

Sujet de thèse de Bachelor

Encadrant: *Jean-Philippe Michel*

Cardinaux et ordinaux

Brève description

Un entier naturel peut être vu comme le nombre d'éléments d'un ensemble fini ou comme le premier entier plus grand que les précédents. Ces deux notions se généralisent de manière distinctes comme respectivement: cardinal d'un ensemble et nombre ordinal. Les deux permettent une approche complémentaire de la notion d'infini en mathématique.

Il s'agira essentiellement de se familiariser avec ces notions par l'étude d'exemples concrets. D'une part, on déterminera le cardinal d'ensembles usuels, c'est-à-dire si ils sont dénombrables, ou indénombrables, et dans le deuxième cas si ils sont en bijection avec \mathbb{R} ou plus grand. Par exemple on traitera des ensembles de nombres rationnels, algébriques, réels, ou encore de l'ensemble des parties de \mathbb{R} mesurables (au sens de Borel puis Lebesgue), puis des ensembles de fonctions continues, intégrables, bornées. D'autre part, la notion d'ordinal nous permettra de montrer un résultat étonnant: la suite de Goodstein (voir la page dédiée sur wikipédia), bien que prenant très vite des valeurs gigantesques, impossible à calculer pour un ordinateur, converge vers zéro.

Exemples de références

On pourra s'appuyer sur tout ouvrage traitant de la théorie des ensembles et plus particulièrement sur la note historique suivante de Patrick Dehornoy:

<http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/Surveys/Dhv.pdf> .

Prérequis: *Quelques éléments des cours d'analyse et algèbre*

Langue: *français*