

Université  
de Liège



# Topologie générale

Notes provisoires

PIERRE MATHONET

Faculté des Sciences  
Département de Mathématique

Année académique 2013-2014

# Introduction

Ce cours est une introduction à la topologie générale. Cette branche des mathématiques a pour objet principal l'étude abstraite de notions telles que la continuité, la convergence, la compacité, la connexité etc... et généralise les notions qui sont utilisées en analyse, dans le cas particulier la topologie euclidienne.

Dans le premier chapitre, on définit la notion de topologie sur un ensemble quelconque  $X$ . Il s'agit de se donner une collection de sous-ensembles de  $X$  que l'on appellera ouverts, et qui doivent avoir les propriétés bien connues des ouverts euclidiens en termes d'unions et d'intersections. Le fait étonnant est que ces simples propriétés des ouverts permettent de reconstruire une bonne partie des notions vues en analyse à l'aide de la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$  (intérieur, adhérence, frontière, continuité, connexité, compacité), tout en gardant de bonnes propriétés.

Dans ce même chapitre, on passera également en revue différentes méthodes pour définir une topologie sur un ensemble (par les fermés, par les systèmes de voisinages, par une base, par une sous-base), on définira les notions élémentaires d'intérieur, d'adhérence et de frontière ou d'applications continues.

On introduira différentes constructions d'espaces topologiques (les sous-espaces, les produits et les quotients). Enfin, on appliquera les différents résultats dans une étude sommaire des groupes topologiques et de leurs actions.

Dans le deuxième chapitre, on introduit quelques propriétés supplémentaires des espaces topologiques. Il s'agit de propriétés de dénombrabilité, ainsi que de propriétés de séparation (encore appelées axiomes). La définition extrêmement générale et peu restrictive des topologies ne permet en effet pas d'obtenir certains résultats qui seront fondamentaux dans les applications de la topologie. On étudiera le comportement de ces propriétés vis-à-vis des constructions de topologies citées plus haut et on étudiera quelques théorèmes importants pour les espaces normaux en particulier.

Enfin, les chapitres 3 et 4 sont consacrés aux notions de compacité et de connexité des espaces topologiques, ainsi qu'aux notions semblables.

Pour rompre avec la tradition consistant à omettre les références bibliographiques dans les notes de cours, je voudrais mentionner quelques ouvrages classiques. Ces notes sont basées essentiellement sur le cours de topologie du professeur Marc De Wilde [2]. J'ai donné des détails et développé certains aspects en consultant notamment les ouvrages suivants. Le livre [5] est très complet et couvre bien plus que le contenu de ce cours. L'ouvrage [4] est classique. Citons également [1], qui est cependant assez ardu. J'ai aussi regardé un ouvrage moins classique et plus abordable disponible sur le web, sur demande à l'auteur [3].

Je complèterai cette bibliographie dans les versions suivantes de ce cours.

# Chapitre 1

## Espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous allons définir le concept de topologie en général, et passer en revue plusieurs moyens de se donner une topologie sur un ensemble  $X$  quelconque. Nous généraliserons ensuite les notions étudiées dans le cours de première année, telles que l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'un ensemble, ou les applications continues. Nous introduirons des constructions classiques en topologie qui permettent de définir de nouvelles topologies à partir d'anciennes : les sous-espaces, les produits et les quotients. Nous appliquerons ensuite les quelques résultats obtenus pour étudier quelques propriétés des groupes topologiques et de leurs actions.

### 1.1 Topologies

Donnons la définition d'une topologie. Comme souvent, nous ne définissons pas un exemple particulier, mais les conditions qui font d'un ensemble une topologie.

**Définition 1.1.1.** Une topologie sur un ensemble  $X$  est une partie  $\mathcal{T}$  de  $2^X$  telle que

- Toute union d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$  ;
- Toute intersection *finie* d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ .

Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont appelés ouverts. Un couple  $(X, \mathcal{T})$  formé d'un ensemble  $X$  et d'une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  est appelé espace topologique.

Dans cette définition, parmi les unions quelconques d'éléments de  $\mathcal{T}$ , il y a l'union sur la famille vide, qui est l'ensemble vide. Parmi les intersections finies, il y a l'intersection sur la famille vide, qui est  $X$ . On peut donc reformuler la définition comme suit.

**Définition 1.1.2.** Une topologie sur un ensemble  $X$  est une partie  $\mathcal{T}$  de  $2^X$  telle que

- L'ensemble  $\mathcal{T}$  contient  $\emptyset$  et  $X$  ;
- Toute union (non triviale) d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$  ;
- L'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

Voici quelques exemples.

**Exemple 1.1.1.**

1. L'ensemble  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  est la *topologie triviale* sur  $X$  ;
2. L'ensemble  $\mathcal{T} = 2^X$  est la *topologie discrète* sur  $X$  ;
3. La *topologie euclidienne* de  $\mathbb{R}^n$ , notée  $\mathcal{E}$  est constituée des sous-ensembles  $\omega$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que, pour tout  $x \in \omega$ , il existe une boule ouverte  $b_{x,r}$ <sup>a</sup> de centre  $x$  et de rayon  $r$

---

a. On définit  $b_{x,r} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ .

strictement positif telle que  $b_{x,r} \subset \omega$ . Cette définition peut être étendue à tout espace muni d'une distance ou d'une pseudo-distance.

4. La *topologie cofinie* sur un ensemble  $X$  est définie par

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{\omega \subset X : X \setminus \omega \text{ est fini}\}.$$

5. Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ , alors la *topologie induite* par  $(X, \mathcal{T})$  sur  $Y$  est  $\{\Omega \cap Y : \Omega \in \mathcal{T}\}$ .

Nous passons maintenant en revue divers moyens de se donner une topologie. Ce sont les systèmes de voisinages, les bases de topologie, les sous-bases et les fermés. Dans chaque cas, nous aurons deux types de résultats : étant donné un espace topologique, on définira la notion concernée et ses propriétés, ensuite on montrera qu'un objet ayant ces propriétés définit une seule topologie. Nous commençons par les voisinages.

**Définition 1.1.3.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $x \in X$ . Un sous-ensemble  $V$  de  $X$  est un *voisinage* de  $x$  s'il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset V$ . On appelle *système de voisinages* de  $x$  et on note  $\mathcal{V}_x$  l'ensemble des voisinages de  $x$ . On appelle *base de voisinages* de  $x$  tout sous-ensemble  $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}_x$  il existe  $B \in \mathcal{B}_x$  tel que  $B \subset V$ .

Par exemple, dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  une boule ouverte, ou fermée centrée sur  $x$  et de rayon strictement positif est un voisinage de  $x$ . Plus généralement, on peut montrer qu'une partie  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est un voisinage de  $x$  si, et seulement si,  $V$  contient une boule ouverte centrée sur  $x$ , ou une boule fermée centrée sur  $x$  (de rayon strictement positif). L'ensemble  $\mathcal{B}_x$  (resp.  $\mathcal{B}'_x$ ) formé des boules ouvertes (resp. fermées) de rayon strictement positif constitue une base de voisinages de  $x$ . On montre facilement que pour toute suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres strictement positifs qui converge vers 0, l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) centrées sur  $x$  et de rayon  $r_n$  est une base de voisinages de  $x$ .

Pour la topologie discrète sur un ensemble  $X$ , on constate que  $\mathcal{V}_x$  est l'ensemble des parties de  $X$  contenant  $x$ , et que  $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$  est une base de voisinages de  $x$ , quel que soit  $x \in X$ .

Pour l'ensemble  $X = \{a, b, c, d\}$  muni de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\},$$

on a  $\mathcal{V}_d = \{\{b, c, d\}, X\}$  tandis que  $\mathcal{V}_a$  est l'ensemble des parties de  $X$  qui contiennent  $a$ .

Le lien fondamental entre ouverts et voisinages est donné par la proposition suivante.

**Proposition 1.1.1.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $A$  de  $X$  est ouverte si, et seulement si pour tout  $x \in A$ , on a  $A \in \mathcal{V}_x$ .<sup>b</sup>

Nous utiliserons très fréquemment ce proposition pour démontrer qu'un ensemble est ouvert.

*Démonstration.* Pour tout  $\Omega \in \mathcal{T}$ , et tout  $x \in \Omega$ , on a  $x \in \Omega \subset \Omega$ , donc  $\Omega$  est voisinage de  $x$ . Inversement, si pour tout  $x \in V$ , il existe  $\omega_x \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega_x \subset V$ , alors on a  $V = \cup_{x \in V} \omega_x$ , et  $V$  est ouvert.  $\square$

La proposition suivante donne les propriétés des systèmes de voisinages.

**Proposition 1.1.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Les systèmes de voisinages définis par  $\mathcal{T}$  ont les propriétés suivantes :

b. Lisez : un ensemble est ouvert si, et seulement si, il est voisinage de chacun de ses points.

1. Pour tout  $V \in \mathcal{V}_x$ , on a  $x \in V$  ;
2. Si  $V \in \mathcal{V}_x$  et  $W \in \mathcal{V}_x$ , alors on a  $V \cap W \in \mathcal{V}_x$  ;
3. Pour tout  $x \in X$ , on a  $X \in \mathcal{V}_x$  ;
4. Si  $V \in \mathcal{V}_x$  et  $V \subset W$ , alors  $W \in \mathcal{V}_x$  ;
5. Si  $V \in \mathcal{V}_x$ , il existe  $V' \in \mathcal{V}_x$  tel que pour tout  $y \in V'$ , on a  $V \in \mathcal{V}_y$ .

*Démonstration.* Soient  $x \in X$  et  $V \in \mathcal{V}_x$ . Il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset V$ . Cela montre en particulier que  $x$  est dans  $V$ . Si  $W \in \mathcal{V}_x$ , alors il existe  $\omega' \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega' \subset W$  et on a donc  $x \in \omega \cap \omega' \subset V \cap W$ , ce qui prouve le point 2. Pour le point 3, on note que  $X$  est un ouvert. Pour le point 4, on note qu'on a  $x \in \omega \subset V \subset W$ . Enfin, pour le point 5,  $V' = \omega$  convient.  $\square$

Passons maintenant au résultat réciproque.

**Proposition 1.1.3.** *Soient  $X$  un ensemble et pour tout  $x$  une partie  $\mathcal{W}_x$  de  $2^X$  qui satisfait les cinq conditions de la proposition précédente. Alors il existe une seule topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  telle que  $\mathcal{W}_x$  soit le système de voisinage de  $x$  pour  $\mathcal{T}$  (i.e.  $\mathcal{W}_x = \mathcal{V}_x$ ), pour tout  $x \in X$ .*

*Démonstration.* Commençons par l'unicité : si une topologie  $\mathcal{T}$  répond à la question, alors, d'après la proposition 1.1.1, les ouverts de  $\mathcal{T}$  sont exactement les sous-ensembles  $\omega$  de  $X$  tels que pour tout  $x \in \omega$ , on a  $\omega \in \mathcal{V}_x = \mathcal{W}_x$ . Donc les ouverts sont caractérisés par les ensembles  $\mathcal{W}_x$  et il n'y a qu'une solution possible.

Passons maintenant à l'existence : nous posons naturellement

$$\mathcal{T} = \{\omega \subset X : \forall x \in \omega, \omega \in \mathcal{W}_x\},$$

nous montrons que  $\mathcal{T}$  est bien une topologie, et que le système de voisinages de  $x$  pour  $\mathcal{T}$  coïncide avec  $\mathcal{W}_x$ .

On a  $\emptyset \in \mathcal{T}$  puisqu'il n'y a pas de condition dans ce cas, et on a  $X \in \mathcal{T}$  par la propriété 3 de  $\mathcal{W}_x$ . Soit  $(\omega_\alpha : \alpha \in A)$  une famille d'éléments de  $\mathcal{T}$ . Pour tout  $x \in \cup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ , il existe  $\alpha_0$  tel que  $x \in \omega_{\alpha_0}$ . On a donc  $\omega_{\alpha_0} \in \mathcal{W}_x$  et par la propriété 4 de  $\mathcal{W}_x$ , on a  $\cup_{\alpha \in A} \omega_\alpha \in \mathcal{W}_x$ . On conclut donc que  $\mathcal{T}$  contient les unions de ses éléments. Enfin, soient  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ . Si  $\omega_1 \cap \omega_2$  contient  $x$ , alors on a  $\omega_1 \in \mathcal{W}_x$  et  $\omega_2 \in \mathcal{W}_x$ , donc par la propriété 2 ci-dessus, on a  $\omega_1 \cap \omega_2 \in \mathcal{W}_x$ .

Soit maintenant  $V \in \mathcal{V}_x$ . Il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset V$ . Par définition de  $\mathcal{T}$ , on a  $\omega \in \mathcal{W}_x$ , et par la propriété 4 ci-dessus on a  $V \in \mathcal{W}_x$ .

Enfin si  $V \in \mathcal{W}_x$ , posons  $V^\circ = \{y \in X : V \in \mathcal{W}_y\}$ . On a  $x \in V^\circ$ , et par la propriété 1,  $V^\circ \subset V$ . Si nous montrons  $V^\circ \in \mathcal{T}$ , alors on aura  $V \in \mathcal{V}_x$ . Mais pour tout  $y \in V^\circ$ , par 5, il existe  $V'_y \in \mathcal{W}_y$  tel que pour tout  $z \in V'_y$ , on a  $V \in \mathcal{W}_z$  (donc  $z$  appartient à  $V^\circ$ ). On a donc  $V'_y \subset V^\circ$ , et par 4,  $V^\circ \in \mathcal{W}_y$ . On a donc démontré que pour tout  $y \in V^\circ$ , on a  $V^\circ \in \mathcal{W}_y$ . Donc  $V^\circ$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Nous introduisons maintenant les bases de topologie.

**Définition 1.1.4.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une base de  $\mathcal{T}$  est une partie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{T}$  telle que tout élément de  $\mathcal{T}$  est union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

Citons comme exemple l'ensemble  $\mathcal{B}$  des boules ouvertes de  $\mathbb{R}^n$ , qui est une base de la topologie euclidienne, l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel qui est une base de la même topologie ou l'ensemble  $\mathcal{B}$  des singletons qui est une base de la topologie discrète sur tout ensemble  $X$ .

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{T}$  est une base de  $\mathcal{T}$  si, et seulement si, pour tout  $\Omega \in \mathcal{T}$ , et tout  $x \in \Omega$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset \Omega$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ ,  $\Omega \in \mathcal{T}$  et  $x \in \Omega$ , il existe une famille  $(\omega_\alpha : \alpha \in A)$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  tels que  $\Omega = \cup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$ . Et donc il existe  $\alpha_0$  tel que  $x \in \omega_{\alpha_0} \subset \Omega$ . Inversement, si pour tout  $x \in \Omega$ , il existe  $\omega_x \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in \omega_x \subset \Omega$ , on a  $\Omega = \cup_{x \in \Omega} \omega_x$ .  $\square$

Voici maintenant les propriétés caractéristiques des bases de topologies.

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$  alors toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{B}$  est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ . De manière équivalente, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ , alors  $X$  est union d'éléments de  $\mathcal{B}$  et l'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{B}$  est union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ , alors toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{B}$  appartient à  $\mathcal{T}$ , donc est union d'éléments de  $\mathcal{B}$ . La seconde propriété se montre de la même manière, et est d'ailleurs équivalente à la première.  $\square$

Passons maintenant au résultat réciproque.

**Proposition 1.1.6.** *Si  $\mathcal{B} \subset 2^X$  satisfait une des deux propriétés (équivalentes) de la proposition précédente, alors il existe une unique topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  telle que  $\mathcal{B}$  soit une base de  $\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* Traitons l'unicité. Si  $\mathcal{T}$  est une topologie dont  $\mathcal{B}$  est une base, alors tout élément de  $\mathcal{T}$  est union d'éléments de  $\mathcal{B}$  et, réciproquement, toute union d'éléments de  $\mathcal{B}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ . Donc  $\mathcal{T}$  ne peut être que l'ensemble des sous-ensembles de  $X$  qui sont unions d'éléments de  $\mathcal{B}$ . On peut aussi caractériser  $\mathcal{T}$  à partir de la proposition 1.1.4 : si  $\mathcal{T}$  répond à la question, alors on a

$$\mathcal{T} = \{\Omega \subset X : \forall x \in \Omega, \exists \omega \in \mathcal{B} : x \in \omega \subset \Omega\}. \quad (1.1)$$

Pour l'existence, on démontre, soit que l'ensemble des unions d'éléments de  $\mathcal{B}$  est une topologie admettant  $\mathcal{B}$  pour base, soit que l'ensemble  $\mathcal{T}$  défini par (1.1) est une topologie admettant  $\mathcal{B}$  pour base. Adoptons la première définition. Soit alors  $(\omega_\alpha : \alpha \in A)$  une famille d'éléments de  $\mathcal{T}$ . Pour tout  $\alpha \in A$ , il existe une famille  $(\omega_{\alpha,\beta} : \beta \in B_\alpha)$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  tels que  $\omega_\alpha = \cup_{\beta \in B_\alpha} \omega_{\alpha,\beta}$ . Alors on a  $\cup_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \cup_{\alpha \in A} \cup_{\beta \in B_\alpha} \omega_{\alpha,\beta}$  et cet ensemble est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ , donc un élément de  $\mathcal{T}$ . Par hypothèse,  $X$  est union d'éléments  $\mathcal{B}$  et appartient donc à  $\mathcal{T}$ . Enfin, si  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ , on a, avec les notions précédentes  $\omega_1 = \cup_{\alpha \in A} \omega_\alpha$  et  $\omega_2 = \cup_{\beta \in B} \Omega_\beta$ , et  $\omega_1 \cap \omega_2 = \cup_{\alpha \in A, \beta \in B} (\omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ . Chaque intersection  $\omega_\alpha \cap \Omega_\beta$  étant union d'éléments de  $\mathcal{B}$ , cet ensemble appartient à  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Remarquons que, même si nous ne l'avons pas utilisée, la caractérisation de la topologie  $\mathcal{T}$  dont une base est donnée fournie par (1.1) est pratique, et a été utilisée dans le cours de première année pour introduire la topologie euclidienne. Cet exemple sera généralisé d'ici peu, voir la définition 1.1.8. Poussons maintenant un peu plus loin le concept de base, en introduisant celui de sous-base.

**Définition 1.1.5.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{T}$  est une sous-base de  $\mathcal{T}$  si tout élément de  $\mathcal{T}$  est union d'intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$ .*

Par définition, si  $\mathcal{S}$  est une sous-base de  $\mathcal{T}$ , alors l'ensemble  $\mathcal{B}$  des intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$  est une base de  $\mathcal{T}$ .

Dans ce cas, il n'y a pas de propriété nécessaire pour qu'une partie de  $2^X$  soit une sous-base : nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.1.7.** Soit  $\mathcal{S} \subset 2^X$ . Il existe une unique topologie  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  dont  $\mathcal{S}$  est une sous-base. Cette topologie contient  $\mathcal{S}$  et est incluse dans toute topologie contenant  $\mathcal{S}$ , on l'appelle la topologie engendrée par  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Nous traitons d'abord l'unicité : si  $\mathcal{S}$  est une sous-base d'une topologie  $\mathcal{T}$ , alors  $\mathcal{T}$  contient  $\mathcal{S}$ , l'ensemble des intersections finies des éléments de  $\mathcal{S}$ , et enfin les unions de tels ensembles. Puisque  $\mathcal{S}$  doit être une sous-base, alors  $\mathcal{T}$  est également incluse dans l'ensemble des unions d'intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$ . Nous avons donc caractérisé  $\mathcal{T}$  au moyen de  $\mathcal{S}$ .

Pour l'existence, il faut montrer que l'ensemble proposé est bien une topologie. On constate alors que l'ensemble  $\mathcal{B}$  des intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$  satisfait les conditions pour être une base de topologie (voir la proposition 1.1.6) et définit donc une unique topologie. Puisque  $\mathcal{B}$  contient  $\mathcal{S}$ , il en est de même pour  $\mathcal{T}$ . De plus, si une topologie  $\mathcal{T}'$  contient  $\mathcal{S}$ , elle contient  $\mathcal{B}$  et par suite  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Insistons sur le fait qu'une base de la topologie engendrée par  $\mathcal{S}$  est formée par les intersections finies d'éléments de  $\mathcal{S}$ . Cette caractérisation nous sera utile quand nous définirons les produits.

**Exemple 1.1.2.** Soient  $X = \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{S} = \{]a, b[ \times \mathbb{R} : a < b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times ]c, d[ : c < d \in \mathbb{R}\}$ . La topologie engendrée par  $\mathcal{S}$  a pour base les intervalles  $]a, b[ \times ]c, d[$ . On peut démontrer qu'elle coïncide avec la topologie euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\mathcal{S}$  est  $\{[a, b] \times \mathbb{R} : a \leq b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times [c, d] : c \leq d \in \mathbb{R}\}$ , alors une base de  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  contient les singletons, et  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  est donc la topologie discrète.

Passons maintenant à la définition des fermés.

**Définition 1.1.6.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $F$  de  $X$  est *fermé* si  $X \setminus F$  est ouvert

Les propriétés des fermés se déduisent de celles des ouverts par passage au complémentaire, et vice-versa. La preuve des propositions suivantes est alors directe.

**Proposition 1.1.8.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Toute intersection de fermés est un fermé et toute union finie de fermés est un fermé.

On remarquera également qu'on peut remplacer cette propriété par celle, équivalente, qui stipule que toute intersection de fermés est un fermé, que  $\emptyset$  est un fermé, et que l'union de deux fermés quelconques est un fermé. La propriété réciproque s'énonce comme suit.

**Proposition 1.1.9.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{F}$  une famille de sous-ensembles satisfaisant la condition de la proposition précédente. Il existe une unique topologie  $\mathcal{T}$  telle que  $\mathcal{F}$  soit l'ensemble des fermés associés à  $\mathcal{T}$ .

*Démonstration.* Il suffit de définir les ouverts comme les complémentaires des éléments de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Enfin, terminons cette section par un dernier moyen de se donner une topologie, qui généralise ce qui a été vu en première année.

**Définition 1.1.7.** Soit  $X$  un ensemble. Une *pseudo-distance* sur  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $d(x, y) \geq 0$  pour tous  $x, y \in X$  ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tous  $x, y \in X$  ;

3.  $d(x, x) = 0$  pour tout  $x \in X$  ;
4.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  pour tous  $x, y, z \in X$

C'est une distance si de plus  $d(x, y) = 0$  implique  $x = y$ . Un espace muni d'une (pseudo-)distance est appelé espace (pseudo-)métrique.

Une pseudo-distance sur un espace permet de définir les boules (ouvertes) de cet espace, toujours par  $b_{x,r} = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ . On obtient ainsi une topologie.

**Définition 1.1.8.** Soit  $(X, d)$  un espace (pseudo-)métrique. La topologie  $\mathcal{T}_d$  associée à  $d$  est la topologie admettant pour base les boules ouvertes définies par la distance.

On vérifie en effet facilement, en utilisant l'inégalité triangulaire, que l'intersection de deux boules est une union de boules, et que  $X$  est une union de boules, donc la définition est justifiée, en recourant à la proposition 1.1.6.

Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est dit *(pseudo-)métrisable* si sa topologie s'écrit  $\mathcal{T}_d$  pour une (pseudo-)distance  $d$ .

### 1.1.1 Exercices

1. Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à deux éléments (distincts)  $X = \{a, b\}$  ;
2. Déterminer cinq topologies sur un ensemble à trois éléments (distincts)  $X = \{a, b, c\}$  ;
3. Soient  $X$  un ensemble et  $A \subset X$ . Démontrer que  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\Omega \subset X : A \subset \Omega\}$  est une topologie sur  $X$ .
4. Soient  $X$  un ensemble et  $Y \subset X$  un sous-ensemble muni d'une topologie  $\mathcal{T}'$ . Démontrer que  $\mathcal{T}' \cup \{X\}$  est une topologie sur  $X$  (on considère tout sous-ensemble de  $Y$  comme un sous-ensemble de  $X$  de manière naturelle).
5. Soit  $X$  un ensemble. Démontrer que l'application

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définit une distance sur  $X$ . Caractériser la topologie associée à cette distance.

6. Démontrer que sur  $\mathbb{R}^2$ , la distance euclidienne standard et la distance de Manhattan définissent la même topologie.
7. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Démontrer que l'application

$$d' : X \times X : (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une distance sur  $X$ . Démontrer que les topologies  $\mathcal{T}_d$  et  $\mathcal{T}_{d'}$  coïncident.

8. Démontrer que dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie euclidienne, un sous-ensemble  $F$  est fermé si, et seulement si, il contient la limite de chacune de ses suites convergentes.

## 1.2 Intérieur adhérence, frontière

La donnée d'une topologie sur un ensemble  $X$  permet d'associer à chaque sous-ensemble  $A$  trois nouveaux ensembles, l'intérieur, l'adhérence et la frontière de  $A$ . Nous définissons ici ces ensembles et donnons quelques propriétés générales.



**Définition 1.2.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Un point  $x \in X$  est *intérieur* à  $A$  si  $A \in \mathcal{V}_x$ . On appelle intérieur de  $A$  l'ensemble de ses points intérieurs, et on le note  $A^\circ$ .

**Proposition 1.2.1.** *Pour tout sous-ensemble  $A$ , l'intérieur de  $A$  est ouvert, et est inclus dans  $A$ . De plus il contient tout ouvert inclus dans  $A$ .*

*Démonstration.* Commençons par la dernière assertion. Si  $\omega \in \mathcal{T}$  est tel que  $\omega \subset A$ , alors tous les points de  $\omega$  sont intérieurs à  $A$ , donc  $\omega \subset A^\circ$ . Ensuite, on a

$$A^\circ = \bigcup_{\omega \in \mathcal{T}: \omega \subset A} \omega,$$

ce qui montre que  $A^\circ$  est ouvert et inclus dans  $A$ . □

Passons maintenant à l'adhérence.

**Définition 1.2.2.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Un point  $x \in X$  est *adhérent* à  $A$  si tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$ . On appelle *adhérence* de  $A$  l'ensemble des points adhérents à  $A$ , et on note cet ensemble  $\bar{A}$  ou  $A^-$ .

Les propriétés de l'adhérence sont duales de celles de l'intérieur.

**Proposition 1.2.2.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Alors*

1. *On a  $x \in \bar{A}$  si, et seulement si, tout ouvert contenant  $x$  rencontre  $A$ ;*
2. *On a  $\bar{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$ ;*
3.  *$\bar{A}$  est un fermé et est inclus dans tout fermé contenant  $A$ .*

*Démonstration.* Pour le premier point, on note que si  $x \in \bar{A}$  et si  $\omega \in \mathcal{T}$  contient  $x$ , alors  $\omega$  est voisinage de  $x$  et donc rencontre  $A$ . Réciproquement, si tout ouvert contenant  $x$  rencontre  $A$ , alors pour tout  $V \in \mathcal{V}_x$ , il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset V$ , et puisque  $\omega$  rencontre  $A$ , il en est de même pour  $V$  et le point 1. est prouvé. On note ensuite que d'après 1.,  $x$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si, aucun ouvert contenant  $x$  n'est inclus dans  $X \setminus A$ . Cette dernière condition s'écrit  $x \notin (X \setminus A)^\circ$ . Enfin,  $\bar{A}$  est fermé par 2. et si  $F$  est un fermé contenant  $A$ , alors on a  $X \setminus F \subset X \setminus A$  et de là  $X \setminus F \subset (X \setminus A)^\circ$  et finalement  $F \supset X \setminus (X \setminus A)^\circ = \bar{A}$ . □

**Définition 1.2.3.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . La frontière de  $A$ , notée  $A^\bullet$ , est l'ensemble des points adhérents à  $A$  et à son complémentaire  $X \setminus A$ . On a donc

$$A^\bullet = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = X \setminus (A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ).$$

**Proposition 1.2.3.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . La frontière de  $A$  est un fermé. On a de plus*

1.  $\bar{A} = A^\circ \cup A^\bullet$  et  $A^\circ \cap A^\bullet = \emptyset$ ;
2.  $\bar{A} = A \cup A^\bullet$ ;
3.  $A^\circ = A \setminus A^\bullet$ .

*Démonstration.* On a visiblement  $A^\circ \subset \bar{A}$  et  $A^\bullet \subset \bar{A}$ . Soit maintenant  $x \in \bar{A}$ . Deux cas exclusifs peuvent se produire : soit il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega \subset A$ , et  $x$  est alors dans  $A^\circ$ , soit pour tout  $\omega \in \mathcal{T}$  contenant  $x$ , on a  $\omega \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ , et dans ce cas  $x$  est dans  $A^\bullet$ . Le deuxième point est une conséquence directe du premier. Pour le dernier, si  $x$  est dans  $A^\circ$ , alors il est dans  $A$ , et pas dans  $A^\bullet$ , par le premier point également. Enfin, si  $x$  est dans  $A \setminus A^\bullet$ , il est dans  $\bar{A} \setminus A^\bullet = A^\circ$ . □

Terminons cette section par deux notions simples mais importantes.

**Définition 1.2.4.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $X$ . Alors  $A$  est dense dans  $B$  si on a  $A \subset B \subset \overline{A}$ .

Remarquons que  $A$  est dense dans  $X$  si  $X \subset \overline{A}$ , ce qui veut dire que pour tout  $x \in X$  et tout ouvert  $\omega$  contenant  $x$ ,  $\omega$  rencontre  $A$ , ou encore que tout ouvert  $\omega$  non vide rencontre  $A$ . Voici un résultat concernant la densité.

**Proposition 1.2.4.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Si  $A$  est dense dans  $X$  et si  $\omega$  est ouvert, alors  $A \cap \omega$  est dense dans  $\omega$ .

*Démonstration.* Nous devons démontrer l'inclusion  $\omega \subset \overline{A \cap \omega}$ . Soient  $x \in \omega$  et  $\Omega$  un ouvert contenant  $x$ . Puisque  $A$  est dense dans  $X$ , tout ouvert contenant  $x$  rencontre  $A$ . Alors  $\Omega \cap \omega$  est ouvert et contient  $x$  et donc on a  $(\Omega \cap \omega) \cap A \neq \emptyset$ , ce qui prouve que  $x$  est adhérent à  $A \cap \omega$ .  $\square$

**Définition 1.2.5.** Un espace topologique est *séparable*<sup>c</sup> s'il contient une partie  $D$  dense et dénombrable.

A titre d'exemple, citons l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  qui est séparable, puisque l'ensemble des rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$  pour la topologie euclidienne. De même,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  est séparable, puisque les points à composantes rationnelles y sont denses. Il va également de soi que tout espace topologique dénombrable est séparable. D'autres exemples sont fournis par la proposition suivante.

**Proposition 1.2.5.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique séparable. Si  $\omega$  est ouvert dans  $X$ , alors  $\omega$  contient un ensemble dénombrable et dense dans  $\omega$ . De plus, l'espace topologique  $(\omega, \mathcal{T}_{\text{ind}})$  est séparable.

*Démonstration.* Soit  $D$  une partie dénombrable et dense dans  $X$ . Par la proposition 1.2.4,  $D \cap \omega$  est dense dans  $\omega$  et est dénombrable. Pour la deuxième assertion, on note que, avec les mêmes notations  $D \cap \omega$  est dense dans  $\omega$  pour la topologie induite par  $X$  car on a

$$\mathcal{T}_{\text{ind}} = \{\Omega \in \mathcal{T} : \Omega \subset \omega\},$$

alors tout ouvert non vide de  $\mathcal{T}_{\text{ind}}$  rencontre  $D$ , et l'intersection est nécessairement dans  $\omega$ .  $\square$

### 1.2.1 Exercices

1. Démontrer que dans tout espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ , on a

$$(A \cup B)^\circ \setminus \overline{A} \subset B^\circ$$

pour tous  $A, B \subset X$ .

2. Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Démontrer que pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $X$ , on a

$$\overline{A} \cap B^\circ = \overline{(A \cap B)} \cap B^\circ \quad \text{et} \quad \overline{A} \cup B^\circ = \overline{A} \cup (A \cup B)^\circ.$$

3. Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Démontrer que pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $X$ , on a

$$(A^\bullet \cap B^\circ) \cup (A^\circ \cap B^\bullet) \subset (A \cap B)^\bullet \subset (A^\circ \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B^\bullet).$$

c. Ne pas confondre avec la notion d'espace séparé, ou de Hausdorff.

### 1.3 Applications continues

La notion d'application continue entre espaces topologiques joue un rôle central en topologie. Nous définirons d'abord la continuité d'une application en un point, puis nous étudierons les fonctions continues.

**Définition 1.3.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est continue au point  $x \in X$  si pour tout  $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ , on a  $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$ .

Cette définition est donnée en termes de systèmes de voisinages. Dans le résultat suivant, nous allons voir qu'elle se traduit aisément en termes de bases de voisinages, d'ouverts, ou même de bases de topologie.

**Proposition 1.3.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application  $f$  est continue en  $x$  ;
2. Si  $\mathcal{B}_x$  et  $\mathcal{B}_{f(x)}$  sont des bases de voisinages de  $x$  et  $f(x)$  sont des bases de voisinages de  $x$  et  $f(x)$  respectivement, alors

$$\forall B \in \mathcal{B}_{f(x)}, \exists A \in \mathcal{B}_x : f(A) \subset B;$$

3. Pour tout  $\omega' \in \mathcal{T}'$  tel que  $f(x) \in \omega'$ , il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega$  et  $f(\omega) \subset \omega'$  ;
4. Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases de topologies de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  respectivement, pour tout  $B \in \mathcal{B}'$  tel que  $f(x) \in B$ , il existe  $A \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in A$  et  $f(A) \subset B$ .

*Remarque 1.1.* L'énoncé précédent est légèrement ambigu, puisque les assertions 2 et 4 peuvent être comprises comme des propriétés valides pour toute paire de bases, ou pour une seule. Afin de ne pas alourdir l'énoncé, nous n'avons pas séparé ces cas, mais nous prouverons à chaque étape la propriété la plus forte qui puisse être traduite à partir de cet énoncé ambigu.

*Démonstration.* Toutes les équivalences sont de simples vérifications. Nous donnons les détails pour la facilité du lecteur.

La première assertion implique la deuxième. Si  $\mathcal{B}_x$  et  $\mathcal{B}_{f(x)}$  sont des bases de voisinages quelconques de  $x$  et  $f(x)$ , alors pour tout  $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$ , on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}_x$  (car  $f$  est continue), donc il existe  $A \in \mathcal{B}_x$  tel que  $A \subset f^{-1}(B)$ , ce qui s'écrit aussi  $f(A) \subset B$ .

La deuxième assertion implique la première. Fixons des bases de voisinages  $\mathcal{B}_x$  et  $\mathcal{B}_{f(x)}$  satisfaisant la deuxième condition et soit  $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ . Il existe  $B \in \mathcal{B}_{f(x)}$  tel que  $B \subset V$  puis  $A \in \mathcal{B}_x$  tel que  $A \subset f^{-1}(B)$ , donc on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{V}_x$  et  $f$  est continue en  $x$ .

Ceci montre en particulier que la deuxième assertion est vraie pour une paire de bases de voisinages si, et seulement si, elle est vraie pour toutes les paires de bases de voisinages de  $x$  et  $f(x)$ .

Pour montrer que la deuxième assertion est équivalente à la troisième, on note que  $\mathcal{B}_x = \{\omega \in \mathcal{T} : \omega \ni x\}$  et  $\mathcal{B}_{f(x)} = \{\omega' \in \mathcal{T}' : \omega' \ni f(x)\}$  sont des bases de voisinages de  $x$  et  $f(x)$  respectivement. Si la troisième assertion est vraie, ces bases satisfont les conditions de la deuxième assertion. Si la deuxième assertion est vraie, on obtient pour ce choix particulier de bases, la troisième assertion.

On fait de même pour montrer que la deuxième assertion est équivalente à la quatrième, en notant que  $\mathcal{B}_x = \{\omega \in \mathcal{B} : \omega \ni x\}$  et  $\mathcal{B}_{f(x)} = \{\omega' \in \mathcal{B}' : \omega' \ni f(x)\}$  sont des bases de voisinages de  $x$  et  $f(x)$  respectivement.  $\square$

Citons comme exemple de cette proposition la continuité en un point  $x$  pour une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie euclidienne. Puisqu'une base de voisinages de  $x$  est donnée par  $\{]x - \eta, x + \eta[: \eta > 0\}$ , et puisqu'une base de voisinages de  $f(x)$  est donnée par  $\{]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$ , l'application  $f$  est continue en  $x$  si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|y - x| < \eta$  implique  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ .

Passons maintenant à la définition d'une application continue.

**Définition 1.3.2.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est continue si elle est continue en tout point  $x \in X$ .

Bien sûr, des conditions équivalentes à la continuité de  $f$  sont données par la proposition 1.3.1, si on y demande que les conditions soient satisfaites pour tout  $x \in X$ . La proposition suivante donne d'autres conditions.

**Proposition 1.3.2.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application  $f$  est continue ;
2. Pour tout  $\omega' \in \mathcal{T}'$ , on a  $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$  ;
3. Pour tout fermé  $F$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(F)$  est un fermé de  $X$  ;
4. Si  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathcal{T}'$ , alors pour tout  $\omega' \in \mathcal{B}'$ , on a  $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$  ;
5. Si  $\mathcal{S}'$  est une sous-base de  $\mathcal{T}'$ , alors pour tout  $\omega' \in \mathcal{S}'$ , on a  $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}$ .

*Démonstration.* La première assertion implique la seconde. En effet, pour tout  $\omega' \in \mathcal{T}'$  et tout  $x \in f^{-1}(\omega')$ , on a  $f(x) \in \omega'$ , donc  $\omega'$  est voisinage de  $f(x)$ , et  $f^{-1}(\omega')$  est voisinage de  $x$  puisque  $f$  est continue en  $x$ . Donc  $f^{-1}(\omega')$  est voisinage de chacun de ses points.

La deuxième assertion implique la première, puisqu'elle implique la troisième assertion de la proposition 1.3.1, quel que soit  $x \in X$ .

Les deuxième et troisième assertions sont équivalentes par passage au complémentaire. La deuxième implique aussi la quatrième et la cinquième puisque  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{S}'$  sont des parties de  $\mathcal{T}'$ .

Enfin la quatrième ou la cinquième implique la deuxième, puisqu'une image inverse d'unions (d'intersections finies) d'ouverts est l'union (d'intersections finies) des images inverses.  $\square$

**Proposition 1.3.3.** Soient  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{T}')$  et  $(Z, \mathcal{T}'')$  des espaces topologiques. Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des applications continues, alors  $g \circ f$  est une application continue.

*Démonstration.* Il suffit de noter que pour tout ouvert  $\Omega$  de  $Z$ , on a

$$(g \circ f)^{-1}(\Omega) = f^{-1}(g^{-1}(\Omega))$$

et cet ensemble est ouvert puisque  $g^{-1}(\Omega)$  l'est.  $\square$

**Définition 1.3.3.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques. Un homéomorphisme de  $X$  dans  $Y$  est une application bijective de  $X$  dans  $Y$ , continue et d'inverse continu.

S'il existe un homéomorphisme entre  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$ , ces espaces sont dit homéomorphes ou topologiquement équivalents. Il s'agit d'une relation d'équivalence entre espaces topologiques. Quand des espaces sont homéomorphes, rien ne permet de les distinguer d'un point de vue topologique, et on les considérera donc comme égaux. Il est aussi important de noter que les notions que nous introduirons dans les chapitres suivants seront des notions purement topologiques seulement si elles sont préservées par homéomorphisme. Il sera donc important de prouver que c'est le cas.

### 1.3.1 Exercices

1. Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques munis de la topologie cofinie. Démontrer qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si, et seulement si, pour tout  $y \in Y$ , l'ensemble  $f^{-1}(\{y\})$  est fini.
2. Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  des espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application.
  - (a) Démontrer que si  $f$  est continue et surjective et si  $A$  est dense dans  $X$ , alors  $f(A)$  est dense dans  $Y$ .
  - (b) Démontrer que si  $f$  est ouverte et si  $B$  est dense dans  $Y$ , alors  $f^{-1}(B)$  est dense dans  $X$ .

## 1.4 Topologies initiales et finales

L'application suivante est-elle continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1; \\ 2 & \text{si } x \neq 1? \end{cases}$$

Nous savons que cette réponse dépend des topologies sur l'espace source  $\mathbb{R}$  (au départ) ou sur l'espace but  $\mathbb{R}$  (à l'arrivée). En effet, si on considère  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{triv}})$ , l'application  $f$  est continue. Ceci reste vrai quelle que soit la topologie fixée sur l'espace source.

De la même manière, si on considère  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ , cette application est continue, et ceci reste vrai quelle que soit la topologie que l'on considère sur l'espace but.

Dans cette section, nous allons considérer une application  $f : X \rightarrow Y$  et fixer une topologie sur l'un de ces deux espaces. Nous déterminerons ensuite la topologie sur l'autre qui rend l'application  $f$  continue et qui s'éloigne le plus des exemples triviaux cités plus haut. Cela donnera lieu aux concepts de topologie initiale et finale relative à  $f$ .

Outre la curiosité de rendre la fonction définie plus haut continue, ces notions vont nous permettre d'introduire simplement et d'obtenir des propriétés pour les sous-espaces topologiques et les produits d'espaces topologiques où la topologie sera définie comme une topologie initiale, et pour les espaces quotients, où la topologie est une topologie finale.

Afin de mesurer l'éloignement d'une topologie par rapport aux exemples triviaux cités plus haut, nous introduisons un ordre sur les topologies sur un même ensemble.

**Définition 1.4.1.** Soit  $X$  un ensemble. On note  $\mathbb{T}_X^d$  ou simplement  $\mathbb{T}$  l'ensemble des topologies sur  $X$ . Cet ensemble est muni d'un ordre partiel défini par l'inclusion : si  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$  on dit que  $\mathcal{T}$  est *moins fin* que  $\mathcal{T}'$  si  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ , et on note  $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ . On dit également que  $\mathcal{T}'$  est plus fin que  $\mathcal{T}$ .

**Exemple 1.4.1.** Sur  $X = \{a, b, c\}$ , on a

$$\{\emptyset, X\} \leq \{\emptyset, \{a\}, X\} \leq \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\} \leq \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\},$$

par contre, les topologies  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$  et  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a, c\}\}$  sont incomparables.

A titre informatif, voici quelques propriétés de l'espace ordonné que nous venons de définir.

**Proposition 1.4.1.** L'espace ordonné  $(\mathbb{T}, \leq)$  admet un maximum et un minimum. Toute partie  $\mathbb{A}$  (non vide) de  $\mathbb{T}$  admet une borne inférieure et une borne supérieure.

d. Ce n'est pas une notation universellement adoptée, mais plutôt interne à ce cours.

*Démonstration.* Bien sûr, le maximum est donné par la topologie discrète, tandis que le minimum est donné par la topologie triviale. Pour la borne inférieure, on vérifie que  $\cap_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$  est une topologie ayant les bonnes propriétés. Pour la borne supérieure, on considère la topologie engendrée par  $\cup_{\mathcal{T} \in \mathbb{A}} \mathcal{T}$ .  $\square$

Passons maintenant aux définitions que nous avons annoncées. Elles sont formulées sous forme de propositions.

**Proposition 1.4.2.** *Soient  $(Y, \mathcal{T}')$  un espace topologique,  $X$  un ensemble et  $f : X \rightarrow Y$  une application.*

1. *Il existe une unique topologie sur  $X$  qui rend  $f$  continue et moins fine que toute topologie rendant  $f$  continue. On la note  $f^{-1}(\mathcal{T}')$ , et c'est la topologie initiale relative à  $f$  ;*
2. *Alors  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est continue si, et seulement si,  $\mathcal{T} \geq f^{-1}(\mathcal{T}')$  ;*
3. *On a  $f^{-1}(\mathcal{T}') = \{f^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{T}'\}$ .*

*Démonstration.* On sait que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est continue si, et seulement si, pour tout  $\omega \in \mathcal{T}'$ ,  $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}$ , ce qui s'écrit encore

$$\{f^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{T}'\} \subset \mathcal{T}. \quad (1.2)$$

On vérifie directement que  $\{f^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{T}'\}$  est une topologie, que nous notons  $f^{-1}(\mathcal{T}')$ . D'après la condition précédente, elle rend  $f$  continu et (puisqu'elle peut y tenir le rôle de  $\mathcal{T}$ ), et une topologie rend  $f$  continue si, et seulement si, elle contient  $f^{-1}(\mathcal{T}')$ . Enfin, si  $\mathcal{T}''$  rend  $f$  continue, elle est plus fine que  $f^{-1}(\mathcal{T}')$  et si elle est moins fine que toute topologie rendant  $f$  continue, elle est moins fine que  $f^{-1}(\mathcal{T}')$ , ce qui assure l'unicité.  $\square$

Passons maintenant au cas des topologies finales.

**Proposition 1.4.3.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $Y$  un ensemble et  $f : X \rightarrow Y$  une application.*

1. *Il existe une unique topologie sur  $Y$  qui rend  $f$  continue et plus fine que toute topologie rendant  $f$  continue. On la note  $f(\mathcal{T})$ , c'est la topologie finale relative à  $f$  ;*
2. *Alors  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est continue si, et seulement si,  $\mathcal{T}' \leq f(\mathcal{T})$  ;*
3. *On a  $f(\mathcal{T}) = \{\omega \subset Y : f^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}\}$ .*

*Démonstration.* La preuve est analogue à la précédente. Donnons les détails pour la facilité du lecteur. Comme plus haut, la continuité de  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est équivalente à ce que, pour tout  $\omega \in \mathcal{T}'$ , on ait  $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}$ , ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{T}' \subset \{\omega \subset Y : f^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}\}. \quad (1.3)$$

On montre directement que le membre de droite de cette inclusion est une topologie, que nous notons  $f(\mathcal{T})$ . La condition de continuité de  $f$  donnée par (1.3) montre alors que le point 2 de l'énoncé ci-dessus est satisfait. Pour l'unicité, si une topologie  $\mathcal{T}''$  sur  $Y$  satisfait les conditions du point 1, elle rend  $f$  continu et est donc moins fine que  $f(\mathcal{T})$  (par le point 2), et si c'est la plus fine à rendre  $f$  continue, elle est plus fine que  $f(\mathcal{T})$ , et l'unicité est prouvée.  $\square$

*Remarque 1.2.* Les deux propositions précédentes montrent directement qu'on a  $f(\mathcal{T}) \leq \mathcal{T}'$  si, et seulement si,  $\mathcal{T} \leq f^{-1}(\mathcal{T}')$ , puisque ces deux conditions sont équivalentes à la continuité de  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ .

Nous allons maintenant généraliser ces concepts au cas de plusieurs applications. Cette généralisation sera notamment utile pour les espaces produits.

**Proposition 1.4.4.** *Soient  $X$  un ensemble,  $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques, et pour tout  $\alpha \in A$ , une application  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ . Il existe une unique topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  rendant les applications  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$  continues et moins fine que toute topologie rendant les applications  $f_\alpha$  continues. Cette topologie est  $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ ; c'est la topologie initiale relative aux applications  $f_\alpha$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 1.4.2, nous savons que pour tout  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$  est continue si, et seulement si,  $f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha) \leq \mathcal{T}$ . Nous cherchons une topologie vérifiant toutes ces relations et moins fine que toute autre topologie vérifiant ces relations. C'est la définition de la borne supérieure.  $\square$

*Remarque 1.3.* Par définition, la topologie  $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$  admet comme sous-base les éléments des topologies  $f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ , et donc comme base l'ensemble des intersections *finies* de tels éléments, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{f_{\alpha_1}^{-1}(\omega_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f_{\alpha_n}^{-1}(\omega_{\alpha_n}) : n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in A, \omega_j \in \mathcal{T}_{\alpha_j}, \forall j \leq n\}.$$

Nous avons bien sûr une proposition analogue pour les topologies finales.

**Proposition 1.4.5.** *Soient  $X$  un ensemble,  $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques et, pour tout  $\alpha \in A$ , une application  $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X$ . Il existe une unique topologie  $\mathcal{T}$  sur  $X$  rendant les applications  $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X$  continues et plus fine que toute topologie rendant les applications  $f_\alpha$  continues. Cette topologie est  $\inf_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ ; c'est la topologie finale relative aux applications  $f_\alpha$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 1.4.3, nous savons que pour tout  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha : (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  est continue si, et seulement si,  $\mathcal{T} \leq f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ . Nous cherchons donc une topologie satisfaisant ces relations et plus fine que toute topologie les satisfaisant. C'est la définition de la borne inférieure.  $\square$

Les deux propriétés qui suivent sont fondamentales. Elles nous permettront de construire des applications continues à valeurs dans des produits ou des sous-espaces ou des applications continues définies sur des quotients.

**Proposition 1.4.6.** *Soient  $X$  un ensemble,  $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques et pour tout  $\alpha \in A$  une application  $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ . Si on munit  $X$  de la topologie initiale relative aux applications  $f_\alpha$ , alors une application  $f : (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{init}})$  est continue si, et seulement si, les applications  $f_\alpha \circ f : (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$  sont continues.*

*Démonstration.* Il est clair que si  $f$  est continue, les composées  $f_\alpha \circ f$  le sont. Par la proposition 1.3.2, il suffit de démontrer que les images inverses par  $f$  des éléments d'une sous-base de  $\mathcal{T}_{\text{init}}$  sont des ouverts de  $X$ . Au vu de la remarque 1.3, on est amené à considérer l'image inverse par  $f$  d'un ouvert générique  $f_{\alpha_0}^{-1}(\omega_{\alpha_0})$ , où  $\omega_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ . Mais on a

$$f^{-1}(f_{\alpha_0}^{-1}(\omega_{\alpha_0})) = (f_{\alpha_0} \circ f)^{-1}(\omega_{\alpha_0})$$

et cet ensemble est ouvert dans  $X$ , par hypothèse.  $\square$

**Proposition 1.4.7.** *Soient  $X$  un ensemble,  $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques et pour tout  $\alpha \in A$  une application  $f_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X$ . Si on munit  $X$  de la topologie finale relative aux applications  $f_\alpha$ , alors une application  $f : (X, \mathcal{T}_{\text{fin}}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue si, et seulement si, les applications  $f \circ f_\alpha : (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  sont continues.*

*Démonstration.* Si  $f$  est continue, les composées  $f \circ f_\alpha$  le sont. Supposons que les composées soient continues. Alors pour tout ouvert  $\omega \in \mathcal{T}'$ , et tout  $\alpha \in A$ , on a

$$(f \circ f_\alpha)^{-1}(\omega) = f_\alpha^{-1}(f^{-1}(\omega)) \in \mathcal{T}_\alpha.$$

Par définition, cela implique  $f^{-1}(\omega) \in f_\alpha(\mathcal{T}_\alpha)$  pour tout  $\alpha \in A$ , donc  $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 1.4.1 Exercices

1. Déterminer la topologie initiale relative à la fonction donnée en introduction, si la topologie de l'espace but est la topologie euclidienne ;
2. Déterminer la topologie finale relative à la fonction donnée en introduction, si la topologie de l'espace source est la topologie euclidienne ;
3. Déterminer la topologie initiale relative à  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ , si l'espace but est muni de la topologie euclidienne ;
4. Déterminer la topologie finale relative à  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ , si l'espace source est muni de la topologie euclidienne ;
5. Soient  $X, Y, Z$  trois ensembles et soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications. Soient  $\mathcal{T}$  une topologie sur  $X$  et  $\mathcal{T}'$  une topologie sur  $Z$ .
  - Démontrer l'égalité  $(g \circ f)(\mathcal{T}) = g(f(\mathcal{T}))$  ;
  - Démontrer l'égalité  $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}') = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{T}'))$ .
6. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ .
  - Déterminer la topologie initiale relative à  $f$ , si l'espace but est muni de la topologie euclidienne ;
  - Déterminer la topologie finale relative à  $f$ , si l'espace source est muni de la topologie euclidienne
7. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une bijection. Soient  $\mathcal{T}$  une topologie sur  $X$  et  $\mathcal{T}'$  une topologie sur  $Y$ .
  - Démontrer que  $f : (X, f^{-1}(\mathcal{T}')) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est un homéomorphisme ;
  - Démontrer que  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, f(\mathcal{T}))$  est un homéomorphisme.

## 1.5 Sous-espaces, topologies induites

Dans les sections qui vont suivre, nous allons montrer trois constructions qui permettent d'obtenir de nouveaux espaces topologiques à partir d'anciens. Nous commençons par la construction la plus simple, celle de sous-espace. Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . On note  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion naturelle. Cette application permet de définir une topologie sur  $Y$ .

**Définition 1.5.1.** La topologie induite sur  $Y$  par  $(X, \mathcal{T})$  est la topologie initiale relative à l'inclusion. On note parfois  $\mathcal{T}_{\text{ind}}$  ou  $\mathcal{T}_X$  la topologie induite par  $X$  sur  $Y$ . L'ensemble  $Y$  muni de cette topologie est appelé *sous-espace topologique* de  $X$ .

Si on a une relation d'inclusion  $Z \subset Y \subset X$  et si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique, il y a deux possibilités pour définir une topologie induite sur  $Z$ . La proposition suivante indique qu'elles coïncident.

**Proposition 1.5.1.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique et si  $Z \subset Y \subset X$ , alors les topologies induites par  $Y$  et par  $X$  dans  $Z$  coïncident.*



*Démonstration.* Un ensemble  $\omega$  est dans la topologie induite par  $Y$  s'il existe un ouvert  $\Omega$  de  $Y$  tel que  $\omega = Z \cap \Omega$ . Or  $\Omega$  est ouvert de  $Y$  si, et seulement si, il existe  $\Omega' \in \mathcal{T}$  tel que  $\Omega = Y \cap \Omega'$ . Dès lors,  $\omega$  est ouvert de la topologie induite par  $Y$  si, et seulement si, il existe  $\Omega' \in \mathcal{T}$  tel que  $\omega = Z \cap Y \cap \Omega' = Z \cap \Omega'$ .  $\square$

*Remarque 1.4.* Si on note  $i' : Z \rightarrow Y$  et  $i : Y \rightarrow X$  les inclusions, nous venons de démontrer  $i'^{-1}(i^{-1}(\mathcal{T})) = (i \circ i')^{-1}(\mathcal{T})$ . On peut démontrer comme exercice que cette égalité est vraie en général : quelles que soient les fonctions  $f : Z \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$ , si  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$ , alors  $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{T}))$ .

Nous avons par définition une description des ouverts d'un sous-espace  $Y$  de  $(X, \mathcal{T})$  comme les intersections de ce sous-ensemble avec les ouverts de  $X$ . La proposition suivante décrit ce qu'il en est pour les fermés.

**Proposition 1.5.2.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $Y$  un sous-ensemble muni de la topologie  $\mathcal{T}_{\text{ind}}$  induite par  $\mathcal{T}$ . Un sous-ensemble  $A$  de  $Y$  est fermé pour  $\mathcal{T}_{\text{ind}}$  si, et seulement si, il existe un fermé  $F$  de  $X$  tel que  $A = Y \cap F$ .*

*Démonstration.* Il suffit en fait de passer au complémentaire : Si  $A$  est un fermé de  $Y$ , alors  $Y \setminus A$  est ouvert de  $Y$ , et il existe  $\Omega \in \mathcal{T}$  tel que  $Y \setminus A = Y \cap \Omega$ . On a alors  $A = Y \cap (X \setminus \Omega)$ . Réciproquement, si  $F$  est un fermé de  $X$ , on a  $Y \cap F = Y \setminus (Y \cap (X \setminus F))$ , donc  $Y \cap F$  est fermé dans  $Y$ .  $\square$

A titre d'exemple, mentionnons le corollaire suivant.

**Corollaire 1.5.1.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $Y$  un sous-espace de  $X$ . Pour toute partie  $A$  de  $Y$ , on a  $A^{-Y} = A^{-X} \cap Y$ .*

*Démonstration.* D'une part,  $A^{-X} \cap Y$  est un fermé de  $Y$  qui contient  $A$ , donc il contient  $A^{-Y}$ . D'autre part, si  $y$  appartient à  $A^{-X} \cap Y$ , alors, si  $\omega$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $y$ , il existe un ouvert  $\Omega$  de  $X$  tel que  $\omega = Y \cap \Omega$ . Alors on a  $\omega \cap A = \Omega \cap A \neq \emptyset$ , ce qui montre que  $y$  appartient à  $A^{-Y}$ .  $\square$

Les propositions qui suivent seront utilisées intensivement dans les sections suivantes. Elles traitent des restrictions d'applications continues à des sous-ensembles. Si  $f : X \rightarrow Z$  est une application et si  $Y \subset X$ , alors on note  $f|_Y$  la restriction de  $f$  à  $Y$ . Nous avons alors un premier résultat.

**Proposition 1.5.3.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Z, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ . Si une application  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue alors  $f|_Y : (Y, \mathcal{T}_{\text{ind}}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue.*

*Démonstration.* La restriction de  $f$  à  $Y$  est la composée  $f \circ i$  où  $i$  est l'inclusion de  $Y$  dans  $X$ , qui est continue, par définition de  $\mathcal{T}_{\text{ind}}$ .  $\square$

Il existe une autre façon de restreindre une application, en gardant les mêmes images, mais en changeant son espace but. Le résultat correspondant est le suivant.

**Proposition 1.5.4.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Z, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques et  $Y$  un sous-ensemble de  $Z$ . Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue et si  $f(X) \subset Y$ , alors  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\text{ind}})$  est continue.*

*Démonstration.* C'est une application directe de la proposition 1.4.6, pour la seule application  $i : Y \rightarrow Z$ .  $\square$

Terminons par une réciproque de la proposition 1.5.3.

**Proposition 1.5.5.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{A}$  une partie de  $2^X$  qui contient un voisinage de chaque point  $x \in X$ . Une application  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue si  $f|_A : (A, \mathcal{T}_{\text{ind}}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$  est continue pour tout  $A \in \mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\omega$  un ouvert de  $\mathcal{T}'$  et  $x \in f^{-1}(\omega)$ . Il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $x \in A^\circ$ . Puisque  $f|_A$  est continu,  $f|_A^{-1}(\omega)$  est un ouvert de  $A$ . Il existe donc  $\Omega \in \mathcal{T}$  tel que  $\Omega \cap A = f|_A^{-1}(\omega)$ . Alors  $\Omega \cap A^\circ$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  contenant  $x$  et inclus dans  $f^{-1}(\omega)$ , ce qui montre que  $f^{-1}(\omega)$  est voisinage de chacun de ses points.  $\square$

## 1.6 Espaces produits

Dans cette section,  $A$  désigne un ensemble d'indices, qui peut être soit fini, soit infini, dénombrable ou non. On se donne une famille d'espaces topologiques  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ .

**Définition 1.6.1.** Le produit cartésien des ensembles  $X_\alpha$  est l'ensemble

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha, \forall \alpha \in A\}.$$

C'est donc l'ensemble de toutes les *familles* formées avec les éléments des ensembles  $X_\alpha$ .

Cette notion de produit a déjà été rencontrée, comme le montrent les trois exemples suivants.

**Exemple 1.6.1.** Si  $A$  est fini, disons  $A = \{1, \dots, p\}$ , alors le produit cartésien s'écrit

$$X_1 \times \cdots \times X_p = \prod_{i=1}^p X_i = \{(x_1, \dots, x_p) : x_i \in X_i, \forall i \leq p\}.$$

On peut garder cet exemple en tête, pour se faire une idée, mais il ne sera pas suffisant, comme nous allons le voir.

Un deuxième exemple est donné par l'espace des suites à valeurs dans un ensemble.

**Exemple 1.6.2.** Soient  $A = \mathbb{N}$  (ou plus généralement un ensemble dénombrable) et  $X$  un ensemble. L'espace des suites d'éléments de  $X$  est

$$X^{\mathbb{N}} = \prod_{i=0}^{\infty} X_{(i)} = \{(x_m)_{m \in \mathbb{N}} : x_m \in X, \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

Il s'agit ici encore d'un exemple assez simple, puisqu'on a un ensemble d'indices bien connu, et qu'on peut encore écrire un produit infini dénombrable comme

$$X_0 \times X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \times \cdots$$

Terminons par un exemple bien connu, mais vu sous un jour inhabituel.

**Exemple 1.6.3.** L'ensemble de toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est le produit  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . En effet, si on considère  $A = \mathbb{R}$ , on peut se donner une fonction  $f$  comme la famille de toutes ses valeurs :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{(f(x))_{x \in \mathbb{R}} : f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

De manière générale,  $B^A$  est l'ensemble des fonctions de  $A$  dans  $B$ , pour la même raison.

Avant de passer à des considérations topologiques, il est important de remarquer que, dans le cas d'un produit général, le fait que le produit contienne un élément nécessite que l'on puisse sélectionner un élément dans chaque ensemble  $X_\alpha$ , pour tout  $\alpha$ . Pour parler de produit en toute généralité, l'axiome du choix est donc nécessaire.

**Définition 1.6.2.** Soient  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  des ensembles. Pour tout  $\alpha_0 \in A$ , on appelle projection canonique et on note  $p_{\alpha_0}$  l'application

$$p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0} : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}.$$

A l'aide de ces applications, nous pouvons maintenant définir une topologie sur le produit cartésien  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .

**Définition 1.6.3.** Soit  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques. La *topologie produit*<sup>e</sup> sur  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  est la topologie initiale relative à la famille des projections canoniques ( $p_\alpha : \alpha \in A$ ).

La topologie produit est donc la moins fine topologie sur le produit qui rend les projections continues. On peut se donner une base de cette topologie.

**Définition 1.6.4.** Pour toute partie finie  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ , et tous sous-ensembles  $B_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ , on définit

$$\pi_A(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}) = p_{\alpha_1}^{-1}(B_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(B_{\alpha_n}).$$

On a donc

$$\pi_A(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha, \quad \text{où } Z_\alpha = \begin{cases} B_\alpha & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}; \\ X_\alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou encore

$$\pi_A(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}, \forall i \leq n\}.$$

**Proposition 1.6.1.** Une base de la topologie produit sur  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  est donnée par les ensembles  $\pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n})$ , où  $\omega_{\alpha_i}$  est un ouvert de  $X_{\alpha_i}$  pour tout  $i$  et où on considère toutes les parties finies  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $A$ .

*Démonstration.* Cela découle directement de la définition de la topologie produit comme la borne supérieure  $\sup_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ . □

Les ouverts de cette base de topologie sont donc les produits d'ouverts, qui n'ont qu'un nombre fini de termes propres. Cette condition tombe évidemment quand on considère un produit fini. Mais par exemple, dans  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  (muni de la topologie produit), l'ensemble  $]0.3; 0.6[^{\mathbb{N}}$  formé des suites à termes dans  $]0.3; 0.6[$  n'est pas un ouvert.

**Exercice 1.6.1.** Décrire une base de la topologie produit sur l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (voir Exemple 1.6.3).

Voici maintenant quelques propriétés des espaces produits.

**Proposition 1.6.2.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  une application. L'application  $f$  est continue (on munit le produit de la topologie produit) si, et seulement si, les applications  $p_\alpha \circ f$  sont continues.

e. Encore appelée topologie faible ou topologie de Tychonoff

*Démonstration.* C'est une propriété des topologies initiales relatives à une famille d'applications.  $\square$

Si un produit d'ouverts n'est pas toujours ouvert, la proposition suivante montre que la situation est meilleure pour un produit de fermés.

**Proposition 1.6.3.** *Soit  $F_\alpha$  un fermé de  $X_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in A$ . L'ensemble  $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$  est fermé dans  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .*

*Démonstration.* Il suffit de noter qu'on a

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus F_\alpha),$$

ce qui montre que le complémentaire de l'ensemble considéré est un ouvert, puisque les applications  $p_\alpha$  sont continues.  $\square$

Rappelons qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques est *ouverte* si l'image par  $f$  de tout ouvert est un ouvert. Elle est *fermée* si l'image de tout fermé de  $X$  est un fermé de  $Y$ . Nous avons alors le résultat suivant.

**Proposition 1.6.4.** *Pour tout  $\alpha_0 \in A$ , la projection  $p_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_{\alpha_0}$  est ouverte.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que l'image par  $p_{\alpha_0}$  de tout ouvert d'une base de topologie est un ouvert. On calcule alors

$$p_{\alpha_0}(\pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n})), \quad (\omega_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}),$$

et on constate qu'il est ouvert.  $\square$

Il est assez fréquent de représenter le produit cartésien  $\mathbb{R}^2$  par un plan, en y traçant des axes. Chaque axe est alors identifié à la droite réelle. On identifie simplement le réel  $x$  au couple  $(x, 0)$  ou au couple  $(0, x)$ . Cette identification est encore valable en topologie, au fait près qu'il n'y a pas de point privilégié dans un espace topologique en général, et qu'il faut donc en fixer un. Ceci motive la proposition suivante.

**Proposition 1.6.5.** *Pour tout  $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ , fixons  $x_\alpha \in X_\alpha$  et définissons*

$$i : X_{\alpha_0} \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : y \mapsto (y_\alpha)_{\alpha \in A}, \quad \text{où } y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ y & \text{si } \alpha = \alpha_0. \end{cases}$$

*L'application  $i$  est un homéomorphisme entre  $(X_{\alpha_0}, \mathcal{T}_{\alpha_0})$  et  $i(X_{\alpha_0})$ , muni de la topologie induite par le produit.*

*Démonstration.* L'application  $i$  est évidemment surjective sur  $i(X_{\alpha_0})$ . Elle est également injective, puisque si  $i(x) = i(y)$  (pour  $x, y \in X_{\alpha_0}$ ), on a  $p_{\alpha_0}(i(x)) = p_{\alpha_0}(i(y))$ , donc  $x = y$ . Ceci nous donne également l'inverse de la bijection  $i$ , qui est  $p_{\alpha_0}|_{i(X_{\alpha_0})}$ , et est donc continue, vu la proposition 1.5.3.

Montrons maintenant que  $i$  est continue. Par la proposition 1.5.4, il suffit de montrer que  $i : X_{\alpha_0} \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  est continue. Par définition, la topologie produit est en outre engendrée par la partie  $\mathcal{A} = \{p_\alpha^{-1}(\omega_\alpha) : \alpha \in A, \omega_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$ . Par la proposition 1.3.2, il suffit de montrer que pour tout  $\Omega \in \mathcal{A}$ , on a  $i^{-1}(\Omega) \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ , ce qui se fait sans problème.  $\square$

Terminons cette section par une application directe des résultats précédents.

**Proposition 1.6.6.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Nous considérons  $\mathbb{R}$  muni de la topologie euclidienne. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues alors  $fg$ ,  $f + g$  et  $cf$  sont continues, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . Si  $g$  ne s'annule pas sur  $X$ , alors  $f/g$  est continue sur  $X$ .*

*Démonstration.* Pour  $cf$ , c'est la composition de  $f$  avec la multiplication par  $c$ , qui est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour la somme et le produit, il suffit de considérer la fonction  $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Elle est continue par hypothèse et par la proposition 1.6.2. On la compose alors avec le produit ou la somme, définis et continus sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pour le quotient, on fait de même en notant que  $(f, g)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ , où l'opération binaire quotient est définie et continue.  $\square$

Cette proposition s'étend pour des fonctions à valeurs dans un espace topologique muni d'une opération binaire continue.

### 1.6.1 Exercices

- Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  des espaces topologiques et  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ . Démontrer les relations suivantes.
  - $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ ;
  - $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ ;
  - $(A \times B)^\bullet = A^\bullet \times \overline{B} \cup \overline{A} \times B^\bullet$ .
- Démontrer que le premier point de l'exercice précédent se généralise à un produit infini. Calculer l'intérieur de  $]1/3, 2/3[^\mathbb{N}$  dans  $[0, 1]^\mathbb{N}$  et en déduire que le deuxième point de l'exercice précédent est faux en général.
- Soient  $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{T}_2)$ ,  $(Y_1, \mathcal{T}'_1)$  et  $(Y_2, \mathcal{T}'_2)$  des espaces topologiques et  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  des applications. On définit

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Démontrer que si  $f_1$  et  $f_2$  sont continues, alors  $f_1 \times f_2$  l'est aussi (en considérant les topologies produits). Démontrer que si  $f_1$  et  $f_2$  sont ouvertes, alors  $f_1 \times f_2$  l'est aussi.

- Soient  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  et  $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}'_\alpha) : \alpha \in A\}$  deux familles d'espaces topologiques. Si pour tout  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  est une application continue, alors l'application

$$f : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in A}$$

est une application continue.

- Démontrer que le produit fini d'espaces topologiques est commutatif et associatif, à homéomorphisme près : si  $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$  sont des espaces topologiques, alors  $X_i \times X_j$  est homéomorphe à  $X_j \times X_i$  pour tout  $i, j \leq n$  et on a pour tout  $p \in \{2, \dots, n-1\}$

$$(X_1 \times \dots \times X_p) \times (X_{p+1} \times \dots \times X_n) \cong X_1 \times \dots \times X_n,$$

si  $\cong$  indique que les espaces sont homéomorphes.

- Démontrer que l'ensemble  $C_0(\mathbb{R})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ , muni de la topologie produit.
- Soit  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  une famille d'espaces topologiques. Pour tout  $\alpha \in A$ , fixons  $C_\alpha \subset X_\alpha$ . Démontrer qu'on a  $\prod_{\alpha \in A} \overline{C_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in A} C_\alpha}$ .

8. Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique, la diagonale de  $X$  est l'ensemble  $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ . On munit cet ensemble de la topologie induite par le produit  $X \times X$ . Démontrer que  $X$  et  $\Delta_X$  sont homéomorphes.
9. Applications ouvertes et fermées.
- (a) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$$

est ouverte et continue mais pas fermée.

- (b) Montrer que la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ , vue comme application de  $\mathbb{R}$ , muni de la topologie euclidienne dans  $\{0, 1\}$ , muni de la topologie discrète, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.

## 1.7 Espaces quotients

Rappelons qu'une relation d'équivalence sur un ensemble  $X$  est une relation réflexive, symétrique et transitive. Si  $\mathcal{R}$  est une telle relation sur  $X$ , l'espace *quotient* de  $X$  par  $\mathcal{R}$ , noté  $X/\mathcal{R}$ , est l'ensemble des classes d'équivalence. Pour tout  $x \in X$ , on note alors  $[x]$  la classe d'équivalence de  $x$ . On utilise la même notation pour cette classe vue comme un point du quotient  $X/\mathcal{R}$  ou comme un sous-ensemble de  $X$ .

Si  $X$  est muni d'une topologie  $\mathcal{T}$ , on peut définir naturellement une topologie sur le quotient  $X/\mathcal{R}$ .

**Définition 1.7.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On appelle *projection canonique*, ou *application quotient* et on note  $\pi$  l'application

$$\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R} : x \mapsto [x].$$

La *topologie quotient* sur  $X/\mathcal{R}$  est alors la topologie finale relative à  $\pi$ .

On déduit de la définition précédente que les ouverts de la topologie quotient sont les ensembles dont l'image inverse par  $\pi$  sont ouverts dans  $X$ .

Il est important de pouvoir définir des applications continues sur un espace quotient  $X/\mathcal{R}$ . Elles peuvent toutes être définies comme induites par des applications continues sur l'espace  $X$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.7.1.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $f$  est constante sur les classes d'équivalence (i.e.  $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$ ), alors il existe une unique application  $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  telle que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ <sup>f</sup>. Réciproquement, toute application  $g : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  est obtenue de cette façon, de manière unique.

L'application  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est alors continue si, et seulement si,  $\tilde{f} : (X/\mathcal{R}, \pi(\mathcal{T})) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ .

*Démonstration.* La première partie de la preuve est directe : l'unicité de  $\tilde{f}$  découle de l'énoncé : on doit poser  $\tilde{f}([x]) = f(x)$ . La condition sur  $f$  garantit que cette définition est licite, et on obtient donc l'existence de  $\tilde{f}$ . Réciproquement, si  $g$  est une application définie sur  $X/\mathcal{R}$ , alors la relation  $f = g \circ \pi$  définit une seule application  $f$  sur  $X$ , visiblement constante sur les classes, et telle que  $\tilde{f} = g$ .

L'assertion concernant la continuité de  $f$  et  $\tilde{f}$  est la conséquence de la définition de la topologie quotient comme une topologie finale.  $\square$

f. On dit que  $f$  se factorise à travers  $\pi$ , ou que  $f$  induit  $\tilde{f}$ .

**Exercice 1.7.1.** Démontrer la proposition précédente “à la main”, c’est-à-dire sans recourir au résultat sur les topologies finales.

On peut garder en mémoire le diagramme suivant, pour la factorisation d’une application à travers le quotient.

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \pi \downarrow & \searrow f & \\
 X/\mathcal{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y
 \end{array}$$

Avant de passer à des exemples d’utilisation de ce théorème de factorisation, nous avons le résultat suivant, qui précise à quelles conditions sur les classes d’équivalences, vues comme sous-ensembles de  $X$ , la projection canonique est une application ouverte. Cette propriété est notamment importante pour démontrer que certains espaces quotients sont séparés (voir le chapitre sur les axiomes de séparation), pour des applications en géométrie différentielle, ou pour utiliser le diagramme précédent dans des contextes plus généraux.

**Proposition 1.7.2.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d’équivalence. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (1) L’application quotient  $\pi$  est ouverte ;
- (2) On a  $\pi(\mathcal{T}) = \{\pi(\Omega) : \Omega \in \mathcal{T}\}$  ;
- (3) Pour tout  $\Omega \in \mathcal{T}$ ,  $\pi^{-1}(\pi(\Omega))$  est ouvert ;
- (4) Pour tout fermé  $F$  de  $X$ , l’ensemble  $\{x : [x] \subset F\}$  est fermé.

*Démonstration.* Le premier point est équivalent au deuxième. En effet, l’inclusion  $\pi(\mathcal{T}) \subset \{\pi(\Omega) : \Omega \in \mathcal{T}\}$  est toujours vraie, puisque pour tout ouvert  $\omega$  de  $X/\mathcal{R}$ , on a  $\omega = \pi(\pi^{-1}(\omega))$ . L’application  $\pi$  est ouverte si, et seulement si, l’autre inclusion est satisfaite.

Le premier point est équivalent au troisième par définition de la topologie quotient et d’une application ouverte.

Le troisième point est équivalent au quatrième par passage au complémentaire : si (3) est vrai et si  $F$  est un fermé de  $X$ , on a

$$\{x : [x] \subset F\} = \{x : [x] \cap X \setminus F = \emptyset\} = X \setminus \pi^{-1}(\pi(X \setminus F)).$$

Cet ensemble est donc fermé. Si (4) est vrai et si  $\Omega$  est ouvert, alors

$$\pi^{-1}(\pi(\Omega)) = \{x : [x] \cap \Omega \neq \emptyset\} = X \setminus \{x : [x] \subset X \setminus \Omega\},$$

et cet ensemble est ouvert. □

Il est important de voir l’interprétation de  $\pi^{-1}(\pi(\Omega))$  : c’est l’ensemble des points équivalents aux points de  $\Omega$ . De même  $\{x : [x] \subset F\}$  est l’ensemble des points qui ne sont équivalents qu’à des points de  $F$ .

A titre d’exemple, nous allons maintenant considérer deux modèles de l’espace projectif et démontrer qu’ils sont homéomorphes, en utilisant les théorèmes précédents. Nous montrerons également que dans chaque cas, l’application quotient est ouverte. Commençons par une définition formelle.

**Définition 1.7.2.** On note  $\mathbb{R}_*^{n+1}$  l'ensemble  $\mathbb{R}^{n+1}$  privé de l'origine. On munit cet espace de la topologie induite par la topologie euclidienne. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  est le quotient de  $\mathbb{R}_*^{n+1}$  par la relation d'équivalence définie par  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$ . Il est muni de la topologie quotient.

Les classes d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$  sont donc les droites passant par l'origine, mais privées de celle-ci. En ce qui concerne l'application  $\pi$ , nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.7.3.** *L'application quotient définissant  $\mathbb{R}P^n$  est ouverte.*

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}_*^{n+1}$ . On a

$$\pi^{-1}(\pi(\Omega)) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}_0, x \in \Omega\} = \bigcup_{\lambda \neq 0} \{\lambda x : x \in \Omega\} = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda \Omega$$

Puisque la multiplication par un nombre non nul est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans lui-même, sa restriction à  $\mathbb{R}_*^{n+1}$  l'est aussi et chaque ensemble  $\lambda \Omega$  est ouvert, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Pour définir un deuxième modèle de l'espace projectif, on remarque qu'il suffit d'un "vecteur normé" pour définir une direction et donc une droite privé de l'origine. Bien sûr, deux vecteurs normés opposés définissent la même droite. Nous formalisons cette nouvelle approche comme suit.

**Définition 1.7.3.** On note  $S^n$  la sphère unitaire  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ , munie de la topologie induite. On note  $\mathcal{R}'$  la relation d'équivalence définie sur  $S^n$  par  $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x = y$  ou  $x = -y$ . On note  $\pi'$  la projection canonique.

Nous avons alors le résultat suivant qui montre que les deux modèles sont topologiquement équivalents.

**Proposition 1.7.4.** *La projection canonique  $\pi'$  est ouverte. Les espaces quotients  $\mathbb{R}_*^{n+1}/\mathcal{R}$  et  $S^n/\mathcal{R}'$  sont homéomorphes.*

*Démonstration.* Pour la première assertion, considérons un fermé  $F$  de la sphère. On a alors

$$\{x : [x] \subset F\} = \{x : \{x, -x\} \subset F\} = F \cap -F$$

C'est donc un fermé, puisque l'application *antipodale* qui à tout  $x$  de  $S^n$  associe  $-x$  est un homéomorphisme (c'est la restriction à  $S^n$  d'un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans lui-même).

Pour la deuxième assertion, on note (comme annoncé plus haut) que toute droite contenant l'origine perce la sphère en deux points diamétralement opposés, et réciproquement, toute paire de points diamétralement opposés définit une seule droite. Nous allons montrer que les applications ainsi définies sont continues et inverses l'une de l'autre.

Pour la deuxième application, on considère le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}_*^{n+1} \\ \pi' \downarrow & \searrow \pi \circ i & \downarrow \pi \\ S^n/\mathcal{R}' & \xrightarrow{i'} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$



L'application  $i$  consiste à considérer un point de la sphère comme un point de  $\mathbb{R}_*^{n+1}$ , puis  $\pi \circ i$  associe à chaque point de la sphère la droite qu'il détermine. Cette application est continue et passe visiblement au quotient en  $i'$  qui est continue.

Pour la première application, on cherche à associer un point de la sphère unitaire à tout  $x \in \mathbb{R}_*^{n+1}$ . Il suffit pour cela de le normer. On considère alors le diagramme suivant, où  $f$  est définie par

$$f : \mathbb{R}_*^{n+1} \rightarrow S^n : x \mapsto \frac{x}{|x|}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^{n+1} & \xrightarrow{f} & S^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^n/\mathcal{R}' \end{array}$$

Il est clair que  $f$  et  $\pi'$  sont continus. L'application  $\pi' \circ f$  se factorise visiblement en  $\tilde{f} \circ \pi$ , ce qui montre que  $\tilde{f}$  est continue. On vérifie alors que  $\tilde{f}$  et  $i'$  sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

### 1.7.1 Exercices

- Démontrer qu'il existe une bijection continue du quotient du disque  $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$  par la relation d'équivalence  $x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow x = x' \text{ ou } |x| = |x'| = 1$  dans la sphère  $S^2$ .

Suggestion : voici deux possibilités : considérer l'application du disque dans le plan équatorial de la sphère uni à l'infini  $\infty$ , définie par

$$f : B^2 \rightarrow \pi \cup \{\infty\} : x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{x}{1-|x|} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } |x| < 1 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

puis considérer la projection stéréographique inverse, et appliquer  $\infty$  sur le pôle de la projection. Montrer que cette application est continue et passe au quotient.

Ou appliquer chaque rayon du disque, identifié à un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  comme l'intersection de la boule de rayon 1 et du plan d'équation  $x_3 = 0$ , sur le méridien correspondant de la sphère. Cela donne l'application

$$f : B^2 \rightarrow S^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Démontrer que cette application est continue et bijective et passe au quotient.

- Démontrer que le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

est homéomorphe à  $[0, +\infty[$ , muni de la topologie induite par la topologie euclidienne de  $\mathbb{R}$ .

## 1.8 Groupes topologiques et leurs actions

Il est facile de définir la notion de groupe topologique. En effet, on suppose disposer d'un groupe, qui est muni d'une topologie, et il est alors naturel d'imposer des conditions de compatibilité entre la structure de groupe et la structure donnée par la topologie.

**Définition 1.8.1.** Un groupe topologique est un couple  $(G, \mathcal{T})$  où  $G$  est un groupe et  $\mathcal{T}$  une topologie, tels que la multiplication

$$m : G \times G \rightarrow G^g : (x, y) \mapsto xy$$

et l'inversion

$$\iota : G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$$

sont des applications continues.

Citons quelques exemples simples :

1. tout espace vectoriel euclidien de dimension finie est un groupe topologique (pour l'addition) ;
2. tout groupe est un groupe topologique pour la topologie discrète ;
3. l'ensemble des matrices inversibles complexes, noté  $GL(n, \mathbb{C})$ , muni de la topologie induite par la topologie euclidienne de  $\mathbb{C}_n^{n \times h}$ , en effet, le produit des matrices est une application continue à valeurs dans  $\mathbb{C}_n^n$ , puisque chaque composante du résultat est un polynôme en les composantes des facteurs. Le passage à l'inverse est continu également, puisque chaque composante est une fraction rationnelle et on se place sur l'ensemble des points où le dénominateur ne s'annule pas.

Nous pouvons obtenir d'autres exemples en utilisant la proposition suivante.

**Proposition 1.8.1.** Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $H$  est un groupe topologique pour la topologie induite.

*Démonstration.* Pour montrer que la multiplication dans  $H$  est continue, on peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{m_G} & G \\
 \uparrow i \times i & \nearrow & \uparrow i \\
 H \times H & \xrightarrow{m_H} & H
 \end{array}$$

L'application  $m_G \circ (i \times i)$  est continue, et est à valeurs dans  $H$ , donc  $m_H$  est continue. On fait de même pour l'inversion dans  $H$ . □

Citons quelques sous-groupes bien connus de  $GL(n, \mathbb{C})$ , qui deviennent des groupes topologiques pour la topologie induite.

1. Le groupe  $GL(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap \mathbb{R}_n^{n \times i}$  ;

- g. L'ensemble  $G \times G$  est muni de la topologie produit.
- h. Le produit scalaire de  $A$  et  $B$  est donné par  $\text{tr}(AB^*)$ , qui définit une norme, et ensuite la distance de  $A$  à  $B$  par  $\|A - B\|$ .
- i. Il est utile de démontrer que la topologie induite est la topologie euclidienne des matrices réelles.

2. Le groupe  $SL(n, \mathbb{C})$  des matrices de déterminant 1 et son analogue  $SL(n, \mathbb{R})$ ;
3. Le groupe  $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^T = A^{-1}\}$  des matrices orthogonales, et ses sous-groupes  $SO(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n, \mathbb{R})$  et  $SO(n, \mathbb{R})$ ;
4. Le groupe  $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* = A^{-1}\}$  des matrices unitaires et son sous-groupe  $SU(n)$ ;
5. Le groupe symplectique  $SP(n, \mathbb{R})$ , quand  $n$  est pair :  $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \omega(Ax, Ay) = \omega(x, y)\}$ , où  $\omega$  est une forme symplectique sur  $\mathbb{C}^{2j}$ .

Il existe encore deux autres moyens bien connus pour construire de nouveaux groupes à partir d'anciens, à savoir le produit cartésien et le quotient par un sous-groupe normal. En ce qui concerne les produits, nous avons le résultat suivant, dont la démonstration est laissée comme exercice.

**Proposition 1.8.2.** *Si  $(G_1, \mathcal{T}_1)$ ,  $(G_2, \mathcal{T}_2)$  sont deux groupes topologiques, alors  $(G_1 \times G_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$  est un groupe topologique, appelé groupe topologique produit.*<sup>k</sup>

En ce qui concerne les quotients, le résultat est également affirmatif, mais la preuve est un peu plus délicate, comme nous allons le voir.

**Proposition 1.8.3.** *Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe normal dans  $G$ . La projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/H$  est ouverte. De plus,  $(G/H, \pi(\mathcal{T}))$  est un groupe topologique.*

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  un ouvert de  $G$ . On a

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(\Omega)) &= \{x \in G : \exists y \in \Omega : \pi(x) = \pi(y)\} = \{x \in G : \exists y \in \Omega : x \mathcal{R} y\} \\ &= \{yh : y \in \Omega, h \in H\} = \bigcup_{h \in H} \Omega h. \end{aligned}$$

Cet ensemble est ouvert car la multiplication par  $h$  est un homéomorphisme, donc  $\pi(\Omega)$  est ouvert.

On montre que le passage à l'inverse dans  $G/H$  est continu en considérant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\iota_G} & G \\ \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\iota_{G/H}} & G/H \end{array}$$

En ce qui concerne la multiplication dans  $G/H$ , on est tenté de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m_G} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{m_{G/H}} & G/H \end{array}$$

j. Une forme symplectique est une forme bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée.

k. Ce résultat s'étend aux produits infinis. Si  $((G_\alpha, \mathcal{T}_\alpha), \alpha \in A)$  est une famille de groupes topologiques, le groupe ainsi obtenu est le produit direct complet des groupes  $(G_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ .

Le problème est que l'application  $\pi \times \pi$  n'est pas la projection canonique sur un quotient. On peut démontrer qu'elle est ouverte. En effet, l'image par  $\pi \times \pi$  d'un ouvert de base  $\omega_1 \times \omega_2$  de  $G \times G$  est  $\pi(\omega_1) \times \pi(\omega_2)$ , qui est ouvert dans  $G/H \times G/H$ .

Soit alors  $\omega$  un ouvert de  $G/H$ . Puisque  $\pi \circ m_G$  est continue, alors

$$\Omega = (\pi \circ m_G)^{-1}(\omega) = \{(x, y) \in G \times G : [xy] \in \omega\}$$

est un ouvert de  $G \times G$ . Puisque  $\pi \times \pi$  est ouverte,  $\pi \times \pi(\Omega)$  est ouvert dans  $G/H \times G/H$ . On peut le caractériser

$$\pi \times \pi(\Omega) = \{([x], [y]) : (x, y) \in \Omega\} = \{([x], [y]) : [xy] \in \omega\} = m_{G/H}^{-1}(\omega),$$

ce qui termine la preuve. □

*Remarque 1.5.* Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le fait que  $\pi \times \pi$  est ouverte pour obtenir que  $m_H$  est continue. En fait, on peut montrer, toujours parce que  $\pi \times \pi$  est ouverte, que  $G/H \times G/H$  s'identifie à un quotient de  $G \times G$ , par la relation

$$(x, y)\mathcal{R}'(x', y') \Leftrightarrow x\mathcal{R}x' \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}y' \Leftrightarrow \pi \times \pi(x, y) = \pi \times \pi(x', y'),$$

où  $\mathcal{R}$  est la relation qui définit le quotient  $G/H$ . On peut alors utiliser les propriétés des quotients.

En toute généralité, nous avons les résultats suivants, dont les preuves sont laissées comme exercice.

*Proposition 1.8.4.* Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est continue, surjective et ouverte, alors  $Y$  est homéomorphe au quotient de  $X$  par la relation d'équivalence  $x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ .

et par suite

*Proposition 1.8.5.* Soit  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  une application continue surjective et ouverte. Soit  $g : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  une application. Il existe une unique application  $\tilde{g} : Y \rightarrow Z$  telle que  $g = \tilde{g} \circ f$  ( $g$  se factorise à travers  $f$ ) si, et seulement si,  $f(x) = f(x')$  implique  $g(x) = g(x')$  ( $x, x' \in X$ ). Si tel est le cas, alors  $g$  est continue si, et seulement si,  $\tilde{g}$  l'est.

C'est cette dernière proposition que nous avons utilisée dans la preuve de la proposition 1.8.3.

Passons maintenant aux actions de groupes topologiques. Rappelons la définition des actions de groupe et leurs propriétés élémentaires.

**Définition 1.8.2.** Soit  $X$  un ensemble. On note  $\mathcal{B}(X)$  l'ensemble des bijections de  $X$  dans lui-même. C'est un groupe pour la composée des applications. Si  $G$  est un groupe, une action de  $G$  sur  $X$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathcal{B}(X)$ .

Cette définition du concept d'action est élégante, mais n'est pas aisée à manipuler ; on peut donner une définition équivalente. C'est l'objet de la proposition suivante, dont la preuve est directe.

**Proposition 1.8.6.** Une action du groupe  $G$  sur l'ensemble  $X$  est la donnée d'une application  $j : G \times X \rightarrow X$  satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} j(g', j(g, x)) = j(g'g, x) \\ j(e, x) = x \end{cases}, \quad g, g' \in G, x \in X.$$

Nous utiliserons indifféremment les deux définitions équivalentes du concept d'action. Voici quelques exemples concrets.

**Exemple 1.8.1.**

1. Le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  agit sur  $\mathbb{C}^n$  ou sur  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par

$$j : GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (A, x) \mapsto Ax.$$

Tout sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{C})$  agit sur  $\mathbb{C}^n$  via la même action. De la même façon,  $GL(n, \mathbb{R})$  et ses sous-groupes agissent sur  $\mathbb{R}^n$ .

En particulier, les groupes  $O(2, \mathbb{R})$  et  $SO(2, \mathbb{R})$  agissent sur  $\mathbb{R}^2$  et les groupes  $O(3, \mathbb{R})$  et  $SO(3, \mathbb{R})$  agissent sur  $\mathbb{R}^3$  ;

2. Le groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_0$  agit sur  $\mathbb{R}_*^{n+1}$  par  $j(\lambda, x) = \lambda x$  ;
3. Le groupe multiplicatif  $\{-1, 1\}$  agit sur  $S^n$  par la même application ;
4. Le groupe additif  $(\mathbb{R}, +, 0)$  agit sur  $\mathbb{R}^2$  par  $j(\lambda, (x, y)) = (x + \lambda, y)$  ;
5. Le groupe additif  $(\mathbb{R}, +, 0)$  agit sur  $\mathbb{R}^2$  par  $j(\lambda, (x, y)) = (x, y + \lambda)$ .
6. Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine modelé sur un espace vectoriel  $E$ . Alors  $E$  agit sur  $\mathcal{A}$ , par  $j(u, A) = A + u$ .

Voici un exemple moins concret, mais tout à fait générique.

**Exemple 1.8.2.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $H$  agit sur  $G$  par  $L : H \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto hg$  et par  $R : H \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto gh^{-1}$ .

Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  permet de définir une relation d'équivalence naturelle sur  $X$ .

**Définition 1.8.3.** Si un groupe  $G$  agit sur un ensemble  $X$  par  $j$ , on définit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  par  $x\mathcal{R}y$  si, et seulement si, il existe  $g \in G$  tel que  $j(g, x) = y$ . Les classes de cette relation sont les orbites de l'action. Elles partitionnent donc  $X$ . L'espace quotient correspondant, noté  $X/_jG$ , est l'espace des orbites.

On note  $\mathcal{O}_x$  l'orbite d'un point  $x \in X$ . A titre d'exercice, on peut déterminer les orbites pour les exemples donnés plus haut. Pour l'action de  $GL(n, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , il n'y a qu'une orbite ; on dit que l'action est *transitive*. Pour l'action de  $O(n, \mathbb{R})$  et  $SO(n, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$ , les orbites sont des sphères centrées à l'origine et l'espace des orbites s'identifie à  $[0, +\infty[$ . Les exemples 2 et 3 donnent lieu à l'espace projectif comme espace des orbites. Dans les exemples 4 et 5, les orbites sont des droites parallèles aux axes et l'espace des orbites s'identifie à  $\mathbb{R}$ , tandis que par définition dans un espace affine, l'action est transitive. Enfin, en ce qui concerne l'action d'un sous-groupe, on obtient les classes latérales à gauche et à droite, respectivement.

Terminons par un dernier exemple, qui nous sera utile d'ici peu.

**Exemple 1.8.3.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe. Les actions à gauche et à droite de  $H$  sur  $G$  donnent lieu aux espaces quotients  $G/_LH$  et  $G/_RH$ . Le groupe  $G$  agit transitivement à gauche sur  $G/_RH$  par

$$L' : G \times G/_RH \rightarrow G/_RH : (g, [g']) \mapsto [gg']$$

et à droite sur  $G/_LH$  par

$$R' : G \times G/_LH \rightarrow G/_LH : (g, [g']) \mapsto [g'g^{-1}].$$

Enfin, puisqu'une orbite s'écrit  $\mathcal{O}_x = \{j(g, x) : g \in G\}$ , il est naturel de vouloir paramétrer l'élément  $j(g, x)$  par l'élément  $g$  de  $G$ . On définit alors naturellement l'application

$$j_x : G \rightarrow \mathcal{O}_x : g \mapsto j(g, x). \quad (1.4)$$

Cette application est visiblement surjective, mais n'a aucune raison d'être injective. On identifie alors les éléments  $g, g'$  de  $G$  tels que  $j_x(g) = j_x(g')$ , i.e.,  $j(g^{-1}g', x) = x$ . Ceci motive l'introduction du stabilisateur de  $x$ .

**Définition 1.8.4.** Soient  $X$  un ensemble et  $G$  un groupe qui agit sur  $X$  par  $j$ . On appelle stabilisateur de  $x \in X$  le sous-ensemble

$$G_x = \{g \in G : j(g, x) = x\}.$$

On a alors le résultat suivant sur la structure de ce sous-ensemble.

**Proposition 1.8.7.** Pour tout  $x \in X$ , le stabilisateur de  $x$  est un sous-groupe de  $G$ . De plus, si  $y = j(g)x$ , alors on a  $G_y = gG_xg^{-1}$ .

*Démonstration.* Toutes les vérifications sont directes.  $\square$

Les considérations ci-dessus amènent au résultat suivant.

**Proposition 1.8.8.** Pour tout  $x \in X$ , l'application  $j_x$  de  $G$  dans  $\mathcal{O}_x$  se factorise à travers  $G/RG_x$  en une bijection  $\tilde{j}_x$ . De plus, cette bijection échange l'action à gauche de  $G$  sur  $G/RG_x$  et l'action  $j$  de  $G$  sur  $\mathcal{O}_x$ .

La première assertion indique que l'on peut identifier  $G/RG_x$  et  $\mathcal{O}_x$  en tant qu'ensembles. La deuxième stipule qu'on peut aussi identifier les actions de  $G$  sur ces ensembles, faisant ainsi de  $\tilde{j}_x$  un *transport de structure*.

*Démonstration.* L'application  $j_x$  passe au quotient : elle est constante sur les classes par construction de  $G_x$ . En détail : si  $g_1, g_2 \in gG_x$ , alors il existe  $h_1, h_2 \in gG_x$  tels que  $g_1 = gh_1$  et  $g_2 = gh_2$ . Alors on a

$$j_x(g_1) = j(g_1, x) = j(gh_1, x) = j(g, x)$$

et de même pour  $j_x(g_2)$ .

L'application  $j_x$  était surjective, donc  $\tilde{j}_x$  l'est aussi. Cette dernière est injective, car si  $\tilde{j}_x(g_1G_x) = \tilde{j}_x(g_2G_x)$ , on a  $j(g_1, x) = j(g_2, x)$  et donc  $g_1^{-1}g_2 \in G_x$  et  $g_1G_x = g_2G_x$ .

Pour la deuxième assertion, il suffit de calculer, pour  $g, g' \in G$  et  $x \in X$  :

$$\tilde{j}_x(g(g'G_x)) = j_x(gg') = j(gg', x) = j(g, j(g', x)) = j(g, \tilde{j}_x(g'G_x)),$$

et on constate qu'appliquer  $\tilde{j}_x$  après l'action à gauche par  $g$  revient à agir par  $g$  sur l'image par  $\tilde{j}_x$ .  $\square$

Ceci permet d'identifier chaque orbite à un quotient. C'est en particulier intéressant quand l'action est transitive, puisqu'alors  $X$  s'identifie à un quotient de  $G$ .

**Exemple 1.8.4.** Le groupe  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  agit sur  $\mathbb{R}^n$  par multiplication matricielle. Il y a deux orbites :  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Considérons  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Le stabilisateur de  $e_1$  est l'ensemble des matrices inversibles telles que  $Ae_1 = e_1$ . On a donc

$$G_{e_1} = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}^{n-1*}, A' \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})\},$$

avec les précautions d'usage si  $n = 1$ . L'application  $\tilde{j}_{e_1}$  applique la classe d'une matrice  $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  sur  $Ae_1$ , et consiste donc à sélectionner la première colonne de la matrice, qui est visiblement un élément non nul de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.8.5.** Le groupe  $GL(n+1, \mathbb{R})$  agit transitivement sur  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Cette action transforme des éléments multiples l'un de l'autre en éléments multiples l'un de l'autre. Elle permet donc de définir une action de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  sur l'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$ . Explicitement, on a

$$j(A, [x]) = [Ax].$$

Cette action est également transitive. Avec les notations de l'exemple précédent, on calcule

$$\begin{aligned} G_{[e_1]} &= \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : j(A, [e_1]) = [Ae_1] = [e_1]\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & A' \end{pmatrix}, a \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^{n-1*}, A' \in GL(n-1, \mathbb{R})\} \end{aligned}$$

Ici, l'application  $\tilde{j}_x$  associe à une matrice quelconque  $A$  la classe (projective) de sa première colonne.

**Exemple 1.8.6.** Le groupe  $PGL(n, \mathbb{R})$  est le quotient du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  par son sous-groupe normal formé par les multiples (non nuls) de l'identité. L'exemple précédent peut être adapté pour montrer que l'espace projectif est un quotient de  $PGL(n, \mathbb{R})$ .

Introduisons maintenant un peu de topologie. Si  $G$  est un groupe topologique et  $X$  un ensemble sur lequel  $G$  agit, on peut munir chaque orbite d'une topologie. Il suffit pour cela de choisir un point  $x$  dans l'orbite et d'utiliser  $\tilde{j}_x$  comme un transport de structure.

**Définition 1.8.5.** Soit  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique agissant sur un ensemble  $X$  par  $j$ . On munit l'orbite de  $X$  de la topologie qui fait de  $\tilde{j}_x$  un homéomorphisme.

La topologie ainsi construite est donc  $\{\tilde{j}_x(\Omega) : \Omega \text{ ouvert de } G/{}_R G_x\}$ . On peut également en déduire une topologie sur  $X$ , en définissant les ouverts sur  $X$  comme les ensembles dont la trace dans toute orbite est un ouvert. Pour le point 4 de l'exemple 1.8.1, les orbites sont les droites  $\mathcal{O}_x = \{(x, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Le stabilisateur de  $(x, 0)$  est réduit au neutre et donc  $\tilde{j}_x$  définit un homéomorphisme entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{O}_x$ . Les ouverts de  $\mathbb{R}^2$  sont alors les ensembles dont l'intersection avec les droites parallèles au premier axe sont des ouverts de ces droites. Cette topologie est plus fine que la topologie euclidienne.

Cependant une question reste en suspens. Une orbite peut être décrite par chacun de ses points. Les constructions précédentes dépendent du choix du point  $x$ . Mais la topologie qui est induite sur l'orbite n'en dépend pas. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.8.9.** Soit  $G$  un groupe qui agit sur un ensemble  $X$  via l'action  $j$ . Si  $y = j(g, x)$ , alors la fonction

$$f : G \rightarrow G : h \mapsto hg^{-1}$$

rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G \\ \pi_x \downarrow & & \downarrow \pi_y \\ G/G_x & \xrightarrow{\tilde{j}_y^{-1} \circ \tilde{j}_x} & G/G_y \\ \tilde{j}_x \searrow & & \swarrow \tilde{j}_y \\ & \mathcal{O}_x & \end{array}$$

Si de plus  $(G, \mathcal{T})$  est un groupe topologique, l'application  $\tilde{j}_y^{-1} \circ \tilde{j}_x$  est un homéomorphisme. En particulier, les topologies induites par  $\tilde{j}_x$  et  $\tilde{j}_y$  sur  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$  coïncident.

*Démonstration.* Le triangle inférieur est commutatif par définition. Pour le carré supérieur, il faut montrer

$$\tilde{j}_x \circ \pi_x = \tilde{j}_y \circ \pi_y \circ f,$$

ou encore  $j_x = j_y \circ f$ . Mais on a

$$j_y \circ f(h) = j(hg^{-1}, y) = j(h, j(g^{-1}y)) = j(h, x) = j_x(h).$$

Si  $G$  est un groupe topologique,  $\pi_y \circ f$  est continue (car  $f$  l'est), et puisque le diagramme est commutatif, cette application passe au quotient en  $\tilde{j}_y^{-1} \circ \tilde{j}_x$ , qui est donc continue. En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on obtient que  $\tilde{j}_x^{-1} \circ \tilde{j}_y$  est également continue, ce qui prouve la deuxième assertion.

Enfin, les topologies définies à l'aide de  $\tilde{j}_x$  et  $\tilde{j}_y$  sont  $\{\tilde{j}_x(\omega_x) : \omega_x \in \pi_x(\mathcal{T})\}$ , et  $\{\tilde{j}_y(\omega_y) : \omega_y \in \pi_y(\mathcal{T})\}$ . On constate qu'elles coïncident si et seulement si  $\tilde{j}_x^{-1} \circ \tilde{j}_y$  est un homéomorphisme.  $\square$

Traisons maintenant le cas où  $(G, \mathcal{T})$  est un groupe topologique qui agit sur un espace topologique  $(X, \mathcal{T}')$ . Il est alors naturel de définir le concept d'action continue.

**Définition 1.8.6.** Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $(X, \mathcal{T}')$  un espace topologique. Le groupe  $G$  agit continûment sur  $X$  par  $j$  si

$$j : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto j(g, x).$$

est une application continue.

**Exemple 1.8.7.** Le groupe  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  agit continûment sur  $\mathbb{C}^n$  car la multiplication matricielle est continue en ses deux arguments.

Comme d'habitude, on essaie de générer des exemples à l'aide de quelques résultats, dont la démonstration est laissée comme exercice.

**Proposition 1.8.10.** Si  $(G, \mathcal{T})$  agit continûment sur  $(X, \mathcal{T}')$  par  $j$  et si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , muni de la topologie induite, alors  $H$  agit continûment sur  $X$  par (la restriction de)  $j$ .

En particulier, tous les sous-groupes de  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  que nous avons listés plus haut agissent continûment sur  $\mathbb{C}^n$  par multiplication matricielle. Certains d'entre eux appliquent le sous-espace  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même. On se demande alors légitimement si on ne peut pas oublier  $\mathbb{C}^n$  et ne considérer que  $\mathbb{R}^n$ . La réponse fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.8.11.** Si  $(G, \mathcal{T})$  agit continûment sur  $(X, \mathcal{T}')$  par  $j$  et si  $Y \subset X$  est tel que  $j$  applique  $G \times Y$  dans  $Y$ , alors  $G$  agit continûment sur  $Y$ .

Par exemple,  $O(n, \mathbb{R})$  agit continûment sur  $S^n$ , et  $GL(n, \mathbb{R})$  agit continûment sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Citons encore deux exemples importants.

**Exemple 1.8.8.** Si  $(G, \mathcal{T})$  est un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe topologique, alors  $H$  agit continûment à gauche et à droite sur  $G$  (on utilise la proposition 1.8.10). Si  $(G, \mathcal{T})$  est un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe, alors  $G$  agit continûment à gauche sur  $G/RH$  et à droite sur  $G/LH$ . Pour le voir, on utilise le diagramme commutatif suivant



$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{L} & G \\
 \text{id} \times \pi \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \pi \\
 G \times G/H & \xrightarrow{L_{G/H}} & G/H
 \end{array}$$

et le fait que  $\text{id} \times \pi$  est ouverte (voir propositions 1.8.4 et 1.8.5).

Dans le cas où  $X$  n'était pas muni d'une topologie, nous avons utilisé l'action de  $G$  pour munir chaque orbite d'une topologie, au moyen de l'application  $\tilde{j}_x$ . Si  $X$  est muni d'une topologie, chaque orbite peut être munie de la topologie induite. Il est alors naturel de se demander si  $\tilde{j}_x$  a un comportement raisonnable vis-à-vis de cette topologie. Nous avons alors le résultat suivant.

**Proposition 1.8.12.** *Si  $(G, \mathcal{T})$  agit continûment sur  $(X, \mathcal{T}')$  par  $j$ , alors*

1. pour tout  $g \in G$ , l'application  $j(g) : X \rightarrow X : x \mapsto j(g, x)$  est un homéomorphisme ;
2. la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/_j G$  est ouverte ;
3. pour tout  $x \in X$ , l'application  $\tilde{j}_x : G/_R G_x \rightarrow \mathcal{O}_x$  est continue.

*Démonstration.* L'application  $j(g)$  est continue car c'est la composée de l'application  $i : X \rightarrow G \times X : x \mapsto (g, x)$  avec la restriction de  $j$  à cet espace. Son inverse est  $j(g^{-1})$ . Si  $\omega$  est ouvert dans  $\mathcal{T}'$ , alors on a

$$\pi^{-1}(\pi(\omega)) = \{j(g, x) : g \in G, x \in \omega\} = \bigcup_{g \in G} j(g)(\omega),$$

et cet ensemble est donc ouvert. Enfin, on montre que  $\tilde{j}_x$  est continue en considérant le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 G & & \\
 \pi \downarrow & \searrow j_x & \\
 G/G_x & \xrightarrow{\tilde{j}_x} & \mathcal{O}_x
 \end{array}$$

où  $j_x$  est continue puisque  $j$  l'est. □

Terminons cette section par quelques exemples d'espaces obtenus par quotients définis par des actions de groupe.

**Exemple 1.8.9** (Le tore). L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de l'addition et de la topologie euclidienne est un groupe topologique abélien (commutatif). Le sous-ensemble  $\mathbb{Z}^n$  formé des points à composantes entières est un sous-groupe (normal) de  $\mathbb{R}^n$ . Si on regarde l'action, à droite ou à gauche de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ , deux points définissent la même orbite si, et seulement si, ils diffèrent par un point à composantes entières.

**Définition 1.8.7.** Le tore  $T^n$  est le quotient  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . C'est un groupe topologique.

Considérons maintenant une autre description possible du tore, un peu plus géométrique. L'idée est que toute classe d'équivalence définie plus haut a au moins un représentant dans l'ensemble  $[0, 1]^n$ , et que dans cet ensemble, seuls les points du "bord" sont susceptibles d'être en relation par la relation d'équivalence précédente. On est donc en présence de la méthode de fabrication d'un tore (pour  $n = 2$ ) qui consiste à recoller les bords opposés d'une feuille de papier carrée.

**Définition 1.8.8.** Sur l'espace topologique  $Y = [0, 1]^n$ , on définit la relation  $\mathcal{R}'$  par

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow y_i - x_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad \forall i \leq n.$$

On a alors la proposition suivante.

**Proposition 1.8.13.** Les espaces topologiques quotients  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  et  $[0, 1]^n/\mathcal{R}'$  sont homéomorphes.

*Démonstration.* Notons  $i$  l'inclusion de  $[0, 1]^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est une application continue, qui donne lieu au diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\ \pi' \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \pi \\ [0, 1]^n/\mathcal{R}' & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \end{array}$$

On constate en effet que  $\pi \circ i$  passe au quotient défini par  $\mathcal{R}'$ , puisque des points du cube unité qui sont équivalents pour  $\mathcal{R}'$  correspondent par inclusion à des points de  $\mathbb{R}^n$  qui diffèrent par des vecteurs à composantes entières.

Si on note  $\{x\}$  la partie fractionnaire de  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\{x\} = x - [x]$ , alors on peut définir

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^n : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \{x_1\} \\ \vdots \\ \{x_n\} \end{pmatrix}.$$

Cette application n'est pas continue (il suffit pour s'en convaincre de tracer la représentation graphique de  $f$  pour  $n = 1$ ). Cependant  $\pi' \circ f$  est continue et passe au quotient en une application continue, selon le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & [0, 1]^n \\ \pi \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \pi' \\ \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\widetilde{\pi' \circ f}} & [0, 1]^n/\mathcal{R}' \end{array}$$

On constate alors que les applications que nous avons définies sont inverses l'une de l'autre. □

On est également habitué, depuis les cours élémentaires de géométrie différentielle, à définir le tore  $T^2$  comme le produit de deux cercles. Cette définition est encore valable en topologie, quel que soit le tore considéré, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 1.8.14.** *Le tore  $T^n$  est homéomorphe au produit cartésien de  $n$  copies de  $S^1$ .*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que le cercle peut être décrit de plusieurs façons comme sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  :

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Nous définissons alors une application continue<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(S^1)^n$  par

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow S^1 \times \cdots \times S^1 : (t_1, \dots, t_n)^T \mapsto \left( \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1) \\ \sin(2\pi t_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_n) \\ \sin(2\pi t_n) \end{pmatrix} \right)^T$$

Cette application donne la même image à des points qui diffèrent par un vecteur à composantes entières, vu la périodicité de sin et cos. Elle définit donc une application continue  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  sur  $(S^1)^n$ .<sup>m</sup> Il suffit de montrer que  $\tilde{f}$  est ouverte pour montrer que  $\tilde{f}^{-1}$  est continue. On démontre alors que  $f$  est ouverte, et cela suffit car pour tout ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$ , on a  $\tilde{f}(\omega) = f(\pi^{-1}(\omega))$ .  $\square$

Remarquons que nous avons démontré en particulier que le cercle est homéomorphe au quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Cela implique en particulier que les fonctions continues sur le cercle correspondent exactement aux fonctions périodiques sur  $\mathbb{R}$ , de période  $2\pi$  (ou toute autre période fixée)

**Exemple 1.8.10** (Le ruban de Möbius). Pour définir le ruban de Möbius, on considère l'espace  $X = \mathbb{R} \times ]-a, a[$  muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}^2$ . On considère l'action de  $\mathbb{Z}$  définie par

$$j : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X : (m, (x, y)) \mapsto (x + m, (-1)^m y).$$

Le ruban de Möbius est alors le quotient  $X/j\mathbb{Z}$ . On vérifie que chaque classe admet au moins un représentant dans  $[0, 1] \times ]-a, a[$ . On peut donc définir aussi le ruban de Möbius comme le quotient de ce dernier espace par la relation qui identifie les bords "gauche" et "droit" en mettant en relation les points  $(0, y)$  et  $(1, 1 - y)$ .

**Exemple 1.8.11** (La bouteille de Klein). La bouteille de Klein est également définie comme un quotient de  $\mathbb{R}^2$  par l'action de  $\mathbb{Z}^2$  définie comme suit :

$$j : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : ((m, n), (x, y)) \mapsto (x + m, (-1)^m y + n).$$

C'est une action de groupe si la multiplication dans  $\mathbb{Z}^2$  est donnée par

$$(m, n) * (m', n') = (m + m', n + (-1)^m n').$$

Toute classe admet au moins un représentant dans  $[0, 1]^2$ . On peut donc comme plus haut identifier la bouteille de Klein au quotient de  $[0, 1]^2$  par la relation d'équivalence qui identifie les points des bords "gauche" et "droit"  $(0, y)$  et  $(1, 1 - y)$  et des bords "bas" et "haut"  $(x, 0)$  et  $(x, 1)$ .

---

1. Essayez de le démontrer en utilisant successivement les théorèmes sur les produits et les sous-espaces.  
 m. En fait, nous verrons à la fin du cours que ceci est suffisant pour démontrer que  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme car c'est une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé.

## 1.8.1 Exercices

1. Démontrer qu'un groupe  $G$  muni d'une topologie  $\mathcal{T}$  est un groupe topologique si, et seulement si, l'application

$$\alpha : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

est continue.

2. Soit  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique. Démontrer que la translation à gauche et à droite par un élément  $g \in G$  ( $L_g : G \rightarrow G : x \mapsto gx$ ), ainsi que l'inversion  $\iota$  sont des homéomorphismes.
3. Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est dit *homogène* si pour tous  $x, y \in X$ , il existe un homéomorphisme  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  tel que  $f(x) = y$ . Dédurre de l'exercice précédent que tout groupe topologique  $(G, \mathcal{T})$  est un espace topologique homogène.
4. Démontrer que l'ensemble  $[0, 1]$  muni de la topologie euclidienne ne peut être muni d'une structure de groupe topologique. Suggestion : il ne peut y avoir d'homéomorphisme qui applique  $\frac{1}{2}$  sur 0.
5. Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $U$  un voisinage de  $e$  (l'identité de  $G$ ). Démontrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que
- on a  $V^{-1} = V$  (on dit que  $V$  est symétrique);
  - on a  $V^2 \subset U$ .
6. Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe. Démontrer que  $\overline{H}$  est aussi un sous-groupe. (Suggestion : on peut le démontrer "à la main", ou utiliser par exemple que  $(\overline{H})^{-1} = \iota(\overline{H}) \subset \iota(\overline{H}) = \overline{H}$ , car  $\iota$  est continue. On fait de même avec la multiplication pour obtenir  $\overline{H}^2 \subset \overline{H}$ ).
7. Soient  $(G, \mathcal{T})$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe normal. Démontrer que  $\overline{H}$  est également normal. (Suggestion : utiliser la continuité de la conjugaison  $C_x : G \rightarrow G : y \mapsto xyx^{-1}$ ).
8. Démontrer que tout sous-groupe ouvert  $H$  d'un groupe topologique  $(G, \mathcal{T})$  est aussi fermé.
9. Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe topologique  $(G, \mathcal{T})$ . Démontrer que  $H$  est ouvert si, et seulement si,  $H^\circ \neq \emptyset$ .
10. Soit  $U$  un voisinage symétrique ( $U = U^{-1}$ ) de l'unité  $e$  d'un groupe topologique. Démontrer que  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$  est un sous-groupe ouvert et fermé de  $G$  (c'est le sous-groupe engendré par  $U$ ).
11. Démontrer que tout groupe topologique  $(G, \mathcal{T})$  *connexe* est engendré par tout voisinage de l'unité (i.e., pour tout voisinage de l'unité  $U$ , on a  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ ).
12. Soient  $(G_1, \mathcal{T}_1)$  et  $(G_2, \mathcal{T}_2)$  deux groupes topologiques et  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorphisme. Démontrer que  $f$  est continu si, et seulement si, il est continu en  $e$ .
13. Les théorèmes de théorie des groupes ne se transposent pas directement et sans hypothèse aux groupes topologiques. On dit que des groupes topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupes qui est également un homéomorphisme. Soient  $(G, \mathcal{T})$  et  $(G', \mathcal{T}')$  deux groupes topologiques et  $f : G \rightarrow G'$  un homomorphisme continu. Si  $f : G \rightarrow \text{im}(f)$  est ouverte, alors  $f$  induit un isomorphisme de groupes topologiques  $\tilde{f} : G/\ker f \rightarrow \text{im}(f)$ .<sup>n</sup>

n. En fait, c'est une condition nécessaire et suffisante.

## Chapitre 2

# Quelques axiomes et les résultats qui en découlent

La définition d'espace topologique est tellement générale qu'il est difficile d'obtenir des résultats sans tenir compte de propriétés supplémentaires satisfaites par l'espace topologique que l'on considère. Les propriétés que nous introduisons dans ce chapitre concernent la possibilité de dénombrer certaines collections associées à une topologie (comme des bases, ou des bases de voisinages) ou de séparer des points ou des sous-ensembles par des ouverts. Les premières sont appelées axiomes de dénombrabilité et les dernières axiomes de séparation. En ce qui concerne les axiomes de séparation, nous considérerons les quatre axiomes principaux, mais il en existe bien d'autres. Il est également utile de savoir que la définition même de ces axiomes varie selon les sources dans la littérature. Par exemple, certains auteurs demandent qu'un espace régulier soit d'abord de Hausdorff (voir plus bas). Nous n'adopterons pas ce point de vue pour garder plus de généralité.

### 2.1 Axiomes de dénombrabilité

Nous étudions dans cette section deux propriétés liées à la possibilité de pouvoir dénombrer les ouverts, ou les voisinages des points de l'espace considéré.

**Définition 2.1.1** (Espaces à bases dénombrables de voisinages<sup>a</sup>). Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est à base dénombrable de voisinages si tout point admet une base dénombrable de voisinages.

Evidemment, l'existence d'une base dénombrable de voisinage d'un point  $x$  n'implique pas que toutes ses bases de voisinages soient dénombrables, puisqu'on peut toujours ajouter des voisinages à une base, tout en gardant une base. Par exemple, dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble des boules ouvertes centrées sur  $x$  et de rayon  $1/n$ , ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) est une base dénombrable de voisinages de  $x$ , tandis que l'ensemble des boules de rayon strictement positif centrées sur  $x$  est une base de voisinages, non dénombrable. Nous avons quand même le résultat suivant.

**Proposition 2.1.1.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est à base dénombrable de voisinages, toute base de voisinages de  $x$  contient une base dénombrable de voisinages.*

*Démonstration.* Soient  $x \in X$  et  $\mathcal{B} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de voisinages de  $x$ . Soit  $\mathcal{B}'$  une base de voisinages de  $x$ . Nous devons sélectionner un sous-ensemble  $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$  de

---

a. Dans la terminologie anglo-saxonne, ces espaces sont appelés first countable spaces.

façon telle qu'on puisse loger un élément de  $\mathcal{B}''$  dans tout voisinage  $V$  de  $x$ . Mais si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in V_i \subset V$ . Il existe alors au moins un  $V' \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in V' \subset V_i \subset V$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , nous choisissons donc  $V'_i \in \mathcal{B}'$  tel que  $V'_i \subset V_i$ . Le raisonnement précédent montre que  $\mathcal{B}'' = \{V'_i : i \in \mathbb{N}\}$  est une base dénombrable de voisinages de  $x$ .  $\square$

**Définition 2.1.2** (Espaces à base dénombrable<sup>b</sup>). Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est à base dénombrable si  $\mathcal{T}$  admet une base dénombrable.

A titre d'exemple, on peut encore citer l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , puisqu'il est facile de démontrer que dans ce cas, les boules ouvertes de rayon rationnel, centrées en des points à composantes rationnelles, forment une base de la topologie, évidemment dénombrable.

**Proposition 2.1.2.** *Tout espace à base dénombrable est à bases dénombrables de voisinages.*

*Démonstration.* Soient  $x \in X$  et  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$ . Alors  $\mathcal{B}_x = \{\omega \in \mathcal{B} : \omega \ni x\}$  est une base dénombrable de voisinages de  $x$ .  $\square$

Dans un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  à base dénombrable, les bases de  $\mathcal{T}$  n'ont aucune raison d'être toutes dénombrables. Nous avons cependant le résultat suivant.

**Proposition 2.1.3.** *Dans un espace topologique à base dénombrable, toute base contient une base dénombrable.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$  et soit  $\mathcal{B}'$  une base quelconque.

Analyse : Nous devons déterminer un sous-ensemble  $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}'$  dénombrable, et qui forme encore une base de  $\mathcal{T}$  ; c'est-à-dire tel que pour tout  $\Omega \in \mathcal{T}$  et tout  $x \in \Omega$ , il existe  $\omega \in \mathcal{B}''$  tel que  $x \in \omega \subset \Omega$ . Mais pour tout  $\Omega \in \mathcal{T}$  et  $x \in \Omega$ , il existe  $\omega_i \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in \omega_i \subset \Omega$ , puis  $A \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in A \subset \omega_i$ , puis  $\omega_j \in \mathcal{B}$  tel que

$$x \in \omega_j \subset A \subset \omega_i \subset \Omega.$$

Nous n'avons donc pas besoin de tous les  $A \in \mathcal{B}'$  pour avoir une base, mais seulement de ceux qui sont intercalés entre deux ouverts  $\omega_i$  et  $\omega_j$ , au sens de la relation d'inclusion ci-dessus.

Construction : pour tout couple  $(i, j)$  tel qu'il existe un élément  $A$  de  $\mathcal{B}'$  satisfaisant  $\omega_i \subset A \subset \omega_j$ , nous choisissons un élément  $A_{i,j}$  ayant cette propriété.

Conclusion : l'ensemble  $\mathcal{B}'' = \{A_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$  est une base dénombrable.  $\square$

**Définition 2.1.3.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est de Lindelöf<sup>c</sup> si tout recouvrement ouvert de  $X$  contient un recouvrement dénombrable.

**Proposition 2.1.4** (Lemme de Lindelöf). *Tout espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  à base dénombrable est de Lindelöf.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{B} = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{O}$  un recouvrement ouvert de  $X$ .

Analyse : pour tout  $x \in X$ , il existe  $\omega \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \omega$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est une base, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \omega_i \subset \omega$ . Nous n'avons pas besoin de tous les éléments de  $\mathcal{O}$ , mais seulement de ceux qui contiennent un élément de  $\mathcal{B}$ , et dans ce cas, un seul élément de  $\mathcal{O}$  par élément de  $\mathcal{B}$  est nécessaire.

b. Dans la terminologie anglosaxonne, ces espaces sont appelés second countable spaces.

c. Ernst L. Lindelöf, 1870-1946

Construction : Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega_i$  soit inclus dans un élément de  $\mathcal{O}$ , choisissons  $\Omega_i \in \mathcal{O}$  tel que  $\omega_i \subset \Omega_i$ .

Conclusion : L'ensemble  $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$  est un sous-ensemble dénombrable de  $\mathcal{O}$ . C'est un recouvrement.  $\square$

**Proposition 2.1.5.** *Tout espace à base dénombrable est séparable.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega_i$  soit non vide, fixons un point  $x_i \in \omega_i$ . L'ensemble  $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  est visiblement dénombrable. Il est aussi dense. En effet, soient  $\Omega$  un ouvert non vide et  $x \in \Omega$ . Il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \omega_i \subset \Omega$ . Alors  $x_i$  est dans  $\Omega$ , et  $D$  rencontre  $\Omega$ .  $\square$

La réciproque de ces propriétés n'est pas toujours vraie; voir par exemple l'exercice 5. Cependant, nous avons la propriété suivante pour les espaces métriques.

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *l'espace  $(X, \mathcal{T}_d)$  est à base dénombrable;*
2. *l'espace  $(X, \mathcal{T}_d)$  est séparable;*
3. *l'espace  $(X, \mathcal{T}_d)$  est de Lindelöf.*

*Démonstration.* Nous savons que la première assertion implique les deux autres en général. La deuxième implique la première : si  $D$  est une partie dénombrable et dense, les boules centrées sur des points de  $D$  et à rayon rationnel strictement positif forment une base dénombrable de  $\mathcal{T}_d$ .

La troisième implique la première : pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , l'ensemble  $\mathcal{R}_k = \{b_{\frac{1}{k}, x} : x \in X\}$  forme un recouvrement ouvert de  $X$  et contient donc un recouvrement dénombrable  $\mathcal{R}'_k = \{b_{\frac{1}{k}, x_{i,k}} : i \in \mathbb{N}\}$ . L'ensemble  $\mathcal{B} = \cup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{R}'_k$  est alors une base de topologie dénombrable.  $\square$

### 2.1.1 Exercices

1. Démontrer que tout sous-espace d'un espace à base dénombrable est à base dénombrable.
2. Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  est à base dénombrable de voisinages si, et seulement si, tout point admet une base dénombrable de voisinages ouverts.
3. Démontrer que tout sous-espace fermé d'un espace de Lindelöf est de Lindelöf.
4. Démontrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une union dénombrable d'intervalles ouverts (le lemme de Lindelöf dans sa version première).
5. La droite de Sorgenfrey<sup>d</sup> est l'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de la topologie ayant pour base

$$\mathcal{B} = \{[a, b[ : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

- Démontrer qu'il s'agit bien d'une base de topologie;
- Démontrer que l'espace ainsi obtenu est à base dénombrable de voisinages;
- Démontrer que l'espace ainsi obtenu est séparable;
- Démontrer que l'espace ainsi obtenu n'est pas à base dénombrable et n'est donc pas métrisable.

Suggestion : si c'était le cas, alors  $\mathcal{B}$  contiendrait une base dénombrable, disons  $\mathcal{B}' = \{[x_n, y_n[ : n \in \mathbb{N}\}$ . Soient  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\mathcal{B}'$  est une base, on doit pouvoir trouver  $\Omega \in \mathcal{B}'$  tel que  $x \in \Omega \subset [x, x + \varepsilon[$ . C'est impossible.

d. Robert H. Sorgenfrey (1915–1995), Mathématicien Américain.

6. Démontrer que si  $X$  n'est pas dénombrable, alors  $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$  n'est pas à base dénombrable de voisinages.
7. Démontrer que tout produit dénombrable d'espaces à base dénombrable est à base dénombrable.
8. Démontrer que tout produit dénombrable d'espaces à bases dénombrables de voisinages est à base dénombrable de voisinages.

## 2.2 Axiomes de séparation

Après avoir introduit les axiomes de séparation et leurs premières propriétés, nous considérerons quelques exemples et contre-exemples puis nous étudierons leur stabilité vis-à-vis des constructions introduites dans le chapitre précédent. Enfin, nous démontrerons quelques théorèmes classiques.

**Définition 2.2.1.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est *accessible* si pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  qui ne contient pas  $y$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $(X, \mathcal{T})$  satisfait l'axiome  $(T_1)$ .

Remarquons que la relation  $x \neq y$  est symétrique et dès lors, pour que  $T_1$  soit satisfait, il doit aussi exister  $V' \in \mathcal{V}_y$  tel que  $V'$  ne contient pas  $x$ .

Cet axiome peut s'exprimer de différentes manières, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.2.1.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est accessible ;
2. Pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe  $\omega_x \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega_x$  et  $y \notin \omega_x$  ;
3. Les singletons de  $X$  sont fermés.

*Démonstration.* La première assertion implique la deuxième : si  $x \neq y$ , il existe  $V \in \mathcal{V}_x$  tel que  $V \not\ni y$ , puis  $\omega_x \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega_x \subset V$ , ce qui implique  $y \notin \omega_x$ .

La deuxième assertion implique la troisième : montrons que  $X \setminus \{x\}$  est ouvert pour tout  $x$ . Si  $y \in X \setminus \{x\}$ , il existe  $\omega_y \in \mathcal{T}$  tel que  $y \in \omega_y$  et  $\omega_y \not\ni x$ , c'est-à-dire  $y \in \omega_y \subset X \setminus \{x\}$ . Donc  $X \setminus \{x\}$  est voisinage de chacun de ses points.

La troisième assertion implique la première : si  $x \neq y$ , alors  $X \setminus \{y\}$  est un voisinage de  $x$  qui ne contient pas  $y$ .  $\square$

On peut renforcer l'axiome  $(T_1)$  de manière évidente.

**Définition 2.2.2.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est *séparé*, ou *de Hausdorff* si pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe un voisinage fermé  $V$  de  $x$  qui ne contient pas  $y$ . Dans ce cas,  $(X, \mathcal{T})$  satisfait l'axiome  $(T_2)$ .

Ici encore, l'axiome est symétrique, il doit aussi exister un voisinage fermé  $V'$  de  $y$  qui ne contient pas  $x$ . On peut également en donner des formes équivalentes.

**Proposition 2.2.2.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est de Hausdorff ;
2. Pour tous  $x \neq y \in X$ ,  $x$  et  $y$  ont des voisinages disjoints ;
3. Pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe  $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega_x$ ,  $y \in \omega_y$  et  $\omega_x \cap \omega_y = \emptyset$ .

*De plus tout espace de Hausdorff est accessible.*



*Démonstration.* La première assertion implique la deuxième : si  $x \neq y$  et si  $V$  est un voisinage fermé de  $x$  ne contenant pas  $y$ , alors  $X \setminus V$  est un voisinage de  $y$  disjoint de  $V$ .

La deuxième implique la troisième, par définition des voisinages.

La troisième condition implique la première : si  $x \neq y$  et si  $\omega_x, \omega_y$  sont comme dans l'énoncé, alors on a  $\omega_x \subset X \setminus \omega_y$ , donc  $\bar{\omega}_x \subset X \setminus \omega_y$  et  $\bar{\omega}_x$  est un voisinage fermé de  $x$  qui ne contient pas  $y$ .  $\square$

Pour les axiomes suivants, il est nécessaire de généraliser la notion de voisinage. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $X$ , alors  $V$  est un voisinage de  $A$  si  $V$  contient un ouvert qui contient  $A$ . Un voisinage d'un point  $x \in X$  est donc exactement un voisinage de  $\{x\}$ .

**Définition 2.2.3.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est régulier si tout fermé  $F$  et tout singleton  $\{x\}$  disjoints ont des voisinages disjoints. Dans ce cas,  $(X, \mathcal{T})$  ou satisfait l'axiome  $(T_3)$ .

Ici encore, nous avons des formulations équivalentes.

**Proposition 2.2.3.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est régulier ;*
2. *Pour tout fermé  $F$  et tout  $x \notin F$ , il existe des ouverts disjoints  $\Omega, \omega$  tels que  $F \subset \Omega$  et  $x \in \omega$  ;*
3. *Pour tout fermé  $F$  et  $x \notin F$ , il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega$  et  $\bar{\omega} \cap F = \emptyset$  ;*
4. *Tout point  $x \in X$  admet une base de voisinages fermés.*

*De plus tout espace accessible et régulier est de Hausdorff.*

*Démonstration.* La première condition implique la deuxième par définition des voisinages.

La deuxième implique la troisième : si  $x$  et  $F$  sont comme dans l'énoncé, la deuxième condition donne les ouverts disjoints  $\omega$  et  $\Omega$ . Comme plus haut, on a  $\omega \subset X \setminus \Omega$ , donc  $\bar{\omega} \subset X \setminus \Omega$ , ce qui implique que  $\bar{\omega}$  et  $F$  sont disjoints.

La troisième condition implique la quatrième : considérons en effet l'ensemble

$$\mathcal{B}_x = \{\bar{\omega} : \omega \in \mathcal{T}, \omega \ni x\}.$$

Il est clair qu'il est formé de voisinages fermés de  $x$ . C'est une base de voisinages si on peut loger un tel  $\bar{\omega}$  dans tout voisinage de  $x$ . Mais si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il contient un ouvert  $\Omega$  contenant  $x$ . Alors  $x$  n'appartient pas à  $X \setminus \Omega$ , et il existe  $\omega$  tel que  $x \in \omega$  et  $\bar{\omega} \cap (X \setminus \Omega) = \emptyset$ , ce qui donne  $\bar{\omega} \subset \Omega \subset V$ .

La quatrième condition implique la première : si  $x$  n'appartient pas à  $F$ , alors  $x$  est dans l'ouvert  $X \setminus F$ . Il existe donc un voisinage fermé  $V$  de  $x$  tel que  $V \subset X \setminus F$ . Alors  $V^\circ$  et  $X \setminus V$  sont des voisinages disjoints de  $x$  et  $F$ .  $\square$

*Remarque 2.1.* Etant donné un fermé  $F$ , on peut toujours considérer son complémentaire  $\Omega = X \setminus F$ . On peut alors écrire la proposition précédente en termes d'un ouvert  $\Omega$  et d'un point  $x \in \Omega$ .

Terminons maintenant notre liste d'axiomes de séparation.

**Définition 2.2.4.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est normal si tous fermés disjoints  $F_1$  et  $F_2$  ont des voisinages disjoints. Dans ce cas,  $(X, \mathcal{T})$  satisfait l'axiome  $(T_4)$ .

*Remarque 2.2.* Pour vérifier qu'un espace topologique a cette propriété, il suffit de le faire pour des fermés non vides et disjoints.

Donnons ici encore une liste de formes équivalentes à la définition.

**Proposition 2.2.4.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est normal;*
2. *Pour tous fermés disjoints  $F_1$  et  $F_2$ , il existe des ouverts disjoints  $\omega_1, \omega_2$  tels que  $F_1 \subset \omega_1$  et  $F_2 \subset \omega_2$ ;*
3. *Pour tous fermés disjoints  $F_1$  et  $F_2$ , il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $F_1 \subset \omega$  et  $\bar{\omega} \cap F_2 = \emptyset$ ;*
4. *Si  $F$  est fermé et  $\Omega$  ouvert tel que  $F \subset \Omega$ , il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $F \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ .*

*De plus, tout espace accessible et normal est régulier.*

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de la proposition 2.2.3 et est laissée comme exercice. Pour le point 4., on considérera  $F' = X \setminus \Omega$ .  $\square$

## 2.3 Exemples et contre-exemples

Dans cette section, nous allons présenter quelques exemples visant à montrer que les axiomes de séparation que nous venons de présenter ne sont pas équivalents.

**Exemple 2.3.1. Un espace accessible.** Considérons un ensemble  $X$  infini, muni de la topologie cofinie  $\mathcal{T}$  (les fermés sont  $X$  et ses sous-ensembles finis). Cet espace topologique est accessible, mais n'est pas séparé, pas régulier et pas normal.

*Démonstration.* L'espace est accessible puisque par définition, les singletons sont fermés.

L'espace n'est pas séparé : si on considère deux ouverts  $\omega_1$  et  $\omega_2$  non vides, alors  $X \setminus \omega_1$  et  $X \setminus \omega_2$  sont finis (puisque'ils ne sont pas égaux à  $X$ ). Donc leur union est un ensemble fini et son complémentaire  $\omega_1 \cap \omega_2$  est un ensemble infini, donc non vide. Puisqu'il n'existe pas de couple d'ouverts non vides et disjoints, deux points distincts ne peuvent avoir des voisinages disjoints.

Puisque l'espace est accessible et non séparé, il ne peut être régulier (Proposition 2.2.3). Alors, pour la même raison, il ne peut être normal (Proposition 2.2.4).  $\square$

**Exemple 2.3.2. Un espace séparé.** Considérons la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie  $\mathcal{T}$  engendrée par  $\mathcal{E} \cup \{\mathbb{Q}\}$ , où  $\mathcal{E}$  est la topologie euclidienne. Cet espace est séparé, mais il n'est ni régulier, ni normal.

Rappelons qu'une base de  $\mathcal{T}$  est donnée par les intersections finies d'éléments de  $\mathcal{E} \cup \{\mathbb{Q}\}$ . Puisque  $\mathcal{E}$  est stable par intersections finies, une base de  $\mathcal{T}$  est donnée par  $\mathcal{B} = \mathcal{E} \cup \{\omega \cap \mathbb{Q} : \omega \in \mathcal{E}\}$ .

*Démonstration.* L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est séparé : si  $x \neq y$ , alors les boules ouvertes de rayon  $|x - y|/3$  centrées sur  $x$  et sur  $y$  sont des voisinages (ouverts) disjoints de  $x$  et  $y$ .

L'espace  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas régulier : considérons le point  $0 \in \mathbb{R}$  et le fermé  $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , et supposons disposer d'ouverts  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$  tels que  $0 \in \omega_1$ ,  $F \subset \omega_2$  et  $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ . Alors il existe un ouvert de base  $\omega'_1$  tel que  $0 \in \omega'_1 \subset \omega_1$ , et, vu la forme de  $\mathcal{B}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \cap \mathbb{Q} \subset \omega_1$ .

Soit alors  $x \in ] - \varepsilon, \varepsilon[ \cap F$ . Il existe un ouvert de base  $\omega'_2$  tel que  $x \in \omega'_2 \subset \omega_2$ . Alors  $\omega'_2$  est nécessairement un ouvert euclidien, et puisque  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \cap \omega'_2$  est un ouvert euclidien non vide, il rencontre  $\mathbb{Q}$ , ce qui implique  $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$ , une contradiction.

Enfin, puisque l'espace est accessible mais pas régulier, il n'est pas non plus normal, par la proposition 2.2.4.  $\square$

**Exemple 2.3.3. Un espace régulier 1.** Le plan de Sorgenfrey est défini comme le produit de deux copies de la droite de Sorgenfrey. Rappelons que cette dernière est la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de la topologie ayant pour base  $\mathcal{B} = \{[a, b[ : a < b \in \mathbb{R}\}$ .<sup>e</sup> Le plan de Sorgenfrey est alors muni de la topologie produit. Cet espace est régulier, mais il n'est pas normal.

Il est utile de remarquer que la topologie de Sorgenfrey sur  $\mathbb{R}$  est plus fine que la topologie euclidienne. En effet, tout ouvert euclidien  $\Omega$  contenant un point  $x$  contient un intervalle  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  pour un  $\varepsilon > 0$ , et contient donc l'ouvert de Sorgenfrey  $[x, x + \varepsilon[$ . Donc  $\Omega$  est voisinage de  $x$  au sens de Sorgenfrey.

*Démonstration.* Pour démontrer que l'espace est régulier, nous montrons que tout point admet une base de voisinages fermés. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . L'ensemble  $\mathcal{B} = \{[x, x + \varepsilon] \times [y, y + \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$  est une base de voisinages fermés de  $(x, y)$ . En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $[x, x + \varepsilon] \times [y, y + \varepsilon]$  est un voisinage de  $(x, y)$  puisqu'il contient  $[x, x + \varepsilon[ \times [y, y + \varepsilon[$ . Il est fermé car c'est le produit de deux fermés de la droite de Sorgenfrey. Soit maintenant  $V$  un voisinage de  $(x, y)$ . Alors  $V$  contient un ouvert  $\Omega$  contenant  $(x, y)$  et, par définition de la topologie produit, il existe des ouverts  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de la droite tels que  $(x, y) \in \omega_1 \times \omega_2 \subset \Omega \subset V$ . Il existe encore  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $c < d \in \mathbb{R}$  tels que  $x \in [a, b[ \subset \omega_1$  et  $y \in [c, d[ \subset \omega_2$ . En choisissant  $\varepsilon > 0$  tel que  $x + \varepsilon < b$  et  $y + \varepsilon < d$ , on obtient alors  $[x, x + \varepsilon] \times [y, y + \varepsilon] \subset V$ .

Le plan de Sorgenfrey n'est pas normal. Considérons la droite  $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Les sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $D$  définis par

$$F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, -x) : x \notin \mathbb{Q}\}$$

sont deux fermés disjoints : en effet par exemple, on a

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = (\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup \bigcup_{x \notin \mathbb{Q}} C_{x, \varepsilon},$$

où  $C_{x, \varepsilon} = [x, x + \varepsilon[ \times ]-x, -x + \varepsilon[$ . Supposons qu'il existe des ouverts  $\omega_F, \omega_G$  tels que  $F \subset \omega_F, G \subset \omega_G$  et  $\omega_F \cap \omega_G = \emptyset$ . Soit  $f_1 \in \mathbb{Q}$ . Il existe alors  $\varepsilon_1 > 0$  tel que  $C_{f_1, \varepsilon_1} \subset \omega_F$ . Il existe  $g_1 \in ]f_1, f_1 + \varepsilon_1/2[ \setminus \mathbb{Q}$ , puis  $\eta_1 > 0$  tel que  $C_{g_1, \eta_1} \subset \omega_G$ . On continue avec  $f_2 \in ]g_1 - \eta_1/2, g_1[ \cap \mathbb{Q}$  et  $\varepsilon_2 > 0$  tel que  $C_{f_2, \varepsilon_2} \subset \omega_F$ . On construit ainsi deux suites  $(f_m, \varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  et  $(g_m, \eta_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$  telles que

- $C_{f_m, \varepsilon_m} \subset \omega_F$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$  ;
- $C_{g_m, \eta_m} \subset \omega_G$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$  ;
- $f_{m+1} \in ]g_m - \eta_m/2, g_m[ \cap \mathbb{Q}$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$  ;
- $g_m \in ]f_m, f_m + \varepsilon_m/2[ \setminus \mathbb{Q}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ .

Les deux premières conditions donnent  $C_{f_m, \varepsilon_m} \cap C_{g_m, \eta_m} = \emptyset$ , qui donne (avec la quatrième)  $\eta_m \leq g_m - f_m < \varepsilon_m/2$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ . De la même manière,  $C_{f_{m+1}, \varepsilon_{m+1}} \cap C_{g_m, \eta_m} = \emptyset$  donne  $\varepsilon_{m+1} \leq g_m - f_{m+1} < \eta_m/2 < \varepsilon_m/4$ . Les suites  $\varepsilon_m, \eta_m$  et  $g_m - f_m$  sont donc des suites strictement positives qui convergent vers 0. Les inégalités  $f_m + \eta_m \leq g_m$  et  $f_{m+1} \geq g_m - \eta_m/2$  donnent  $f_{m+1} > f_m$  pour tout  $m$ . De même on a  $f_{m+1} + \varepsilon_{m+1} \leq g_m$  et  $g_{m+1} < f_{m+1} + \varepsilon_{m+1}/2$  donc  $g_m$  est strictement décroissante. La suite  $f_m$  converge vers sa borne supérieure  $f$  tandis que  $g_m$  converge vers  $g$ , et on a  $f = g$ . Supposons que  $f$  soit rationnel (on conclurait de façon analogue dans le cas contraire). Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $C_{f, \varepsilon} \subset \omega_F$ . Il existe alors  $m$  tel que  $g_m \in ]f, f + \varepsilon[$ . Alors  $\eta_m \leq g_m - f$  et  $f_{m+1} > g_m - \eta_m/2$  donne  $f_{m+1} > f$ , une contradiction.  $\square$

**Exemple 2.3.4.** Soit  $X$  un ensemble contenant au moins deux points. Muni de la topologie triviale, cet espace topologique n'est ni accessible, ni séparé, mais il est régulier et normal.

e. Démontrer qu'il s'agit bien d'une base de topologie au sens de la proposition 1.1.6.

*Démonstration.* Tout est évident.  $\square$

**Exemple 2.3.5. Un espace normal.** Considérons encore la droite réelle munie de la topologie  $\mathcal{T} = \{]a, +\infty[ : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ . Cet espace n'est pas accessible, pas séparé, pas régulier, mais il est normal.

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $x < y$ . On constate que tout ouvert contenant  $x$  contient également  $y$ , donc l'espace n'est ni accessible, ni séparé. Il n'est pas non plus régulier. En effet, le fermé  $F = ]-\infty, 0]$  et le point  $x = 1$  ne peuvent avoir des voisinages disjoints. L'espace est cependant normal car si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fermés disjoints, alors l'un des deux au moins doit être vide.  $\square$

## 2.4 Quelques résultats

Analysons maintenant les premières propriétés des axiomes de séparation, vis-à-vis notamment des constructions standard d'espaces topologiques.

**Proposition 2.4.1** (Sous-espaces). *Tout sous-espace  $(Y, \mathcal{T}_X)$  d'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  accessible (resp. séparé, régulier) est accessible (resp. séparé, régulier).*

*Tout sous-espace fermé d'un espace topologique normal est normal.*

*Démonstration.* Traitons le cas des espaces séparés, le cas des espaces accessibles se traite de la même manière. Si  $x$  et  $y$  sont des points distincts de  $Y$ , ils le sont dans  $X$ , et il existe  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$ , disjoints, tels que  $x \in \Omega_1$  et  $y \in \Omega_2$ . Alors  $\omega_1 = \Omega_1 \cap Y$  et  $\omega_2 = \Omega_2 \cap Y$  permettent de séparer  $x$  et  $y$  dans le sous-espace  $Y$ .

Pour les espaces réguliers, on fait de même en notant que si  $F$  est un fermé de  $Y$ , et si  $y$  est dans  $Y \setminus F$ , il existe un fermé  $F'$  de  $X$  tel que  $F = Y \cap F'$ . On a aussi,  $y \notin F'$ , et on peut conclure comme plus haut.

Pour les espaces normaux, puisque  $Y$  est fermé, si  $F_1$  et  $F_2$  sont fermés de  $Y$ , ils le sont aussi dans  $X$  et on peut procéder de la même manière.  $\square$

**Exercice 2.4.1.** Démontrer que si  $i : Y \rightarrow X$  est une application injective et continue et si  $(X, \mathcal{T})$  est accessible (resp. séparé), alors  $(Y, \mathcal{T}')$  est accessible (resp. séparé). Comment cela implique-t-il le résultat précédent pour de tels espaces ?

Déduire que si  $(X, \mathcal{T})$  est accessible (resp. séparé) et si  $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ , alors  $(X, \mathcal{T}')$  est accessible (resp. séparé)<sup>f</sup>.

**Proposition 2.4.2** (Produits). *Tout produit d'espaces accessibles (resp. séparés, réguliers) est accessible (resp. séparé, régulier).*

*Démonstration.* Ici encore, les cas accessibles et séparés sont analogues. Traitons le deuxième. Soient donc une famille  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$  d'espaces topologiques séparés. Si  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$  sont deux points distincts du produit  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ , alors il existe  $\alpha_0 \in A$  tel que  $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$ . Puisque  $X_{\alpha_0}$  est séparé, il existe  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}_{\alpha_0}$ , disjoints et tels que  $x_{\alpha_0} \in \omega_1$  et  $y_{\alpha_0} \in \omega_2$ . Alors les ouverts  $p_{\alpha_0}^{-1}(\omega_1)$  et  $p_{\alpha_0}^{-1}(\omega_2)$  permettent de séparer  $x$  et  $y$ .

Traitons maintenant le cas régulier. Soit  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  un point du produit. Montrons que ce point admet une base de voisinages fermés.

Pour tout  $\alpha \in A$ ,  $x_\alpha$  admet une base de voisinages fermés  $\mathcal{B}_\alpha$  dans  $X_\alpha$ . L'idée est alors de considérer les ensembles  $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$  où  $V_\alpha$  est dans  $\mathcal{B}_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Il faut cependant ajouter la condition habituelle pour que ces ensembles soient des voisinages : nous définissons donc

$$\mathcal{B} = \{\pi_A(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}), n \in \mathbb{N}_0, \alpha_i \in A, V_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}, \text{ pour } i \leq n\}.$$

f. Cela peut aussi être constaté directement, évidemment.

Les éléments de  $\mathcal{B}$  sont fermés comme produits de fermés. Chaque ensemble  $\pi_A(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n})$  est un voisinage de  $x$ , car pour tout  $i \leq n$ , il existe  $\omega_{\alpha_i}$  tel que  $x_{\alpha_i} \in \omega_{\alpha_i} \subset V_{\alpha_i}$ . Alors l'ensemble  $\pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n})$  est ouvert et on a

$$x \in \pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n}) \subset \pi_A(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}).$$

De la même manière, si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il contient un ouvert  $\Omega$  qui contient  $x$ . Cet ouvert contient un ouvert de base  $\omega$  contenant  $x$ , c'est-à-dire un ouvert de la forme  $\pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n})$ . Pour tout  $i \leq n$ , il existe alors  $V_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$  tel que  $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \subset \omega_{\alpha_i}$ . On a donc cette fois

$$x \in \pi_A(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}) \subset \pi_A(\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_n}),$$

ce qui montre que  $\mathcal{B}$  est une base de voisinages.  $\square$

On peut montrer un exemple de produits d'espaces normaux qui n'est pas normal. En effet, on montre que la droite de Sorgenfrey est normale, en utilisant par exemple la proposition 2.4.7 ci-dessous. Cependant, le plan de Sorgenfrey n'est pas normal, comme nous venons de le voir. Passons maintenant aux quotients.

**Proposition 2.4.3** (Espaces quotients 1). *L'espace quotient  $X/\mathcal{R}$  est accessible si, et seulement si, les classes de  $\mathcal{R}$  sont fermées dans  $X$ . C'est le cas si  $X$  est accessible et  $\pi$  fermé.*

*Démonstration.* Si  $X/\mathcal{R}$  est accessible, alors les singletons  $\{\pi(x)\}$  sont fermés. Puisque  $\pi$  est continue, les ensembles  $\pi^{-1}(\{\pi(x)\})$  le sont aussi. Réciproquement, si cet ensemble est fermé pour tout  $x$ , alors puisqu'on a

$$\pi^{-1}(X/\mathcal{R} \setminus \{\pi(x)\}) = X \setminus \pi^{-1}(\{\pi(x)\})^g,$$

l'ensemble  $X/\mathcal{R} \setminus \{\pi(x)\}$  est ouvert pour tout  $x$ , et son complémentaire est fermé.

Si  $X$  est accessible, alors  $\{x\}$  est fermé pour tout  $x \in X$  et puisque  $\pi$  est fermée, son image  $\pi(\{x\}) = \{\pi(x)\}$  est également un fermé. Donc  $X/\mathcal{R}$  est accessible.  $\square$

Avant de passer aux quotients des espaces séparés, nous donnons une caractérisation des espaces séparés qui nous sera utile par ailleurs.

**Proposition 2.4.4.** *Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est séparé si, et seulement si, sa diagonale  $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$  est fermée dans  $X \times X$  (muni de la topologie produit).*

*Démonstration.* Remarquons que pour tous sous-ensembles  $A, B$  de  $X$ , on a  $A \cap B = \emptyset$  si, et seulement si,  $A \times B \cap \Delta_X = \emptyset$ . De plus,  $\Delta_X$  est fermé si, et seulement si, pour tout  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$ , il existe  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$  tels que

$$(x, y) \in \omega_1 \times \omega_2 \subset X \times X \setminus \Delta_X.$$

Nous pouvons alors traduire cette propriété, mot à mot :  $\Delta_X$  est fermé si, et seulement si, pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$  tels que

$$x \in \omega_1, \quad y \in \omega_2, \quad \text{et} \quad \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset,$$

ce qui veut dire que  $(X, \mathcal{T})$  est séparé.  $\square$

Nous pouvons passer à la proposition sur les quotients. Rappelons tout d'abord que le graphe d'une relation est défini par

$$G(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in X \times X : x\mathcal{R}y\}.$$

---

g. Ces deux ensembles sont formés des points qui ne sont pas équivalents à  $x$ .

**Proposition 2.4.5.** *Si  $X/\mathcal{R}$  est séparé, alors le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X \times X$ . Si le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé et  $\pi$  ouvert, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.*

*Démonstration.* Définissons d'abord l'application

$$\pi \times \pi : X \times X \rightarrow X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} : (x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y)).$$

C'est une application continue par la proposition 1.6.2.

De plus si  $\pi$  est ouverte, alors  $\pi \times \pi$  l'est aussi. En effet, pour qu'une application soit ouverte, il faut et il suffit que l'image des ouverts d'une base soit ouverte. En l'occurrence, une base est donnée par les ouverts  $\omega_1 \times \omega_2$ , où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont dans  $\mathcal{T}$ . Or  $\pi \times \pi(\omega_1 \times \omega_2) = \pi(\omega_1) \times \pi(\omega_2)$ , qui est visiblement ouvert.

Si  $X/\mathcal{R}$  est séparé, sa diagonale est fermée. Mais on a

$$G(\mathcal{R}) = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}}),$$

donc  $G(\mathcal{R})$  est fermé.

Réciproquement, si  $G(\mathcal{R})$  est fermé,  $X \times X \setminus G(\mathcal{R})$  est ouvert. De plus on a

$$\pi \times \pi(X \times X \setminus G(\mathcal{R})) = X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}},$$

et puisque  $\pi \times \pi$  est ouverte,  $\Delta_{X/\mathcal{R}}$  est un fermé, ce qui nous suffit, par la proposition 2.4.4.  $\square$

**Exemple 2.4.1.** Nous avons démontré que l'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  est homéomorphe au quotient de  $S^n$  par la relation qui identifie les points diamétralement opposés. Nous avons également montré que la projection  $\pi$  est ouverte dans ce cas. Le graphe de cette relation est

$$G(\mathcal{R}) = \{(x, x) : x \in S^n\} \cup \{(x, -x) : x \in S^n\}.$$

Le premier sous-ensemble est fermé car c'est la diagonale de l'espace  $S^n$ , qui est séparé comme sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ . Le deuxième est l'image de  $\Delta_{S^n}$  par l'application

$$f : S^n \times S^n \rightarrow S^n \times S^n : (x, y) \mapsto (x, -y),$$

qui est un homéomorphisme. On conclut donc que l'espace projectif est séparé.

Dans la même veine, on a le résultat suivant, qui généralise ce que l'on connaît bien dans les espaces euclidiens.

**Proposition 2.4.6.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux applications continues de  $(X, \mathcal{T})$  dans  $(Y, \mathcal{T}')$  et si  $(Y, \mathcal{T}')$  est séparé, alors l'ensemble  $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$  est fermé.*

*Démonstration.* On peut le démontrer en se basant sur les définitions, et cette preuve est suggérée comme exercice. En voici une plus courte. Par la proposition 1.6.2, l'application  $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$  est continue. On a également

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y),$$

ce qui suffit, puisque  $\Delta_Y$  est un fermé.  $\square$

Terminons par une proposition qui nous permettra de démontrer que certains espaces sont normaux.

**Proposition 2.4.7.** *Tout espace  $(X, \mathcal{T})$  régulier et de Lindelöf est normal.*

*Démonstration.* Soient  $F_1$  et  $F_2$  des fermés disjoints de  $X$ . Pour tout  $x$  dans  $F_1$ , il existe  $\omega_x \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in \omega_x$  et  $\overline{\omega_x} \cap F_2 = \emptyset$ . Ces ouverts et  $X \setminus F_1$  recouvrent  $X$ . On peut donc en extraire un recouvrement dénombrable

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i \cup X \setminus F_1.$$

Cela nous donne donc un recouvrement dénombrable de  $F_1$  :

$$F_1 \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \omega_i.$$

On construit de la même manière une suite d'ouverts  $\Omega_j, j \in \mathbb{N}$  tels que

$$F_2 \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j \quad \text{et} \quad \overline{\Omega_j} \cap F_1 = \emptyset.$$

On définit alors

$$\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\omega_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{\Omega_j}) \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Omega_k \setminus \bigcup_{j \leq k} \overline{\omega_j}).$$

Ces ensembles sont visiblement ouverts. De plus on a  $F_1 \subset \omega$  car  $F_1$  ne rencontre pas les  $\overline{\Omega_j}$ . De même, on a  $F_2 \subset \Omega$ . Enfin, ces ensembles sont disjoints car on a

$$(\omega_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{\Omega_j}) \cap (\Omega_k \setminus \bigcup_{j \leq k} \overline{\omega_j}) = \emptyset,$$

pour tous  $i, k \in \mathbb{N}$ . □

**Corollaire 2.4.1.** *L'espace  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  est normal. Plus généralement, tout espace régulier à base dénombrable est normal.*

*Démonstration.* Exercice. □

### 2.4.1 Exercices

1. Soit  $X = [-1, 1]$ . Soit  $\mathcal{T}$  la topologie engendrée par

$$\mathcal{A} = \{[-1, b[ : b > 0\} \cup \{]a, 1] : a < 0\}.$$

(a) Calculer  $\{0\}^-$  et  $\{1\}^-$ .

(b) Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas accessible, pas séparé, pas régulier et pas normal.

2. On considère l'ensemble  $Y = [0, 1]$  et deux points  $o_1$  et  $o_2$  n'appartenant pas à  $[0, 1]$ . Soit  $X = \{o_1, o_2\} \cup ]0, 1]$ . Définissons pour  $x \in ]0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}_0$  les ensembles

$$B(x, n) = ]0, 1] \cap ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[;$$

$$B(o_1, n) = \{o_1\} \cup ]0, \frac{1}{n}[;$$

$$B(o_2, n) = \{o_2\} \cup ]0, \frac{1}{n}[.$$

Démontrer que  $\mathcal{B} = \{B(u, n) : u \in X, n \in \mathbb{N}_0\}$  est une base de topologie sur  $X$ . On note  $\mathcal{T}$  la topologie définie par cette base. Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas séparé. Est-il accessible ?

3. Démontrer que si  $(X, \mathcal{T})$  est régulier et  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  continue, ouverte et fermée<sup>h</sup>, alors  $f(X)$  est régulier.

---

h. i.e. l'image de tout ouvert est un ouvert et l'image de tout fermé est un fermé.

4. Démontrer que tout sous-espace fermé d'un espace de Lindelöf est de Lindelöf. En déduire que si  $((X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A)$  est une famille d'espaces accessibles non vides et si  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  est de Lindelöf, alors  $X_\alpha$  est de Lindelöf pour tout  $\alpha \in A$ .
5. Démontrer que si  $(X, \mathcal{T})$  est à bases dénombrables de voisinages, alors  $(X, \mathcal{T})$  est de Hausdorff si, et seulement si, les limites des suites convergentes sont uniques.
6. Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout ouvert  $A$ ,  $\overline{A}$  est ouvert ;
- (b) Pour tous ouverts disjoints  $A$  et  $B$ , les ensembles  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont disjoints.

Démontrer que si  $(X, \mathcal{T})$  est séparé et satisfait aux conditions précédentes, alors les seules parties connexes non vides de  $\mathcal{T}$  sont les singletons.

7. On considère la sphère  $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$  et l'application

$$p: S^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x.$$

On munit  $\mathbb{R}$  de la topologie euclidienne et  $S^2$  de la topologie initiale  $\mathcal{T}$  relative à  $p$ . Démontrer que l'espace  $(S^2, \mathcal{T})$  n'est ni accessible, ni séparé, mais qu'il est régulier et compact.

8. Soient  $X$  un ensemble et  $(Y, \mathcal{T}')$  un espace topologique séparé. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. On munit  $X$  de la topologie  $\mathcal{T}$  initiale relative à  $f$ . Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  est séparé si, et seulement si,  $f$  est injective.
9. Soit  $X = ]-1, 1[$ . On définit l'ensemble des fermés de  $X$  comme étant

$$\{\emptyset, X\} \cup \{[a, b] : -1 < a \leq 0 \leq b < 1 <\}$$

Montrer que ces fermés permettent de définir une topologie  $\mathcal{T}$ . Montrer que l'espace  $(X, \mathcal{T})$  n'est ni accessible, ni séparé, ni régulier, mais qu'il est normal et compact.

10. Soit l'espace  $\mathbb{R}$  muni de la topologie euclidienne. On considère la relation d'équivalence définie par l'action de  $\mathbb{Z}$  par addition (i.e.  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$ ). Démontrer que le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est de Hausdorff.
11. Normalité des espaces métriques.
  - (a) Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  est normal si pour tous fermés disjoints  $A$  et  $B$  de  $X$ , il existe une fonction  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , continue, telle que  $f(A) = \{0\}$  et  $f(B) = \{1\}$  (l'intervalle  $[0, 1]$  est muni de la topologie euclidienne).
  - (b) Démontrer que si  $(X, d)$  est un espace métrique et si  $A$  est fermé non vide de  $(X, d)$ , la fonction

$$d_A : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

est une application continue qui s'annule exactement sur  $A$ .

- (c) Démontrer que tout espace métrique est normal.  
Suggestion : utiliser la fonction

$$g : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}.$$



## 2.5 Lemme d'Urysohn et théorème de Tietze

**Théorème 2.5.1** (Urysohn<sup>i</sup>). *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique normal et  $F_0, F_1$  deux fermés disjoints de  $X$ . Il existe une application continue  $f : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f|_{F_0} = 0$  et  $f|_{F_1} = 1$ .*

L'idée de la preuve est de construire les courbes de niveaux de la fonction  $f$ . A titre d'exemple, considérons des ouverts  $U_0, U_{1/10}, U_{2/10}, \dots, U_1$  tels que

$$F_0 \subset U_0 \subset U_{1/10} \subset U_{2/10} \subset \dots \subset U_1 \subset X \setminus F_1.$$

Si on définit alors la fonction  $f$  par  $f|_{U_0} = 0$ ,  $f|_{U_{1/10} \setminus U_0} = 1/10$ ,  $f|_{U_{2/10} \setminus U_{1/10}} = 2/10$  etc... et  $f|_{X \setminus U_1} = 1$ , (en bref  $f(x) = \inf(\{t : x \in U_t\} \cup \{1\})$ ), on n'a pas une fonction continue, mais ses "sauts" sont maîtrisés, et elle vaut 0 sur  $F_0$  et 1 sur  $F_1$ . Pour obtenir une fonction continue, il suffit d'appliquer cette construction pour infinité d'ouverts, avec certaines précautions.

*Démonstration.* Nous divisons la preuve en trois étapes.

- (1) **Construction d'une suite d'ouverts.** Il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  dans  $\mathcal{T}$ , qui à tout  $t$  associe un ouvert  $\varphi(t) = U_t$ , telle que

$$F_0 \subset U_0, \quad \overline{U}_1 \subset X \setminus F_1 \quad \text{et} \quad \overline{U}_s \subset U_t, \quad \text{si} \quad s < t. \quad (2.1)$$

En effet, puisque  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  est dénombrable, on peut le numéroté :  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ . On peut même demander que  $r_0 = 0$  et  $r_1 = 1$ . Pour construire  $\varphi$  sur  $\{r_0, r_1\}$ , on note que par normalité, il existe  $U_1 \in \mathcal{T}$  tel que  $F_0 \subset U_1$  et  $\overline{U}_1 \cap F_1 = \emptyset$ . De même,  $F_0$  et  $X \setminus U_1$  sont fermés et disjoints, donc il existe  $U_0 \in \mathcal{T}$  tel que  $F_0 \subset U_0$  et  $\overline{U}_0 \cap X \setminus U_1 = \emptyset$ , ce qui se lit  $\overline{U}_0 \subset U_1$ . Supposons maintenant que l'application  $\varphi$  est construite sur  $\{r_0, \dots, r_n\}$  et prolongeons-la sur  $\{r_0, \dots, r_{n+1}\}$ . Notons  $r_i$  et  $r_j$  le prédécesseur et le successeur direct de  $r_{n+1}$  dans  $\{r_0, \dots, r_n\}$  (c'est-à-dire  $r_i < r_j$  et  $]r_i, r_j[ \cap \{r_0, \dots, r_{n+1}\} = r_{n+1}$ ). On a donc par hypothèse d'induction  $\overline{U}_{r_i} \subset U_{r_j}$ , donc il existe  $U_{r_{n+1}} \in \mathcal{T}$  tel que  $\overline{U}_{r_i} \subset U_{r_{n+1}}$  et  $\overline{U}_{r_{n+1}} \subset U_{r_j}$ . On vérifie alors que cette définition permet à  $\varphi$  de satisfaire les conditions (2.1) sur  $\{r_0, \dots, r_{n+1}\}$ .

- (2) **Définition de la fonction  $f$ .** Pour tout  $x \in X$ , définissons l'ensemble  $Q_x = \{t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : x \in U_t\} \cup \{1\}$ . Notons que chaque ensemble  $Q_x$  est croissant : si  $t$  est dans  $Q_x$  et  $s > t$ , alors  $s$  est dans  $Q_x$ . La fonction d'Urysohn  $f$  est alors

$$f(x) = \inf(Q_x).$$

Si  $x$  est dans  $F_0$ , alors  $x$  est dans  $U_0$  et  $Q_x = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , donc  $f(x) = 0$ . Si  $x$  est dans  $F_1$ , alors  $Q_x = \{1\}$  et  $f(x) = 1$ . De plus pour tout  $x \in X$ , on a  $Q_x \subset [0, 1]$ , et donc  $f(x) \in [0, 1]$ .

- (3) **Continuité de la fonction  $f$ .** Pour démontrer que  $f$  est continue, il suffit de démontrer que  $f^{-1}([0, b[)$  et  $f^{-1}(]a, 1])$  sont ouverts pour tous  $a \in [0, 1[$  et  $b \in ]0, 1]$ .

Or on a  $f(x) < b$  si, et seulement si,  $\inf(Q_x) < b$ , ce qui est encore équivalent à l'existence d'un élément de  $Q_x$  strictement inférieur à  $b$ , c'est-à-dire d'un élément  $t \in \mathbb{Q} \cap [0, b[$  tel que  $x$  soit dans  $U_t$ . On a donc

$$f^{-1}([0, b[) = \cup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, b[} U_t.$$

C'est donc un ensemble ouvert.

---

i. Pavel Urysohn (1898-1924).

On a également  $f(x) > a$  si, et seulement si,  $\inf(Q_x) > a$ . Par densité de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , cela implique qu'il existe  $t$  rationnel tel que  $a < t < \inf(Q_x)$ , ou encore qu'il existe  $t \in \mathbb{Q} \cap ]a, 1[$  tel que  $t \notin Q_x$ . Réciproquement, puisque  $Q_x$  est croissant, l'existence d'un tel  $t$  implique  $\inf(Q_x) \geq t > a$ . On a donc

$$f^{-1}(]a, 1]) = \cup_{t \in \mathbb{Q} \cap ]a, 1[} X \setminus U_t = X \setminus \cap_{t \in \mathbb{Q} \cap ]a, 1[} U_t.$$

Il nous reste donc à montrer que  $\cap_{t \in \mathbb{Q} \cap ]a, 1[} U_t$  est fermé, mais vu les propriétés (2.1) des ensembles  $U_t$ , cet ensemble est égal à  $\cap_{t \in \mathbb{Q} \cap ]a, 1[} \bar{U}_t$ , ce qui termine la preuve. □

*Remarque 2.3.* Il est évident que la fonction de Urysohn construite dans le théorème précédent permet d'en construire d'autres avec des propriétés sur mesure. Par exemple, étant donnés deux nombres  $a < b$  et deux fermés disjoints  $F_a$  et  $F_b$  d'un espace normal, il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow [a, b]$  telle que  $f|_{F_a} = a$  et  $f|_{F_b} = b$ .

Il est aussi important de noter que l'existence des fonctions d'Urysohn est nécessaire et suffisante pour qu'un espace  $(X, \mathcal{T})$  soit normal. Ce fait est laissé comme exercice.

Nous étudions maintenant une généralisation du lemme d'Urysohn, à savoir le théorème d'extension de Tietze<sup>j</sup>.

**Théorème 2.5.2** (Tietze). *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique normal. Pour tout fermé  $F$  et toute fonction continue  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une fonction continue  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g|_F = f$ .*

**Lemme 2.5.1.** *Pour tout  $a > 0$ ,  $\mathbb{R}$  est homéomorphe à  $] - a, a[$ .*

*Démonstration.* On peut considérer par exemple l'homéomorphisme

$$\varphi^{-1} : ] - a, a[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right),$$

dont l'inverse applique  $y$  sur  $\frac{2a}{\pi} \arctan(y)$ . □

**Lemme 2.5.2** (Convergence uniforme). *Si  $(f_m | m \in \mathbb{N})$  est une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , uniformément de Cauchy, i.e.*

$$\sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)| \rightarrow 0, \quad \text{si} \quad \inf\{p, q\} \rightarrow \infty,$$

*alors pour tout  $x \in X$ , la suite  $f_m(x)$  converge vers  $f(x)$  et la fonction  $f$  ainsi définie est continue.*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in X$ , la suite  $f_m(x)$  est une suite réelle de Cauchy, puisque

$$0 \leq |f_p(x) - f_q(x)| \leq \sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)|.$$

Puisque  $\mathbb{R}$  est complet, la suite  $f_m(x)$  converge vers un nombre, noté  $f(x)$ . Montrons que la fonction  $f$  est continue. Soient un intervalle  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  et  $x_0 \in f^{-1}(]a, b[)$ . Montrons qu'il existe  $\omega \in \mathcal{T}$  tel que  $x_0 \in \omega \subset f^{-1}(]a, b[)$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(x_0) \in ]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$ <sup>k</sup>. Par hypothèse, il existe ensuite  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sup_{y \in X} |f_p(y) - f_q(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si} \quad p, q \geq N.$$

j. H. Tietze (1880-1964), mathématicien autrichien.

k. On se donne une petite marge, pour pouvoir utiliser les hypothèses de convergence, comme d'habitude.

Fixons alors  $q = N$ . Pour tout  $y \in X$ , la suite  $f_m(y)$  est dans la boule de rayon  $\varepsilon/2$  et de centre  $f_N(y)$  pour  $m \geq p$ . Donc sa limite est dans la boule fermée :

$$\sup_{y \in X} |f(y) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Ceci implique directement que  $f_N(x_0)$  est dans  $]a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2[$ .

L'ouvert  $\omega = f_N^{-1}(]a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2[)$  contient donc  $x_0$ . Il est également inclus dans  $f^{-1}(]a, b[)$ , puisqu'on a, pour tout  $x$  dans  $\omega$ ,  $f_N(x) \in ]a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2[$  et  $|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon/2$ .  $\square$

**Lemme 2.5.3.** *Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace normal,  $F$  un fermé, et  $a > 0$ . Pour toute fonction continue  $f : F \rightarrow [-a, a]$ , il existe une fonction continue  $g : X \rightarrow [-a/3, a/3]$  telle que*

$$\sup_{x \in F} |f(x) - g(x)| \leq \frac{2a}{3}.$$

Ce lemme est la clef pour le théorème de Tietze. L'intérêt est que la fonction  $g$  est continue sur  $X$ . Si elle ne coïncide pas avec  $f$  sur  $F$ , la "marge d'erreur" est maîtrisée par la dernière inégalité.

*Démonstration.* L'idée est de découper l'intervalle  $[-a, a]$  en trois parties, à savoir  $A_1 = [-a, -a/3]$ ,  $A_2 = ]-a/3, a/3[$  et  $A_3 = [a/3, a]$ . On définit ensuite une fonction continue  $g$  satisfaisant les conditions

$$g(x) \in [-a/3, a/3], \quad g(x) = -a/3 \text{ si } f(x) \in A_1, \quad \text{et} \quad g(x) = a/3 \text{ si } f(x) \in A_3.$$

Ces conditions impliquent directement l'inégalité demandée.

Une telle fonction existe en vertu du lemme d'Urysohn : les ensembles  $F_1 = f^{-1}(A_1)$  et  $F_3 = f^{-1}(A_3)$  sont fermés de  $F$  car  $f$  est continue. Donc ils sont fermés dans  $X$  et évidemment disjoints (car  $a > 0$ ). Il existe donc une fonction continue  $g : X \rightarrow [-a/3, a/3]$  qui vaut  $-a/3$  sur  $F_1$  et  $a/3$  sur  $F_3$ .  $\square$

*Preuve du théorème de Tietze.* Traitons d'abord le cas particulier où la fonction  $f$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ . On utilise le Lemme 2.5.3 pour  $f$  et avec  $a = 1$  : il existe une fonction  $f_1 : X \rightarrow [-1/3, 1/3]$ , continue, et telle que  $(f - f_1)(F) \subset [-2/3, 2/3]$ . On utilise le même lemme avec la fonction  $f - f_1$  continue sur  $F$  et  $a = 2/3$  : il existe une fonction  $f_2 : X \rightarrow [-2/9, 2/9]$ , continue, et telle que  $(f - f_1 - f_2)(F) \subset [-4/9, 4/9]$ . On construit par induction une suite  $f_m$  de fonctions continues sur  $X$  et telles que

$$f_m(X) \subset \left[-\frac{2^{m-1}}{3^m}, \frac{2^{m-1}}{3^m}\right] \quad \text{et} \quad \sup_{x \in F} |f(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^m. \quad (2.3)$$

Nous allons appliquer le lemme 2.5.2 à la suite de fonctions continues  $g_m = \sum_{k=1}^m f_k$ . Cette suite convergera alors vers la fonction continue  $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ , qui coïncidera avec  $f$  sur  $F$ , au vu de l'inégalité dans (2.3). Pour appliquer le lemme 2.5.2, on a, pour  $p > q$  et  $x$  dans  $X$ ,

$$|g_p(x) - g_q(x)| = \left| \sum_{k=q+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=q+1}^p \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

donc  $\sup_{x \in X} |g_p(x) - g_q(x)|$  tend vers 0 quand  $\inf\{p, q\}$  tend vers l'infini, en vertu de la convergence de la série géométrique de raison  $2/3$ .

Traitons maintenant le cas général<sup>1</sup>.

Pour une fonction  $f$  quelconque,  $\varphi \circ f$  est à valeurs dans  $] -1, 1[ \subset [-1, 1]$ , où  $\varphi$  est défini par le lemme 2.5.1. Nous venons de montrer l'existence de  $g'$  continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g'|_F = \varphi \circ f$ .

Soit alors  $F' = g'^{-1}(\mathbb{R} \setminus ] -1, 1[)$ . C'est un fermé de  $X$ , disjoint de  $F$  car sur  $F$ ,  $g' = \varphi \circ f$  est à valeurs dans  $] -1, 1[$ . Par le lemme d'Urysohn, il existe une fonction  $h : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $h|_F = 1$  et  $h|_{F'} = 0$ . La fonction  $hg'$  est maintenant à valeurs dans  $] -1, 1[$ , est continue et coïncide avec  $\varphi \circ f$  sur  $F$ . Une fonction  $g$  cherchée est alors donnée par  $\varphi^{-1} \circ (hg')$ .  $\square$

### 2.5.1 Exercices

1. Démontrer que le lemme d'Urysohn fournit une condition nécessaire et suffisante de normalité.
2. Démontrer que le théorème de Tietze implique le lemme d'Urysohn.
3. Démontrer que le théorème de Tietze fournit une condition nécessaire et suffisante de normalité.

## 2.6 Recouvrements et partitions de l'unité

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence de partitions continues de l'unité, subordonnées à des recouvrements et sous certaines conditions. Rappelons la définition des partitions de l'unité.

**Définition 2.6.1.** Une partition de l'unité d'un ensemble  $X$  est une famille de fonctions  $(f_\alpha, \alpha \in A)$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

1. Pour tout  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha$  est une fonction non-négative ;
2. Pour tout  $x \in X$ ,  $f_\alpha(x)$  est nul sauf pour un nombre fini d'indices ;
3. On a  $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$  pour tout  $x \in X$ .

Rappelons que si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique, le support  $\text{supp} f$  d'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels cette fonction n'est pas nulle. On peut alors raffiner la définition précédente.

**Définition 2.6.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une famille de fonctions  $(f_\alpha, \alpha \in A)$  est une partition continue de l'unité si chaque fonction  $f_\alpha$  est continue. Si  $\mathcal{O}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{O}$  est une partition de l'unité  $(f_\omega, \omega \in \mathcal{O})$  telle que pour tout  $\omega \in \mathcal{O}$ , on a  $\text{supp} f_\omega \subset \omega$ .

L'existence d'une partition continue de l'unité subordonnée à un recouvrement permet de décomposer par exemple les fonctions continues sur  $X$  en sommes (éventuellement infinies, certes) de fonctions continues avec un support prescrit, puisqu'on a  $f = \sum_{\omega \in \mathcal{O}} f f_\omega$ .

**Exemple 2.6.1.** Soit  $X = \mathbb{R}$ , muni de la topologie euclidienne. Soit le recouvrement  $\mathcal{O} = \{\omega_n = ]n - 1/4, n + 5/4[ : n \in \mathbb{Z}\}$ . Si on a une partition continue de l'unité subordonnée à  $\mathcal{O}$ , toute fonction continue  $f$  s'écrit comme une série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$  où  $f_n$  est continue et à support dans  $\omega_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

---

1. L'idée est la suivante : pour tout  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ , on applique le cas précédent à  $\varphi \circ f : X \rightarrow ] -1, 1[$ , (voir 2.5.1) pour trouver une fonction continue  $g'$  telle que  $g'|_F = \varphi \circ f$ . Alors  $g = \varphi^{-1} \circ g'$  est continue et coïncide avec  $f$  sur  $F$ . Le problème est que  $\varphi^{-1}$  n'est défini que sur  $] -1, 1[$ . Il faut donc "recouper" la fonction  $g'$  sans la changer sur  $F$ .

m. La somme est bien définie, en vertu de la deuxième condition, même si  $A$  est non dénombrable.

Passons maintenant aux conditions que l'on peut imposer aux recouvrements pour obtenir l'existence de partitions.

**Définition 2.6.3.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $\mathcal{A}$  de  $2^X$  est ponctuellement finie si tout point  $x \in X$  appartient au plus à un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Une partie  $\mathcal{A}$  est localement finie si tout point  $x \in X$  a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{A}$ .<sup>n</sup>

Par exemple, le recouvrement de l'exemple 2.6.1 est ponctuellement et même localement fini. Par contre, le recouvrement  $\{]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[ : n \in \mathbb{N}_0\}$  de  $] -1, 1[$  n'est pas ponctuellement fini.

**Exercice 2.6.1.** Montrer que toute partie localement finie est ponctuellement finie.

Le résultat qui suit est fondamental pour notre propos.

**Proposition 2.6.1.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique normal. Pour tout recouvrement ouvert ponctuellement fini  $\mathcal{O}$  de  $X$ , il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{O}' = \{\omega_A : A \in \mathcal{O}\}$  tel que  $\bar{\omega}_A \subset A$  pour tout  $A \in \mathcal{O}$ .

*Démonstration.* Nous démontrons ce résultat en plusieurs étapes. Certaines ne sont pas strictement nécessaires (les étapes (b) et (c)) mais peuvent aider à la compréhension du cas général.

- (a) **On peut remplacer un seul ouvert de  $\mathcal{O}$ .** Puisque  $\mathcal{O}$  est un recouvrement, pour tout  $A \in \mathcal{O}$  on a  $X \setminus \cup_{\omega \in \mathcal{O} \setminus \{A\}} \omega \subset A$ .<sup>o</sup> Par normalité, il existe un ouvert  $\omega_A$  tel que

$$X \setminus \cup_{\omega \in \mathcal{O} \setminus \{A\}} \omega \subset \omega_A \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_A \subset A.$$

La première inclusion montre que  $\mathcal{O}'' = \mathcal{O} \cup \{\omega_A\} \setminus \{A\}$  est bien un recouvrement.

- (b) **Le cas fini  $\mathcal{O} = \{A_1, \dots, A_n\}$ .** En appliquant le point précédent, on peut remplacer  $A_1$  par  $\omega_{A_1}$  et obtenir un recouvrement  $\mathcal{O}''_1$ . On fait de même avec  $A_2$  dans ce nouveau recouvrement et ainsi de suite jusque  $A_n$ . A chaque étape, on conserve un recouvrement

$$\mathcal{O}''_p = \{\omega_{A_1}, \dots, \omega_{A_p}, A_{p+1}, \dots, A_n\}$$

et donc  $\mathcal{O}''_n$  est un recouvrement adéquat.

- (c) **Le cas dénombrable  $\mathcal{O} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ .** On procède comme pour le cas précédent en construisant successivement des recouvrements

$$\mathcal{O}''_p = \{\omega_{A_1}, \dots, \omega_{A_p}\} \cup \{A_n : n \geq p + 1\} \tag{2.4}$$

pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , en assurant  $\omega_{A_k} \subset A_k$  pour tout  $k$ . Dans ce cas cependant, il n'y a pas de dernier recouvrement, et il faut donc passer à la limite et prouver que

$$\mathcal{O}' = \{\omega_{A_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

est encore un recouvrement. Si tel n'était pas le cas, il existerait un point  $x \in X \setminus \cup_{k \in \mathbb{N}} \omega_{A_k}$ . Par (2.4),  $x$  appartiendrait à  $\cup_{n=p+1}^{\infty} A_n$ , pour tout  $p$ , ce qui est impossible car  $\mathcal{O}$  est ponctuellement fini.

n. On peut évidemment demander que ce voisinage soit ouvert.

o. C'est-à-dire, ce qui n'est pas recouvert par les autres ouverts de  $\mathcal{O}$  est recouvert par  $A$ .

Pour passer au cas général, réécrivons quelque peu le cas dénombrable. En (2.4), on a en fait construit une application  $\varphi_p : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{T}$  définie par

$$\varphi_p(A_i) = \begin{cases} \omega_{A_i} & \text{si } i \leq p \\ A_i & \text{si } i > p. \end{cases}$$

Cette application satisfait les conditions suivantes :  $\varphi_p(\mathcal{O})$  est un recouvrement pour tout  $p$  et  $\varphi_p(A) = A$  ou  $\overline{\varphi_p(A)} \subset A$ , pour tout  $A$  dans  $\mathcal{O}$ . De plus, pour tout  $p$ ,  $\varphi_{p+1}$  prolonge  $\varphi_p$  en ce sens que les ouverts déjà modifiés par  $\varphi_p$  le sont de la même manière par  $\varphi_{p+1}$ . La solution est alors donnée par un certain passage à la limite. Dans le cas général, nous ferons de même, mais nous définirons un ordre donné par le processus de prolongation d'une telle fonction et remplacerons la limite du cas précédent par l'existence d'un élément maximal, fournie, comme de coutume, par une application du lemme de Zorn.

- (d) **Le cas général.** Soit  $\Phi$  l'ensemble des applications  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{T}$  telles que
- $\Phi(\mathcal{O})$  est un recouvrement de  $X$  ;
  - on a  $\varphi(A) = A$  ou  $\varphi(A) \subset A^p$  ;
- Pour tout  $\varphi \in \Phi$ , définissons le domaine de  $\varphi$  par

$$D_\varphi = \{A \in \mathcal{O} : \varphi(A) \neq A\},$$

et munissons  $\Phi$  de l'ordre défini par  $\varphi \leq \psi$  si, et seulement si,  $\psi$  prolonge  $\varphi$ , c'est-à-dire

$$D_\varphi \subset D_\psi \quad \text{et} \quad \psi(A) = \varphi(A) \quad \text{pour tout} \quad A \in D_\varphi.$$

On vérifie directement que  $\leq$  est un ordre sur  $\Phi$  et que ce dernier est non vide. Montrons ensuite que  $(\Phi, \leq)$  est inductif. Si  $\Lambda$  est une chaîne de  $\Phi$ , on peut définir un majorant  $\theta$  de la manière habituelle, à savoir en posant

$$D_\theta = \cup_{\varphi \in \Lambda} D_\varphi \quad \text{et} \quad \theta(A) = \varphi(A) \text{ si } A \in D_\varphi.$$

D'une part, l'application  $\theta$  est bien définie, car si  $A$  est dans  $D_\varphi$  et  $D_{\varphi'}$  alors par exemple  $\varphi \leq \varphi'$  et on a  $\varphi(A) = \varphi'(A)$ . D'autre part,  $\theta$  majore  $\Lambda$  par définition. Il reste à montrer que  $\theta$  est un élément de  $\Phi$ .

Il est clair que si  $\theta(A) \neq A$ , alors  $A$  est dans  $D_\varphi$  pour un  $\varphi$  dans  $\Lambda$  et on a nécessairement  $\theta(A) = \varphi(A) \subset A$ .

Enfin,  $\theta(\mathcal{O})$  est un recouvrement. En effet, pour tout  $x \in X$ , il existe un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{O}$ , notons les  $\{A_1, \dots, A_p\}$ , tels que  $x \in \cap_{i=1}^p A_i$  et  $x \notin A$  si  $A \in \mathcal{O} \setminus \{A_1, \dots, A_p\}$ . On a alors deux cas possibles.

Si il existe  $i \leq p$  tel que  $\theta(A_i) = A_i$ , alors  $x$  est recouvert par  $\theta(A_i)$ .

Sinon, pour tout  $i \leq p$ ,  $A_i$  est dans  $D_\theta$ , et il existe  $\varphi_i \in \Lambda$  tel que  $A_i$  soit dans  $D_{\varphi_i}$ . Soit alors  $\psi = \max\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ . On a alors  $A_i \in D_\psi$  et  $\psi(A_i) = \theta(A_i)$  pour tout  $i$ . Puisque  $\psi$  est un élément de  $\Lambda$ ,  $\psi(\mathcal{O})$  est un recouvrement : il existe  $A \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \psi(A)$ . Mais si  $A \notin \{A_1, \dots, A_p\}$ ,  $x$  n'est pas dans  $A$ , donc pas dans  $\psi(A)$ . Ainsi, il existe  $i \leq p$  tel que  $x \in \psi(A_i) = \theta(A_i)$ , et  $x$  est recouvert par  $\theta(\mathcal{O})$ .

D'après le lemme de Zorn,  $\Phi$  contient un élément maximal  $\varphi_0$ . On sait que  $\varphi_0(\mathcal{O})$  est un recouvrement. Montrons que  $\overline{\varphi_0(A)} \subset A$  pour tout  $A \in \mathcal{O}$ . Si ce n'est pas le cas, il existe  $A_0 \in \mathcal{O}$  tel que  $\varphi_0(A_0) \not\subset A_0$ . On a donc  $\varphi_0(A_0) = A_0$  et  $\overline{A_0} \not\subset A_0$ . Par le point (a), on peut alors trouver  $\omega_{A_0} \in \mathcal{T}$  tel que  $\overline{\omega_{A_0}} \subset A_0$  et  $\varphi_0(\mathcal{O}) \cup \{\omega_{A_0}\} \setminus \{A_0\}$  soit un recouvrement. On peut alors définir  $\varphi'_0$  en prolongeant  $\varphi_0$  par  $\varphi'_0(A_0) = \omega_{A_0}$ . C'est un élément de  $\Phi$  qui majore strictement  $\varphi_0$  puisque  $\omega_{A_0} \neq A_0$ , ce qui est absurde.

Le recouvrement  $\varphi_0(\mathcal{O})$  vérifie donc les conditions de l'énoncé.

p. Notez que ces deux conditions ne sont pas exclusives.

□

Venons en maintenant au résultat principal de cette section.

**Théorème 2.6.1.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique normal, à tout recouvrement ouvert localement fini  $\mathcal{O}$  est subordonnée une partition continue de l'unité.*

*Démonstration.* Utilisons la proposition précédente pour construire un recouvrement  $\mathcal{O}' = \{B_A : A \in \mathcal{O}\}$  tel que  $\overline{B_A} \subset A$  pour tout  $A \in \mathcal{O}$ . Vu cette condition, le recouvrement  $\mathcal{O}'$  est également localement fini et on peut construire un recouvrement  $\mathcal{O}'' = \{C_A : A \in \mathcal{O}\}$  tel que  $\overline{C_A} \subset B_A$  pour tout  $A \in \mathcal{O}$ . Par le lemme d'Urysohn, il existe pour tout  $A \in \mathcal{O}$  une fonction  $f_A$  continue de  $X$  dans  $[0, 1]$  telle que  $f_A|_{\overline{C_A}} = 1$  et  $f_A|_{X \setminus B_A} = 0$ . Cette dernière condition donne  $\text{supp} f_A \subset \overline{B_A} \subset A$ . La première permet de montrer que la fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \sum_{A \in \mathcal{O}} f_A(x)$$

est strictement positive. Encore faut-il qu'elle soit bien définie et continue. C'est le cas, puisque, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe un ouvert  $\omega$  contenant  $x_0$  et qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments  $A \in \mathcal{O}$ , disons  $\{A_1, \dots, A_p\}$ . Alors sur  $\omega$ , on a  $g = \sum_{i=1}^p f_{A_i}$ , qui est bien définie, mais aussi continue.

Alors la famille de fonctions  $\{g_A : A \in \mathcal{O}\}$  où  $g_A = f_A/g$ , est une partition continue de l'unité de  $X$ , subordonnée à  $\mathcal{O}$ . □

## Chapitre 3

# Compacts et compagnie

Dans ce chapitre, nous allons étudier des propriétés des espaces topologiques liées à la compacité. Nous étudierons d'abord les espaces compacts eux-mêmes, bien entendu. Puis nous verrons les espaces localement compacts qui conservent certaines propriétés des espaces compacts et les compactifications, qui fournissent un moyen de plonger tout espace topologique dans un compact.

### 3.1 Espaces compacts

Donnons tout de suite la définition des espaces compacts. Elle a la même forme que celle des espaces de Lindelöf, que nous avons déjà rencontrés (contrairement à l'évolution historique de ces notions).

**Définition 3.1.1.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est compact si tout recouvrement ouvert de  $X$  contient un recouvrement fini.<sup>a</sup>

En passant au complémentaire, un recouvrement ouvert correspond à une famille de fermés d'intersection vide. Ce fait, ainsi qu'un passage à la contraposée, permet de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 3.1.1.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (0)  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique compact ;
- (1) Toute famille de fermés  $\mathcal{F}$  d'intersection vide contient une sous-famille  $\mathcal{F}'$  d'intersection vide ;
- (2) Si  $\mathcal{F}$  est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide, alors  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ .

On peut étendre la définition d'espace compact à des sous-ensembles.

**Définition 3.1.2.** Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est compact si  $(Y, \mathcal{T}_X)$  est compact.

Remarquons qu'il est parfois utile de traduire cette propriété en utilisant des ouverts de  $(X, \mathcal{T})$  plutôt que des ouverts de  $(Y, \mathcal{T}_X)$ . Un ouvert de  $Y$  étant la trace dans  $Y$  d'un ouvert de  $X$ , tout recouvrement ouvert de  $Y$  est induit par un ensemble  $\mathcal{O}$  d'ouverts de  $X$  tels que  $Y \subset \bigcup_{\Omega \in \mathcal{O}} \Omega$  ; nous appellerons une telle famille un recouvrement de  $Y$  par des ouverts de  $X$ . Inversement, tout recouvrement  $\mathcal{O}$  de  $Y$  par des ouverts de  $X$  induit naturellement un recouvrement de  $Y$  par des ouverts de  $\mathcal{T}_X$ . On a donc la caractérisation suivante.

---

a. On écrit souvent :  $X$  est compact si de tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un recouvrement fini. Il ne faut pas confondre cette propriété avec le fait que  $X$  admette un recouvrement ouvert fini, ce qui est toujours le cas.



**Proposition 3.1.2.** *Un sous-ensemble  $Y$  d'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est compact si, et seulement si, tout recouvrement de  $Y$  par des ouverts de  $X$  contient un recouvrement fini de  $Y$ .*

**Exemple 3.1.1.** Dans tout espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ , les singletons, et plus généralement les sous-ensembles finis, sont compacts.

Passons maintenant en revue les propriétés élémentaires des compacts. La première est fondamentale et permet de démontrer formellement que la notion de compacité est une notion topologique.

**Proposition 3.1.3.** *Toute image continue d'un compact est un compact.*

*Démonstration.* La preuve est directe. Soient en effet  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique compact,  $(Y, \mathcal{T}')$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Soit  $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$  un recouvrement de  $f(X)$  par des ouverts de  $Y$ . Puisque  $f$  est continue, les ensembles  $f^{-1}(\Omega_\alpha)$  sont des ouverts de  $X$  et  $\{f^{-1}(\Omega_\alpha) : \alpha \in A\}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ . Il contient un recouvrement fini : il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$  tels que  $X = f^{-1}(\Omega_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(\Omega_{\alpha_p})$ . On a alors visiblement  $f(X) \subset \Omega_{\alpha_1} \cup \dots \cup \Omega_{\alpha_p}$ .  $\square$

Analysons maintenant les liens entre les compacts et les fermés.

**Proposition 3.1.4.**

1. *Si  $(X, \mathcal{T})$  est compact, tout sous-ensemble fermé  $F$  de  $X$  est compact ;*
2. *Si  $(X, \mathcal{T})$  est séparé, tout sous-ensemble compact de  $X$  est fermé.*

*Démonstration.* Pour la première partie, on considère un recouvrement  $\mathcal{O}$  de  $F$  par des ouverts de  $X$ . Alors  $\mathcal{O} \cup \{X \setminus F\}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ . Il contient donc un recouvrement fini : il existe un sous-ensemble fini  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\}$  de  $\mathcal{O} \cup \{X \setminus F\}$  qui est un recouvrement de  $X$ . Puisque  $X \setminus F$  ne contribue pas à recouvrir  $F$ ,  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\} \cap \mathcal{O}$  est un recouvrement fini de  $F$  par des éléments de  $\mathcal{O}$ .

Pour la seconde partie, considérons un compact  $K$  de  $X$  et  $x \notin K$ . Pour tout  $y \in K$ , il existe des ouverts  $\omega_y$  et  $\Omega_y$  de  $X$  tels que

$$x \in \Omega_y, \quad y \in \omega_y \quad \text{et} \quad \Omega_y \cap \omega_y = \emptyset.$$

L'idée est alors de considérer les ensembles  $\omega = \bigcup_{y \in K} \omega_y$  et  $\Omega = \bigcap_{y \in K} \Omega_y$  qui sont disjoints, pour trouver des voisinages disjoints de  $K$  et  $x$ . Mais  $\bigcap_{y \in K} \Omega_y$  n'a aucune raison d'être ouvert. On utilise alors la compacité pour se ramener à une intersection finie : puisque  $K \subset \bigcup_{y \in K} \omega_y$ , il existe  $y_1, \dots, y_p \in K$  tels que  $K \subset \bigcup_{i \leq p} \omega_{y_i}$ . On pose alors  $\omega' = \bigcup_{i \leq p} \omega_{y_i}$  et  $\Omega' = \bigcap_{i \leq p} \Omega_{y_i}$  et on a

$$x \in \Omega' \subset X \setminus K,$$

ce qui prouve que  $X \setminus K$  est ouvert.  $\square$

Puisque dans de nombreux cas, les sous-ensembles compacts sont exactement les sous-ensembles fermés, il est naturel qu'ils aient les mêmes propriétés vis-à-vis des unions et intersections.

**Proposition 3.1.5.**

1. *Toute union finie de sous-ensembles compacts est un compact ;*

b. Nous avons en fait montré plus, à savoir que dans un espace séparé, un compact et un singleton disjoints ont des voisinages disjoints.

2. Si  $(X, \mathcal{T})$  est séparé, toute intersection<sup>c</sup> de compacts est un compact.

*Démonstration.* La première partie est directe. En effet, si  $K_1, \dots, K_n$  sont compacts dans  $X$ , et si  $\mathcal{O}$  est un recouvrement de  $K_1 \cup \dots \cup K_n$  par des ouverts de  $X$ , il existe pour tout  $i \leq n$  un sous-ensemble fini  $\{\Omega_{i,j}, j \leq n_i\}$  de  $\mathcal{O}$  tel que  $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} \Omega_{i,j}$ . On a alors  $\bigcup_{i=1}^n K_i \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_i} \Omega_{i,j}$ .

Pour la deuxième partie, on note que si  $\mathcal{F}$  est une famille (non vide) de compacts, les éléments de  $\mathcal{F}$  sont également fermés, donc il en est de même pour l'intersection  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ , qui est incluse dans  $F_0$  pour un  $F_0 \in \mathcal{F}$  et est donc compacte.  $\square$

Le prochain résultat aide à démontrer qu'une bijection entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme.

**Proposition 3.1.6.** *Toute bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* Soient  $(X, \mathcal{T})$  compact et  $(Y, \mathcal{T}')$  séparé. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une bijection continue. Montrons que  $f^{-1}$  est continue. Pour tout fermé  $F$  de  $X$ , on a  $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ . Puisque  $F$  est fermé dans un compact, il est lui-même compact, donc  $f(F)$  est compact dans  $Y$  qui est séparé, donc il est fermé.  $\square$

### 3.1.1 Compacité et séparation

Dans les espaces compacts, les propriétés de séparation sont automatiquement renforcées, comme le montrent les deux résultats qui suivent.

**Proposition 3.1.7.** 1. *Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est séparé si, et seulement si, deux compacts disjoints ont des voisinages disjoints.*

2. *Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est régulier si, et seulement si, deux ensembles disjoints dont l'un est compact et l'autre fermé ont des voisinages disjoints*

*Démonstration.* Les conditions sont suffisantes, puisque les singletons sont compacts, quelle que soit la topologie. Démontrons qu'elles sont nécessaires. Pour la première, nous avons déjà démontré qu'un compact et un singleton disjoints ont des voisinages disjoints (voir la note b en bas de la page 56). Soient alors  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts disjoints. Pour tout  $x \in K_1$ , il existe des ouverts  $\omega_x$  et  $\Omega_x$  tels que

$$x \in \omega_x, \quad K_2 \subset \Omega_x \quad \text{et} \quad \omega_x \cap \Omega_x = \emptyset.$$

On a donc  $K_1 \subset \bigcup_{x \in K_1} \omega_x$ . Il existe donc  $x_1, \dots, x_p$  tels que  $K_1 \subset \bigcup_{i \leq p} \omega_{x_i} = \omega$ . On a aussi  $K_2 \subset \bigcap_{i \leq p} \Omega_{x_i} = \Omega$  et visiblement  $\Omega \cap \omega = \emptyset$ .

On démontre la deuxième partie de la même façon en échangeant les rôles du compact  $K_1$  et du fermé  $F$  de l'énoncé.  $\square$

**Proposition 3.1.8.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique.*

1. *Si  $(X, \mathcal{T})$  est compact et séparé, il est régulier ;*
2. *Si  $(X, \mathcal{T})$  est compact et régulier, il est normal.*

*Démonstration.* Soient  $F$  un fermé et  $x \notin F$ . Puisque  $(X, \mathcal{T})$  est compact,  $F$  est compact. D'après la proposition précédente,  $\{x\}$  et  $F$  ont des voisinages disjoints.

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont des fermés disjoints,  $F_1$  est compact et  $F_2$  fermé, ils ont donc des voisinages disjoints, par la proposition précédente.  $\square$

c. Il s'agit d'une intersection non triviale.

### 3.1.2 Sous-espaces, quotients et produits de compacts

Analysons les liens de la compacité avec les constructions d'espaces topologiques, telles que les sous-espaces, quotients et produits. Il n'y a aucune raison qu'un sous-espace quelconque d'un compact soit compact. Nous avons démontré que c'est vrai pour les sous-espaces fermés. Pour les quotients, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 3.1.9.** *Tout quotient d'un espace topologique compact est compact.*

*Démonstration.* Exercice. □

Le cas des produits d'espaces compacts est réglé par le théorème de Tychonoff. La démonstration que nous allons voir repose sur le théorème d'Alexander, qui a son intérêt propre. Il permet en effet, pour démontrer qu'un espace est compact, de se limiter à des recouvrements de cet espace par des ouverts particuliers.

**Théorème 3.1.1** (Alexander<sup>d</sup>). *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Si  $\mathcal{A}$  engendre  $\mathcal{T}$ , alors  $(X, \mathcal{T})$  est compact si, et seulement si, tout recouvrement ouvert par des éléments de  $\mathcal{A}$  contient un recouvrement fini.*

*Démonstration.* La condition est nécessaire puisque  $\mathcal{A}$  est une partie de  $\mathcal{T}$ . Prouvons maintenant qu'elle est suffisante. La preuve se divise en quelques étapes.

- (0) **Reformulation.** Notons  $\Phi$  l'ensemble des parties de  $\mathcal{T}$  qui ne contiennent pas de recouvrement fini. Il est clair que si  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$  n'est pas un recouvrement de  $X$ , alors  $\mathcal{U}$  appartient à  $\Phi$ . Par contraposition de la définition de compacité, on voit que  $(X, \mathcal{T})$  est compact si  $\Phi$  ne contient aucun recouvrement de  $X$ .
- (1) **Lemme de Zorn.** Montrons que  $\Phi$  est non vide, ordonné et inductif.
  - (a)  $\Phi$  contient  $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$  car  $\mathcal{U}$  n'est pas un recouvrement de  $X$ <sup>e</sup>;
  - (b) L'inclusion fournit un ordre sur  $\Phi$ ;
  - (c)  $\Phi$  est inductif : soit  $\Lambda$  une chaîne de  $\Phi$ . Définissons  $\mathcal{U}_0 = \cup_{\mathcal{U} \in \Lambda} \mathcal{U}$ . Il est évident que  $\mathcal{U}_0$  majore  $\Lambda$ . Montrons que  $\mathcal{U}_0$  est un élément de  $\Phi$ . Si ce n'est pas le cas,  $\mathcal{U}_0$  contient un recouvrement fini  $\{\omega_1, \dots, \omega_p\}$  de  $X$ . Pour tout  $i \leq p$ , il existe  $\mathcal{U}_i \in \Lambda$  tel que  $\omega_i \in \mathcal{U}_i$ . Alors  $\{\omega_1, \dots, \omega_p\} \subset \max\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p\}$ , qui contient un recouvrement fini, tout en étant dans  $\Phi$ , ce qui est contraire à la définition de  $\Phi$ .
- (2) **Par l'absurde...** Supposons que  $\Phi$  contient un recouvrement  $\mathcal{O}'$ . Alors  $\mathcal{O}'$  est majoré par un élément maximal  $\mathcal{O}^f$ , qui est lui même un recouvrement. Nous allons montrer que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}$  est aussi un recouvrement, ce qui conduira à une absurdité, puisque, d'une part étant un recouvrement par des éléments de  $\mathcal{A}$ , il devra contenir un recouvrement fini, et d'autre part, étant une partie de  $\mathcal{O}$ , il ne peut contenir un recouvrement fini.
- (3) **Stabilité de  $\mathcal{T} \setminus \mathcal{O}$ .** L'ensemble  $\mathcal{T} \setminus \mathcal{O}$  est stable par intersections finies. En effet, si  $\omega_1, \omega_2$  sont dans  $\mathcal{T} \setminus \mathcal{O}$ , les ensembles  $\mathcal{O} \cup \{\omega_1\}$  et  $\mathcal{O} \cup \{\omega_2\}$  majorent strictement  $\mathcal{O}$ , donc ne sont pas dans  $\Phi$ . Il existe donc  $V_1, \dots, V_p, V'_1, \dots, V'_q$  dans  $\mathcal{O}$  tels que

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_p \cup \omega_1 = V'_1 \cup \dots \cup V'_q \cup \omega_2. \text{ }^g$$

On a donc  $X \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_p) \subset \omega_1$  et  $X \setminus (V'_1 \cup \dots \cup V'_q) \subset \omega_2$ , ce qui donne

$$X = V_1 \cup \dots \cup V_p \cup V'_1 \cup \dots \cup V'_q \cup (\omega_1 \cap \omega_2).$$

d. James W. Alexander II, (1888-1971)

e. Sauf si  $X$  est vide, auquel cas il est compact et la preuve est finie.

f. C'est une application du lemme de Zorn à l'ensemble des éléments de  $\Phi$  supérieurs ou égaux à  $\mathcal{O}'$ .

g. Notez que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  doivent nécessairement apparaître sinon  $\mathcal{O}$  contiendrait un recouvrement fini.

Cela montre que  $\omega_1 \cap \omega_2$  n'est pas dans  $\mathcal{O}$ , sinon celui-ci contiendrait un recouvrement fini. On passe aux intersections finies par induction.

- (4)  $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}$  est un recouvrement. Soit  $x$  un point de  $X$ . Il existe  $\Omega \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \Omega$ , puisque  $\mathcal{O}$  est un recouvrement. Il existe ensuite  $\omega_1, \dots, \omega_p \in \mathcal{A}$  tels que  $x \in \omega_1 \cap \dots \cap \omega_p \subset \Omega$ . Si l'un de ces ensembles est aussi dans  $\mathcal{O}$ , alors  $x$  est recouvert par  $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}$ . Sinon, aucun de ces ensembles n'est dans  $\mathcal{O}$ , et par le point précédent,  $\omega_1 \cap \dots \cap \omega_p$  non plus. Donc  $\mathcal{O} \cup \{\omega_1 \cap \dots \cap \omega_p\}$  majore  $\mathcal{O}$  strictement et il existe  $V_1'', \dots, V_r''$  dans  $\mathcal{O}$  tels que

$$X = V_1'' \cup \dots \cup V_r'' \cup (\omega_1 \cap \dots \cap \omega_p).$$

On a alors

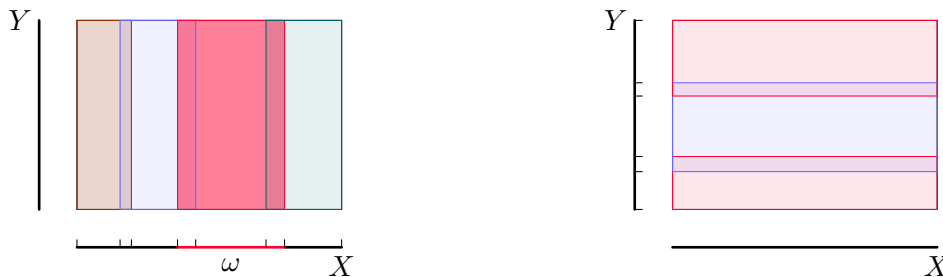
$$X = V_1'' \cup \dots \cup V_r'' \cup \Omega,$$

et  $\mathcal{O}$  contient un recouvrement fini, ce qui est absurde. □

Passons maintenant au théorème de Tychonoff sur les produits d'espaces compacts.

**Théorème 3.1.2** (Tychonoff<sup>h</sup>). *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

L'idée de la preuve est simple et se voit particulièrement sur un produit de deux espaces topologiques : si  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  sont deux espaces topologiques, la topologie produit est engendrée par  $\{\omega \times Y : \omega \in \mathcal{T}\} \cup \{X \times \omega' : \omega' \in \mathcal{T}'\}$ , qui sont représentés ci-après.



On considère un recouvrement  $\mathcal{O}$  par de tels ouverts. Soient les  $\omega$  correspondants recouvrent  $X$ , soient les  $\omega'$  recouvrent  $Y$ , auquel cas on trouve un recouvrement fini. Sinon, il y a un point du produit qui n'est pas recouvert par  $\mathcal{O}$ .

*Démonstration.* Soit une famille d'espaces topologiques  $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ . La topologie produit est engendrée par  $\mathcal{A} = \{p_\alpha^{-1}(\omega) : \alpha \in A, \omega \in \mathcal{T}_\alpha\}$ . Soit  $\mathcal{O}$  un recouvrement de  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  par des éléments de  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $\alpha \in A$ , définissons

$$\mathcal{O}_\alpha = \{\omega \in \mathcal{T}_\alpha : p_\alpha^{-1}(\omega) \in \mathcal{O}\}.$$

S'il existe  $\alpha \in A$  tel que  $\mathcal{O}_\alpha$  soit un recouvrement de  $X_\alpha$ , il contient un recouvrement fini  $\omega_1, \dots, \omega_p$  et les ouverts  $p_\alpha^{-1}(\omega_1), \dots, p_\alpha^{-1}(\omega_p)$  sont dans  $\mathcal{O}$  par définition de  $\mathcal{O}_\alpha$  et recouvrent  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ .

Dans le cas contraire, pour tout  $\alpha \in A$ , il existe  $x_\alpha \in X_\alpha \setminus \cup_{\omega \in \mathcal{O}_\alpha} \omega$ . Alors le point  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  ne peut être recouvert par aucun élément de  $\mathcal{O}$ , ce qui est absurde. □

h. A. N. Tychonoff (1906-1993)

## 3.2 Espaces localement compacts

De nombreux espaces topologiques que l'on rencontre dans les applications de la topologie ne sont pas compacts, mais ont une propriété plus faible, la compacité locale.

**Définition 3.2.1.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact si tout point de  $X$  a un voisinage compact.

A titre d'exemple, donnons comme d'habitude l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , où une boule fermée centrée sur  $x$  fournit un voisinage compact de  $X$ . Evidemment, tout espace compact  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact, puisque  $X$  est voisinage de chacun de ses points. De même, tout espace topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (tout point a un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) est localement compact. C'est notamment le cas des variétés de la géométrie différentielle. A titre de contre exemple, le lecteur pourra démontrer que la droite de Sorgenfrey (voir exercice 5 page 38, ou l'exemple 2.3.3 page 42) n'est pas localement compacte.

Comme la compacité, la compacité locale permet de renforcer les propriétés de séparation.

**Proposition 3.2.1.** *Tout espace localement compact et séparé est régulier. Dans tout espace localement compact et régulier, tout point admet une base de voisinages compacts et fermés.*

*Démonstration.* Soient  $(X, \mathcal{T})$  localement compact séparé,  $F$  un fermé de  $X$  et  $x \notin F$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $x$ . L'ensemble  $K \cap F$  est un fermé de  $K$ , donc un compact de  $K$ , donc un compact de  $X$ . Il existe donc des ouverts disjoints  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de  $X$  tels que  $x \in \omega_1$  et  $K \cap F \subset \omega_2$  (Proposition 3.1.7). Alors  $\omega_1 \cap K^\circ$  et  $\omega_2 \cup (X \setminus K)$  sont des voisinages disjoints de  $\{x\}$  et  $F$ .<sup>i</sup>

Soient  $(X, \mathcal{T})$  localement compact et régulier et  $x \in X$ . Ce point admet d'une part un voisinage compact  $K$  et d'autre part, une base de voisinages fermés  $\mathcal{B}$ . Alors  $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : B \subset K\}$  est une base de voisinages compacts fermés de  $x$ . Les éléments de  $\mathcal{B}'$  sont fermés et inclus dans  $K$ , donc compacts. Ce sont des voisinages, comme éléments de  $\mathcal{B}$ . Prouvons que  $\mathcal{B}'$  est une base de voisinages : Si  $V$  est un voisinage de  $x$ , alors  $V \cap K$  aussi et il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $B \subset V \cap K$ . Donc  $B$  est dans  $\mathcal{B}'$ , et est inclus dans  $V$ .  $\square$

A titre d'application, nous considérons le cas des espaces localement euclidiens.

**Définition 3.2.2.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est localement euclidien (de dimension  $n$ ) si pour tout point  $x \in X$ , il existe un ouvert  $\Omega$  contenant  $x$  et homéomorphe à un ouvert de  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ .

Puisque  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  est localement compact (cours d'analyse de première année, c'est le théorème de Heine-Borel : les boules fermées sont compactes), tout espace localement euclidien est localement compact. S'il est de plus séparé, il est régulier (proposition 3.2.1), et s'il est à base dénombrable, il est normal (proposition 2.4.7). Les variétés de la géométrie différentielle sont donc normales.

**Proposition 3.2.2.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace localement compact, alors  $X$  est une union dénombrable de compacts si, et seulement si,  $(X, \mathcal{T})$  est de Lindelöf.*

*Démonstration.* Toute union dénombrable de compacts est de Lindelöf. La preuve est analogue à celle de la proposition 3.1.5 sur les unions finies de compacts. Réciproquement, si  $X$  est localement compact, alors  $X$  est recouvert par les intérieurs de ses sous-ensembles compacts. On peut en extraire un recouvrement dénombrable  $(K_i^\circ : i \in \mathbb{N})$ . Donc  $X$  est aussi l'union de la famille  $(K_i : i \in \mathbb{N})$ .  $\square$

i. On peut aussi séparer  $x$  et  $K \cap F$  par des ouverts de  $K$ , obtenir des ouverts de  $X$  qui les séparent, et arriver à la même conclusion.

Le résultat suivant donne une version du lemme d'Urysohn pour les espaces localement compacts réguliers.

**Proposition 3.2.3.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact et régulier, alors tout compact inclus dans un ouvert a un voisinage compact, fermé et inclus dans cet ouvert.*

*Si  $K$  et  $F$  sont un compact et un fermé disjoints, il existe une application continue  $f : X \rightarrow [0, 1]$  nulle sur  $K$  et égale à 1 sur  $F$ .*

*Démonstration.* Soient  $\Omega \in \mathcal{T}$  et  $K$  un compact inclus dans  $\Omega$ . Tout point  $x$  de  $K$  admet un voisinage compact et fermé  $B_x$  inclus dans  $\Omega$ , par la proposition 3.2.1. Les ensembles  $B_x^\circ$  recouvrent  $K$  et on peut donc en extraire un recouvrement fini  $(B_{x_i} : i \leq p)$ . Alors  $K' = \cup_{i \leq p} B_{x_i}$  est compact et fermé, il est dans  $\Omega$ , et c'est un voisinage de  $K$  car on a

$$K \subset \cup_{i \leq p} B_{x_i}^\circ \subset (\cup_{i \leq p} B_{x_i})^\circ.$$

Si  $K$  est disjoint de  $F$ , il existe  $K'$  compact, fermé et voisinage de  $K$ , toujours disjoint de  $F$ . De la même façon, on trouve  $K''$  compact, fermé et voisinage de  $K'$ , et disjoint de  $F$  et enfin  $K'''$  compact, fermé et voisinage de  $K''$ , et disjoint de  $F$ . L'espace  $K'''$  muni de la topologie induite est compact et régulier, donc normal. On y applique le lemme d'Urysohn pour trouver une fonction  $f' : K''' \rightarrow [0, 1]$ , continue, et telle que  $f'|_{K'} = 0$  et  $f'|_{K''' \setminus K''} = 1$ . On prolonge alors cette fonction sur  $X$  en une fonction  $f$ , égale à la constante 1 sur  $X \setminus K'''$ . La fonction  $f$  est continue sur  $K'''^\circ$  car elle y coïncide avec  $f'$ , et elle est continue sur  $X \setminus K'''$  car elle y est constante; elle répond donc à la question.  $\square$

Terminons cette section sur les espaces localement compacts par le théorème de Baire.

**Définition 3.2.3.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans  $X$  est dense dans  $X$ .

Cette propriété peut être utilisée en passant au complémentaire : un espace est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. On peut encore contraposer : si  $(X, \mathcal{T})$  est non vide et de Baire, si  $X$  est union dénombrable de fermés, alors un de ces fermés est d'intérieur non vide.

**Théorème 3.2.1** (Baire<sup>j</sup>, 1899).

- (a) *Si  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact et séparé, alors  $(X, \mathcal{T})$  est de Baire.*
- (b) *Si  $(X, d)$  est un espace métrique complet, alors  $(X, \mathcal{T}_d)$  est de Baire.*

Aucune des conditions du théorème n'implique l'autre.

*Démonstration.* Soient  $(\Omega_n : n \in \mathbb{N})$  une suite d'ouverts denses dans  $X$  et  $\omega$  un ouvert non vide. Nous allons montrer que  $(\cap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n) \cap \omega \neq \emptyset$ .

(a) Si  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact et séparé, il est aussi régulier et tout point admet donc une base de voisinages compacts et fermés (Proposition 3.2.1).

Puisque  $\Omega_0$  est dense dans  $X$  et puisque  $\omega$  est un ouvert non vide,  $\Omega_0 \cap \omega$  est non vide. Soit  $x$  un point de cet ouvert. Il existe alors  $K_0$  compact, et tel que  $x \in K_0^\circ \subset K_0 \subset \Omega_0 \cap \omega$ . De la même manière, on peut construire un compact non vide  $K_1$  tel que  $K_1 \subset \Omega_1 \cap K_0^\circ$ . On construit de la même manière une suite de compacts non vides  $K_n$  tels que pour tout  $n$ ,  $K_n \subset \Omega_n \cap K_{n-1}^\circ$ . Ces compacts sont fermés, inclus dans  $K_0$  et emboîtés en décroissant et non vides; leur intersection est donc non vide, mais elle est incluse dans  $(\cap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n) \cap \omega$ , ce qui suffit pour terminer la preuve.

j. R. Baire 1874-1932

(b) La preuve du cas métrique complet est analogue à la précédente. Remarquons que si la topologie  $\mathcal{T}$  est associée à  $d$ , pour tout ouvert  $\omega$  et tout  $x \in \omega$ , il existe une boule ouverte  $b$  centrée sur  $x$  et dont l'adhérence est dans  $\omega$ .

Ici encore,  $\Omega_0 \cap \omega$  est non vide et contient donc un point  $x$ . On a donc une boule ouverte  $b_0$  centrée sur  $x$ , de rayon inférieur à 1, et telle que  $x \in b_0 \subset \overline{b_0} \subset \Omega_0 \cap \omega$ . La même construction avec  $\Omega_1 \cap b_0 \neq \emptyset$  donne une boule non vide  $b_1$ , de rayon inférieur à  $1/2$  telle que  $\overline{b_1} \subset \Omega_1 \cap b_0$ . De la même manière, on construit une suite  $(b_n : n \in \mathbb{N})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n$  est une boule non vide, de rayon inférieur à  $1/2^n$  et satisfaisant  $\overline{b_n} \subset \Omega_n \cap b_{n-1}$ . L'intersection de ces boules est incluse dans  $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n) \cap \omega$ . Pour terminer, il nous suffit donc de montrer que cette intersection est non vide. Pour ce faire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , fixons un point  $x_n$  dans  $b_n$ . La suite  $x_n$  est de Cauchy, car si  $p < q$ ,  $x_p$  et  $x_q$  sont dans  $b_p$  dont le diamètre est inférieur ou égal à  $1/2^p$ , qui tend vers 0 quand  $p$  tend vers l'infini. Par hypothèse, la suite  $x_n$  tend vers un point  $x$ . Ce point est dans  $\overline{b_N}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , puisque pour tout  $n \geq N$ ,  $x_n$  est dans  $b_N$ . On a donc  $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{b_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} b_n$ .  $\square$

### 3.3 Compactifications

Dans cette dernière section, nous montrons comment un espace topologique peut être plongé dans un espace compact. Cette construction s'appelle compactification. Après quelques exemples, nous évoquerons la construction classique, à savoir la compactification d'Alexandroff, qui est la plus simple. La compactification de Stone-Cëch, qui a de meilleures propriétés, est reprise en annexe.

**Définition 3.3.1.** Un *compactifié*<sup>k</sup> d'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est un couple  $((Y, \mathcal{T}'), f)$  tel que

- $(Y, \mathcal{T}')$  est un espace topologique compact ;
- $f : X \rightarrow Y$  est une application injective, et un homéomorphisme de  $X$  sur  $f(X)$  ;
- $f(X)$  est dense dans  $Y$ .

Avant de passer à un mécanisme général, voici quelques exemples simples.

**Exemple 3.3.1.** Pour la topologie euclidienne, l'intervalle  $]0, 1[^n$  est un sous-espace dense de  $[0, 1]^n$ . Donc  $([0, 1]^n, \mathcal{E}, i)$  est un compactifié de  $]0, 1[^n$ .

La projection stéréographique  $s$  définit un homéomorphisme de  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$  dans la sphère privée d'un point, qui est dense dans la sphère. Le couple  $((S^n, \mathcal{E}), s)$  est donc un compactifié de  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ .

La fonction arctan définit un homéomorphisme entre  $\mathbb{R}$  et  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ , donc  $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arctan)$  est une compactification de  $\mathbb{R}$ .

Passons maintenant à la définition de la compactification d'Alexandroff.

**Définition 3.3.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique non compact. On définit  $X^* = X \cup \{\infty\}$  où  $\infty$  n'est pas dans  $X$ , on note  $i$  l'inclusion de  $X$  dans  $X^*$  et

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{\omega_K = \{\infty\} \cup (X \setminus K) : K \text{ compact, fermé de } X\}.$$

Le couple  $((X^*, \mathcal{T}^*), i)$  est le *compactifié d'Alexandroff* de  $(X, \mathcal{T})$ .

La proposition suivante stipule que la définition ci-dessus fournit bien un compactifié de  $(X, \mathcal{T})$ .

---

k. ou une compactification

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Alors*

- L'ensemble  $\mathcal{T}^*$  définit une topologie sur  $X^*$  ;
- La topologie induite par  $\mathcal{T}^*$  dans  $X$  est  $\mathcal{T}$  ;
- L'espace topologique  $(X^*, \mathcal{T}^*)$  est compact ;
- Si  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas compact, alors  $X$  est dense dans  $X^*$ .

Enfin,  $(X, \mathcal{T})$  est localement compact et séparé si, et seulement si,  $(X^*, \mathcal{T}^*)$  est séparé.

*Démonstration.* L'ensemble vide est un élément de  $\mathcal{T}$  donc de  $\mathcal{T}^*$ , et on a  $X^* = \omega_\emptyset$ . Si  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}^*$ , alors soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont dans  $\mathcal{T}$ , et leur intersection aussi, soit ils s'écrivent  $\omega_{K_1}$  et  $\omega_{K_2}$  et on a  $\omega_{K_1} \cap \omega_{K_2} = \omega_{K_1 \cap K_2}$ , soit l'un s'écrit  $\omega_K$  et l'autre s'écrit  $\omega \in \mathcal{T}$ , on a alors  $\omega \cap \omega_K = \omega \cap (X \setminus K) \in \mathcal{T}$ .

Soit enfin  $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{T}^*$ . On a alors

$$\bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha = \left( \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \Omega_\alpha \in \mathcal{T}} \Omega_\alpha \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \Omega_\alpha \notin \mathcal{T}} \Omega_\alpha \right).$$

La première union est un ouvert de  $\mathcal{T}$ . Tout élément de la deuxième s'écrit  $\omega_{K_\alpha}$  pour un compact fermé  $K_\alpha$  de  $X$ , et on a  $\bigcup_{\alpha} \omega_{K_\alpha} = \omega_{\bigcap_{\alpha} K_\alpha}$ . On est donc amené à l'union d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathcal{T}$  et d'un ouvert  $\omega_K$  et dans ce cas on a  $\Omega \cup \omega_K = \omega_{K \setminus \Omega}$ .

Comparons maintenant les topologies  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_{X^*}$  sur  $X$ . On a  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{X^*}$ , puisque, si  $\Omega$  est dans  $\mathcal{T}$ , il est dans  $\mathcal{T}^*$ . Si  $\Omega$  est dans  $\mathcal{T}_{X^*}$ , il existe  $\Omega' \in \mathcal{T}^*$  tel que  $\Omega = X \cap \Omega'$ , il est alors clair que  $\Omega$  est dans  $\mathcal{T}$ .

Montrons que  $(X^*, \mathcal{T}^*)$  est compact. Soit  $\mathcal{O}$  un recouvrement ouvert de  $X^*$ . Il existe  $\Omega \in \mathcal{O}$  tel que  $\infty \in \Omega$ . Alors  $\Omega$  est nécessairement de la forme  $\omega_K$  pour un compact  $K$  de  $X$ , et  $\mathcal{O} \setminus \{\Omega\}$  est un recouvrement de  $K$  (par des ouverts de  $\mathcal{T}^*$ ). Dès lors,  $\{\omega \cap X : \omega \in \mathcal{O} \setminus \{\Omega\}\}$  est un recouvrement de  $K$  par des ouverts de  $X$  dont on peut extraire un recouvrement fini  $\{\Omega_1 \cap X, \dots, \Omega_n \cap X\}$ . Alors on a certainement  $X^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$ .

Enfin,  $X$  est dense dans  $X^*$  si tout ouvert non vide rencontre  $X$ . Soit  $\omega \in \mathcal{T}^* \setminus \{\emptyset\}$ . On a  $\omega \cap X = \emptyset$  si, et seulement si,  $\omega = \{\infty\}$ , mais cet ensemble ne peut être ouvert que si  $X$  est un compact fermé de  $(X, \mathcal{T})$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons que  $(X^*, \mathcal{T}^*)$  soit séparé, alors  $(X, \mathcal{T})$  est séparé puisque c'est un sous-espace. D'autre part, pour tout  $x \in X$ , on a  $x \neq \infty$ . Il existe donc un ouvert  $\omega$  contenant  $x$  et un ouvert  $\omega_K$  contenant  $\infty$  tels que  $\omega \cap \omega_K = \emptyset$ , ce qui donne  $x \in \omega \subset K$ , et  $X$  est localement compact.

Réciproquement, soient  $(X, \mathcal{T})$  localement compact et séparé, et  $x, y \in X^*$ . Si  $x$  et  $y$  sont dans  $X$ , on peut les séparer par des ouverts de  $\mathcal{T}$ . Si par exemple  $x \in X$  et  $y = \infty$ ,  $x$  admet un voisinage compact  $K$ , qui est aussi fermé, et donc  $K^\circ$  et  $\omega_K$  séparent  $x$  et  $y$ .  $\square$

Terminons par un résultat qui indique que le compactifié d'Alexandroff est, sous certaines hypothèses, un compactifié "minimal".

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique localement compact, séparé et non compact. Si  $((Y, \mathcal{T}'), f)$  est une compactification de  $X$ , telle que  $(Y, \mathcal{T}')$  soit séparé, alors  $(X^*, \mathcal{T}^*)$  s'identifie au quotient de  $(Y, \mathcal{T}')$ , par la relation qui identifie tous les points de  $Y \setminus f(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{R}$  la relation dont les classes sont  $\{y\}$  pour  $y \in f(X)$  et  $Y \setminus f(X)$ . L'application  $h$  de  $Y$  dans  $X^*$  par

$$h : Y \rightarrow X^* : y \mapsto \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si } y \in f(X); \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases}$$



se factorise naturellement à travers le quotient  $Y/\mathcal{R}$  en une bijection  $\tilde{h}$ . Si nous montrons que  $h$  est continue, alors  $\tilde{h}$  le sera aussi. Puisque  $Y/\mathcal{R}$  est compact et  $X^*$  est séparé, c'est un homéomorphisme.

L'application  $h$  est continue en tout point de  $Y \setminus f(X)$  : si  $y_0 \notin f(X)$ , on a  $h(y_0) = \infty$ . Un ouvert contenant  $h(y_0)$  s'écrit  $\omega_K$  pour un compact fermé  $K$  de  $X$ . On calcule alors

$$h^{-1}(\omega_K) = \{y \in Y : h(y) \in \omega_K\} = (Y \setminus f(X)) \cup \{y \in Y : h(y) \in X \setminus K\}.$$

Puisque  $f$  est une bijection entre  $X$  et  $f(X)$  et puisque  $h|_{f(X)} = f^{-1}$ , on a  $h^{-1}(\omega_K) = Y \setminus f(K)$ . Puisque  $f$  est continue et  $K$  compact,  $f(K)$  est compact dans  $Y$  et donc fermé.

L'application  $h$  est continue en tout point  $y_0$  de  $f(X)$ . Notons  $x_0$  le point  $h(y_0) = f^{-1}(y_0) \in X$ . Puisque  $X$  est localement compact, il existe un compact  $K$  de  $X$  tel que  $x_0 \in K^\circ \subset K$ . Alors  $h^{-1}(K^\circ) = f(K^\circ)$  est un ouvert de  $f(X)$  (car  $f$  est un homéomorphisme entre  $X$  et  $f(X)$ ), et  $h^{-1}(K) = f(K)$  est un compact de  $f(X)$  ou de  $Y$ . Il existe un ouvert  $\Omega$  de  $Y$  tel que  $f(K^\circ) = f(X) \cap \Omega$ . Puisque  $f(X)$  est dense dans  $Y$ ,  $f(X) \cap \Omega$  est dense dans  $\Omega$ , donc  $\Omega \subset f(K^\circ)^- \subset f(K)^- = f(K) \subset f(X)$ . Donc  $h^{-1}(K^\circ) = f(K^\circ) = \Omega$  est un ouvert de  $Y$ . □

### 3.4 Exercices

1. Démontrer que l'espace topologique  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe au quotient de  $[0, 1]$  par la relation qui identifie 0 et 1. Suggestion : utiliser l'exercice 10 page 47.
2. Dédurre de l'exercice précédent que  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , muni de la topologie quotient, est homéomorphe à  $S^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ , muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}^2$ .
3. Soit  $\mathcal{T}$  la topologie sur un ensemble  $X$  formée de  $\emptyset$  et des sous-ensembles contenant une partie fixe non vide  $A$  de  $X$ . Décrire les compacts de  $X$ .
4. Démontrer que la topologie induite par la topologie euclidienne de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{N}$  est la topologie discrète.

On considère  $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \sqrt{2}$  et on munit  $\mathbb{N}'$  de la topologie  $\mathcal{T}'$  définie par

$$U \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow U \not\ni \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad (U \ni \sqrt{2} \text{ et } \mathbb{N}' \setminus U \text{ est fini}).$$

Démontrer que  $\mathcal{T}'$  est une topologie. Démontrer que l'espace topologique  $(\mathbb{N}', \mathcal{T}')$  est compact, séparé et admet une base d'ouverts fermés.

5. On considère l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie euclidienne. Montrer que, si  $(x_n | n \in \mathbb{N})$  est une suite qui converge vers  $x$ , alors  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  est compact dans  $\mathbb{R}^n$ . En est-il toujours de même pour  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$  ?
6. Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  deux espaces topologiques. On suppose que  $(Y, \mathcal{T}')$  est compact et on munit le produit cartésien  $X \times Y$  de la topologie produit. Démontrer que la projection

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x$$

est une application fermée.

7. Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathcal{T}$ . Démontrer, sans recourir au théorème d'Alexander, que  $(X, \mathcal{T})$  est compact si, et seulement si, de tout recouvrement ouvert de  $X$  par des éléments de  $\mathcal{B}$  on peut extraire un recouvrement fini.
8. Démontrer que si  $(X, \mathcal{T})$  est régulier et si  $K$  est compact de  $X$ , alors  $\overline{K}$  est compact.

9. Démontrer que, dans tout espace topologique, toute intersection finie d'ouverts denses est dense.
10. Démontrer que tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.
11. Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. On munit  $X$  d'une nouvelle topologie  $\mathcal{T}'$  dont les fermés sont  $X$  et les compacts fermés de  $(X, \mathcal{T})$ . Montrer que  $(X, \mathcal{T}')$  est compact. Montrer qu'il est accessible si, et seulement si,  $(X, \mathcal{T})$  est accessible. Montrer qu'il est séparé si, et seulement si,  $(X, \mathcal{T})$  est compact et séparé.

# Chapitre 4

## Connexité et propriétés semblables

### 4.1 Espaces connexes

La notion de connexité est identique à celle qui a été étudiée pour l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  en première année.

**Définition 4.1.1.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est connexe s'il n'existe pas de partition de  $X$  en deux ouverts non vides.

*Remarque 4.1.* 1. En passant au complémentaire, on voit que  $(X, \mathcal{T})$  est connexe s'il n'existe pas de partition de  $X$  en deux fermés non vides.

2. On montre facilement, et je le laisse à titre d'exercice, que  $(X, \mathcal{T})$  est connexe si, et seulement si, il ne contient pas d'ouvert fermé propre.

Comme d'habitude, on peut définir la connexité d'un sous-ensemble.

**Définition 4.1.2.** Un sous-ensemble  $Y$  de  $(X, \mathcal{T})$  est connexe si l'espace topologique  $(Y, \mathcal{T}_X)$  est connexe.

On peut traduire la définition pour n'utiliser que des ouverts de  $X$  et non ceux de  $Y$ . Appelons une *disconnexion de  $Y$  par des ouverts de  $X$*  une paire d'ouverts  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$  tels que

$$Y \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad Y \cap \Omega_1 \neq \emptyset \quad Y \cap \Omega_2 \neq \emptyset, \quad \text{et} \quad Y \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (4.1)$$

Alors un sous-ensemble  $Y$  est connexe s'il n'existe pas de disconnexion de  $Y$  par des ouverts de  $X$ .<sup>a</sup>

**Exemple 4.1.1.** L'intervalle  $[0, 1]$  est un sous-ensemble connexe de la droite euclidienne. En effet, soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des ouverts de  $\mathbb{R}$  satisfaisant les conditions (4.1), pour  $Y = [0, 1]$ . On peut supposer que 1 est dans  $\Omega_2$ . Puisque  $\Omega_1 \cap [0, 1]$  est majoré par 1 et non vide, il admet une borne supérieure  $s \in [0, 1]$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]1 - \varepsilon, 1] \subset \Omega_2$ , donc  $s < 1$ . De même on a  $s > 0$ . Si  $s \in \Omega_1$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[ \subset \Omega_1 \cap [0, 1]$ , alors  $s$  n'est pas la borne supérieure de ce dernier ensemble. Si  $s$  est dans  $\Omega_2$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[ \subset \Omega_2 \cap [0, 1]$ , alors  $s - \varepsilon$  est un majorant de  $\Omega_1 \cap [0, 1]$ , et  $s$  n'en est pas la borne supérieure. Le point  $s$  ne peut donc être ni dans  $\Omega_1$ , ni dans  $\Omega_2$ .

Nous verrons d'ici peu que cela implique que tout intervalle de la droite réelle est connexe.

**Proposition 4.1.1.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $Y$  et  $Z$  deux parties de  $X$ . Si  $Y$  est connexe et dense dans  $Z$ , alors  $Z$  est connexe.

---

a. Ceci est un exercice, bien entendu. Cela vaut également pour l'ensemble  $X$  lui-même, auquel cas, on parlera de disconnexion de  $X$ .

*Remarque 4.2.* Nous utiliserons cette proposition pour montrer que tout produit d'espaces topologiques connexes est connexe.

*Démonstration.* Supposons que  $Z$  n'est pas connexe. On a alors une disconnexion de  $Z$  par deux ouverts de  $X$ , soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Puisque  $Y \subset Z$ , on a  $Y \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$  et  $Y \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . De plus puisque  $Y$  est dense dans  $Z$ , on a  $\Omega_1 \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ , et donc, par définition de l'adhérence,  $\Omega_1 \cap Y \neq \emptyset$ , et la même conclusion vaut pour  $\Omega_2$ . On a donc une disconnexion de  $Y$  par des ouverts de  $X$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

**Proposition 4.1.2.** *Toute image continue d'un connexe est connexe.*

En particulier, tout quotient d'un espace connexe est connexe.

*Démonstration.* Soient  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  des espaces connexes et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $f(X)$  n'est pas connexe, il existe une disconnexion de  $f(X)$  par des ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $Y$ . Puisque  $f$  est continue, les ensembles  $f^{-1}(\Omega_1)$  et  $f^{-1}(\Omega_2)$  sont ouverts dans  $X$  et on vérifie qu'ils forment une disconnexion de  $X$ .  $\square$

**Proposition 4.1.3.** *Soit  $\mathcal{A} \subset 2^X$  un ensemble de parties connexes de  $X$ . Supposons que pour toute partition de  $\mathcal{A}$  en deux parties non vides  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , on a*

$$\bar{X}_1 \cap X_2 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad X_1 \cap \bar{X}_2 \neq \emptyset$$

pour  $X_i = \cup_{A \in \mathcal{A}_i} A$ . Alors  $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$  est connexe.

*Remarque 4.3.* Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où l'ensemble vide n'est pas un élément de  $\mathcal{A}$ . Pour passer au cas le plus général, on peut alors définir  $\mathcal{A}'$  comme l'ensemble des parties non vides de  $\mathcal{A}$ . On applique alors la proposition à  $\mathcal{A}'$  et on déduit qu'elle est vraie pour  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$  ne soit pas connexe. Il existe donc une disconnexion de cet ensemble par deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $X$ . Tout élément  $A$  de  $\mathcal{A}$  vérifie les conditions

$$\begin{cases} A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Puisque  $A$  est connexe, on a alors nécessairement  $A \cap \Omega_1 = \emptyset$  (et donc  $A \subset \Omega_2$ ) ou  $A \cap \Omega_2 = \emptyset$  (et  $A \subset \Omega_1$ ). Puisque  $A$  est non vide, ces deux cas sont exclusifs et on peut donc former une partition de  $\mathcal{A}$  en définissant  $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \Omega_1\}$  et  $\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \Omega_2\}$ . Ces ensembles sont non vides par définition d'une disconnexion de  $\cup_{A \in \mathcal{A}} A$ . En définissant  $X_1$  et  $X_2$  comme dans l'énoncé, on a alors  $X_1 \subset \Omega_1 \cap X \setminus \Omega_2$  et  $X_2 \subset \Omega_2 \cap X \setminus \Omega_1$ . On a alors aussi  $\bar{X}_1 \subset X \setminus \Omega_2$  et  $\bar{X}_2 \subset X \setminus \Omega_1$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

**Corollaire 4.1.1.** *Toute union d'ensembles connexes ayant un point en commun est connexe.*

*Démonstration.* Exercice.  $\square$

**Théorème 4.1.1.** *Tout produit d'espaces topologiques connexes est connexe.*

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas d'un produit fini d'espaces connexes. Nous utiliserons ensuite le corollaire 4.1.1 et la proposition 4.1.1 pour le cas d'un produit quelconque.

Soient  $(X_1, \mathcal{T}_1)$  et  $(X_2, \mathcal{T}_2)$  des espaces connexes. Pour tout  $x \in X_1$ , l'ensemble  $A_x = \{x\} \times X_2$  est homéomorphe à  $X_2$ . Il est donc connexe. De même, si  $x_0$  est dans  $X_2$ ,  $B = X_1 \times \{x_0\}$  est connexe. On peut alors appliquer la proposition 4.1.3 à  $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X_1\} \cup \{B\}$  et on conclut que  $X_1 \times X_2 = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$  est connexe.

On passe aux produits finis par induction, en notant qu'on a  $X_1 \times \cdots \times X_n \cong (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ .

Traitons maintenant le produit de la famille quelconque  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ . Pour toute partie finie  $\nu$  de  $A$ , on considère le produit fini  $F_\nu = \prod_{i \in \nu} X_i$ . On fixe également un point  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ . Comme pour la proposition 1.6.5, on montre que l'application

$$i_\nu : F_\nu \rightarrow X : y \mapsto (z_\alpha)_{\alpha \in A}$$

définie par  $z_\alpha = y_\alpha$  si  $\alpha \in \nu$  et  $z_\alpha = x_\alpha$  sinon, est un homéomorphisme de  $F_\nu$  sur son image. Dès lors, les ensembles  $i_\nu(F_\nu)$  sont connexes et ont un point en commun  $x$ ; leur union est donc connexe. Il nous reste à montrer que cette union est dense pour conclure en utilisant la proposition 4.1.1. Il suffit pour cela de montrer que cet ensemble rencontre tout ouvert *de base* non vide du produit. Un tel ouvert s'écrit  $\omega = \prod_{\alpha \in A} \omega_\alpha$  où pour tout  $\alpha$ ,  $\omega_\alpha$  est un ouvert non vide de  $X_\alpha$ , et de plus, il existe une partie finie  $\mu$  de  $A$  telle que  $\omega_\alpha = X_\alpha$  pour tout  $\alpha \in A \setminus \mu$ . On constate alors que  $\omega$  rencontre  $i_\mu(F_\mu)$ , en considérant par exemple un point  $i_\mu(y)$ , où  $y \in F_\mu$  est tel que  $y_\alpha \in \omega_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mu$ .  $\square$

Nous savons que si  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique connexe, il en est de même pour tout quotient de  $X$ . La proposition suivante montre que la réciproque est vraie dans certains cas.

**Proposition 4.1.4.** *Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $X/\mathcal{R}$  est connexe et si les classes de  $\mathcal{R}$  sont connexes, alors  $(X, \mathcal{T})$  est connexe.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.1.3.

*Démonstration.* Supposons que  $X$  ne soit pas connexe. Il existe alors une disconnexion de  $X$  par des ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Pour tout  $x \in X$ , la classe de  $x$  vue comme sous-ensemble de  $X$  est  $\pi^{-1}(\pi(\{x\}))$ . Etant connexe, elle est soit dans  $\Omega_1$ , soit dans  $\Omega_2$ . Alors on a  $X/\mathcal{R} = \pi(\Omega_1) \cup \pi(\Omega_2)$ . Les ensembles  $\pi(\Omega_1)$  et  $\pi(\Omega_2)$  sont disjoints, sinon un point de  $\Omega_1$  serait équivalent à un point de  $\Omega_2$ , et non vides, sinon on aurait  $X \subset \Omega_1$  ou  $X \subset \Omega_2$ . De plus, on a  $\pi^{-1}(\pi(\Omega_i)) = \Omega_i$ , donc ces ensembles sont également ouverts du quotient, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle le quotient est connexe.  $\square$

Terminons par un résultat sur les chaînes d'ouverts, qui nous sera utile quand nous étudierons les espaces connexes par arcs.

**Définition 4.1.3.** Soient  $\mathcal{A} \subset 2^X$  et  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ . Une chaîne de  $\mathcal{A}$  joignant  $x$  à  $y$  est une partie finie ordonnée  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $x \in A_1$ ,  $y \in A_n$  et  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  si, et seulement si,  $i - j \in \{-1, 0, 1\}$ .

**Proposition 4.1.5.** *Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace connexe. Pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{O}$  de  $X$  et tous  $x, y \in X$ , il existe une chaîne de  $\mathcal{O}$  joignant  $x$  à  $y$ .*

*Démonstration.* Soit  $C_x$  l'ensemble des points de  $X$  qui peuvent être joints à  $x$  par une chaîne de  $\mathcal{O}$ . Nous allons montrer que  $C_x$  est ouvert, fermé et non vide et on pourra conclure que  $C_x = X$ , vu la connexité de  $X$ .

L'ensemble  $C_x$  contient  $x$  car,  $\mathcal{O}$  étant un recouvrement, il existe  $\omega \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \omega$ . Alors  $\{\omega\}$  est une chaîne de  $\mathcal{O}$  joignant  $x$  à  $x$ .

Montrons maintenant qu'on a  $\overline{C_x} \subset C_x^\circ$ . Soient  $z \in \overline{C_x}$  et  $\omega \in \mathcal{O}$  tel que  $z \in \omega$ . Par définition de l'adhérence,  $\omega$  rencontre  $C_x$  en un point  $t$ . Il existe une chaîne  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  de  $\mathcal{O}$  joignant  $x$  à  $t$ . Si  $i \leq n$  est le plus petit indice tel que  $\omega \cap \omega_i \neq \emptyset$ , alors  $\{\omega_1, \dots, \omega_i, \omega\}$  est une chaîne joignant  $x$  à  $z$  et  $z$  est dans  $C_x$ . Mais cette chaîne joint aussi  $x$  à tous les éléments de  $\omega$ , donc  $z \in \omega \subset C_x$  et  $z$  est intérieur à  $C_x$ .  $\square$

## 4.2 Composantes connexes

Quand un espace  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas connexe, il est naturel de le décomposer en "morceaux connexes". C'est l'idée des composantes connexes.

**Définition 4.2.1.** Une composante connexe de  $(X, \mathcal{T})$  est une partie connexe maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des parties connexes de  $X$ .

Voici quelques propriétés des composantes connexes.

**Proposition 4.2.1.** *Les composantes connexes sont fermées. Elles forment une partition de  $X$  et toute partie connexe est incluse dans une composante connexe.*

*Démonstration.* Si  $C$  est une composante connexe, alors  $\overline{C}$  est connexe et contient  $C$ , donc  $\overline{C} = C$  par maximalité. Considérons la relation définie par  $x \mathcal{R} y$  s'il existe un connexe  $A$  tel que  $\{x, y\} \subset A$ . C'est une relation d'équivalence.<sup>b</sup> La classe d'un élément  $x$  est l'union des connexes qui contiennent  $x$ . C'est visiblement une composante connexe. D'autre part, chaque composante connexe est incluse dans une classe, et par maximalité, elle est égale à celle-ci. Enfin, tout ensemble connexe est inclus dans une classe.  $\square$

La propriété suivante est fondamentale, autant qu'évidente.

**Proposition 4.2.2.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  et  $(Y, \mathcal{T}')$  sont deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme, alors  $C$  est une composante connexe de  $X$  si, et seulement si,  $f(C)$  est une composante connexe de  $Y$ .*

## 4.3 Espaces localement connexes

**Définition 4.3.1.** L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est localement connexe si  $\mathcal{T}$  admet une base formée d'ensembles connexes.

On aurait pu donner une autre définition, puisque la localité fait souvent référence aux voisinages des points. On ne peut évidemment pas demander que tout voisinage d'un point  $x$  soit connexe, et il serait trop faible de demander que tout point admette un voisinage connexe, mais on peut demander que tout point admette une base de voisinages connexes. Montrons que cette propriété est équivalente à la connexité locale.

**Proposition 4.3.1.** *L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est localement connexe si, et seulement si, tout point admet une base de voisinages connexes.*

*Démonstration.* La condition est nécessaire. En effet, si  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts connexes, pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : B \ni x\}$  est une base de voisinages connexes de  $x$ .

La condition est suffisante. Observons que, sous nos hypothèses, si  $\Omega$  est un ouvert, alors toute composante connexe de  $\Omega$  est également un ouvert. En effet, si  $C$  est une telle composante et si  $x$  est dans  $C$ , alors  $x$  admet un voisinage connexe  $V$  inclus dans  $\Omega$ . Dès lors  $C \cup V$  est connexe, inclus dans  $\Omega$  et contient  $C$ . Par maximalité, on a  $V \subset C$ , donc  $C$  est voisinage de  $x$ .

Dans ces conditions, l'ensemble  $\mathcal{B}$  formé des composantes connexes des ouverts de  $\mathcal{T}$  forme une base d'ouverts connexes de  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Au passage, nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 4.3.2.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est localement connexe, alors ses composantes connexes sont des ouverts.*

b. On utilise le corollaire 4.1.1 pour la transitivité.

## 4.4 Connexité par arcs

La notion de connexité par arcs est plus forte que la notion de connexité.

**Définition 4.4.1.** Un *chemin* ou *arc* de  $X$  joignant un point  $x$  à un point  $y$  est une application continue  $f : [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .<sup>c</sup> L'espace  $(X, \mathcal{T})$  est connexe par arcs si pour tout couple de points  $(x, y) \in X^2$ , il existe un arc joignant  $x$  à  $y$ . L'espace est *localement connexe par arcs* s'il possède une base d'ouverts connexes par arcs.

Il est naturel de se demander si on peut composer des chemins. C'est possible quand l'origine de l'un est l'extrémité de l'autre.

**Définition 4.4.2.** Soient  $f_1 : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin joignant  $x$  à  $y$  et  $f_2 : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin joignant  $y$  à  $z$ . La composée de  $f_1$  et  $f_2$ , notée  $f_1 \star f_2$  est le chemin défini par

$$f_1 \star f_2 : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

On montre que cette composée est bien définie puisque  $f_1(1) = y = f_2(0)$ . Elle est également continue. Enfin, elle joint  $x$  à  $z$ . On remarquera cependant que l'opération de composition n'est pas associative car, si les composées  $(f_1 \star f_2) \star f_3$  et  $f_1 \star (f_2 \star f_3)$  donnent la même image à  $[0, 1]$ , le paramétrage de cette image, c'est-à-dire la fonction elle-même, n'est pas identique dans les deux situations.

La proposition suivante donne des liens entre ces notions de connexité.

**Proposition 4.4.1.** *Si  $(X, \mathcal{T})$  est connexe par arcs, il est connexe. S'il est localement connexe par arcs et connexe, il est connexe par arcs.*

*Démonstration.* Pour la première partie, on fixe  $x \in X$ . Pour tout  $y \in X$ , il existe un chemin  $f_y$  joignant  $x$  à  $y$ . On a alors  $X = \cup_{y \in X} f_y([0, 1])$ .

Pour la deuxième partie, on a un recouvrement  $\mathcal{O}$  par des ouverts connexes par arcs. Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X$ . Il existe une chaîne  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  de  $\mathcal{O}$  joignant  $x$  à  $y$ . On fixe  $x_i$  dans  $\omega_i \cap \omega_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ ; on pose  $x_0 = x$  et  $x_n = y$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un chemin  $f_i : [0, 1] \rightarrow \omega_i$  joignant  $x_{i-1}$  à  $x_i$ . La composée de ces chemins joint alors  $x$  à  $y$ .<sup>d</sup>  $\square$

En utilisant la composition des chemins, on montre directement la proposition suivante, qui est l'équivalent du corollaire 4.1.1.

**Proposition 4.4.2.** *Toute union d'ensembles connexes par arcs ayant un point en commun est connexe par arcs.*

Enfin, une propriété évidente, mais fondamentale.

**Proposition 4.4.3.** *Toute image continue d'un espace connexe par arcs est connexe par arcs.*

Comme pour les espaces connexes, on peut définir les composantes connexes par arcs.

**Définition 4.4.3.** Une composante connexe par arcs de  $(X, \mathcal{T})$  est un élément maximal dans l'ensemble des parties connexes par arcs de  $X$ .

On adapte alors la proposition 4.2.1.

**Proposition 4.4.4.** *Les composantes connexes par arcs forment une partition de  $X$ .*

c. Dans certains ouvrages, on fait la distinction entre chemin et arc, un arc étant un chemin tel que  $f$  soit un homéomorphisme de  $[0, 1]$  sur son image, nous n'adopterons pas cette distinction.

d. Quelle que soit la façon de placer les parenthèses.

## 4.5 Exercices

1. Démontrer qu'un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est connexe si, et seulement si, toute application continue de  $X$  dans  $\{0, 1\}$  (muni de la topologie discrète) est constante.
2. Utiliser l'exercice 1 pour démontrer que l'image continue d'un connexe est connexe.
3. Utiliser l'exercice 1 pour démontrer que dans tout espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ , l'union de deux sous-ensembles connexes d'intersection non vide est connexe.
4. Démontrer que tout sous-ensemble connexe de  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  est un intervalle.
5. Démontrer que l'ensemble  $X = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}$  muni de la topologie induite par la topologie euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  est compact et connexe. En déduire que si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $f(X)$  est un segment  $[a, b]$ . Conclure que  $X$  ne peut être homéomorphe à une partie de  $\mathbb{R}$ .
6. Démontrer que si  $C$  est une composante connexe de  $(X, \mathcal{T})$  et si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  est un homéomorphisme, alors  $f(C)$  est une composante connexe de  $(Y, \mathcal{T}')$ . En déduire que  $X' = \{0\} \times ]-1, 1[ \cup ]-1, 1[ \times \{0\}$ , muni de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$ , le point  $(0, 0)$  n'a aucun voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , quel que soit  $n$ .
7. Démontrer que  $(X, \mathcal{T})$  est connexe si, et seulement si, pour toute fonction continue  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la topologie euclidienne telle que  $a, b \in f(X)$ ,  $(a \leq b)$ , et pour tout  $c$  tel que  $a \leq c \leq b$ , il existe  $y \in X$  tel que  $f(y) = c$ .
8. Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence dans  $X$ . Démontrer que si les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  sont connexes, le graphe de  $\mathcal{R}$  est connexe dans  $X \times X$ .



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces topologiques</b>	<b>2</b>
1.1	Topologies . . . . .	2
1.1.1	Exercices . . . . .	7
1.2	Intérieur adhérence, frontière . . . . .	7
1.2.1	Exercices . . . . .	9
1.3	Applications continues . . . . .	10
1.3.1	Exercices . . . . .	12
1.4	Topologies initiales et finales . . . . .	12
1.4.1	Exercices . . . . .	15
1.5	Sous-espaces, topologies induites . . . . .	15
1.6	Espaces produits . . . . .	17
1.6.1	Exercices . . . . .	20
1.7	Espaces quotients . . . . .	21
1.7.1	Exercices . . . . .	24
1.8	Groupes topologiques et leurs actions . . . . .	25
1.8.1	Exercices . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Quelques axiomes</b>	<b>36</b>
2.1	Axiomes de dénombrabilité . . . . .	36
2.1.1	Exercices . . . . .	38
2.2	Axiomes de séparation . . . . .	39
2.3	Exemples et contre-exemples . . . . .	41
2.4	Quelques résultats . . . . .	43
2.4.1	Exercices . . . . .	46
2.5	Lemme d'Urysohn et théorème de Tietze . . . . .	48
2.5.1	Exercices . . . . .	51
2.6	Recouvrements et partitions de l'unité . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Compacts et compagnie</b>	<b>55</b>
3.1	Espaces compacts . . . . .	55
3.1.1	Compacité et séparation . . . . .	57
3.1.2	Sous-espaces, quotients et produits de compacts . . . . .	58
3.2	Espaces localement compacts . . . . .	60
3.3	Compactifications . . . . .	62
3.4	Exercices . . . . .	64

<b>4</b>	<b>Connexité et propriétés semblables</b>	<b>66</b>
4.1	Espaces connexes . . . . .	66
4.2	Composantes connexes . . . . .	69
4.3	Espaces localement connexes . . . . .	69
4.4	Connexité par arcs . . . . .	70
4.5	Exercices . . . . .	71

# Bibliographie

- [1] Yu. Borisovich, N. Bliznyakov, Ya. Izrailevich, and T. Fomenko. *Introduction to topology*. “Mir”, Moscow, 1985. Translated from the Russian by Oleg Efimov.
- [2] M. De Wilde. *Topologie Générale*. Notes de cours, Université de Liège, 1997.
- [3] Sidney A. Morris. *Topology without tears*. <http://uob-community.ballarat.edu.au/smorris/topology.htm>.
- [4] James R. Munkres. *Topology : a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [5] Stephen Willard. *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.