[a, a^\dagger]$ (voir sujet 4 pour leur expression). Forme des solutions stationnaires. Calcul de la solution stationnaire d'énergie nulle. Normalisation des solutions stationnaires et calcul des espérances et variances.